S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 815–822 (2018) УДК 514.76
DOI 10.17377/semi.2018.15.068 MSC 53B35

О ГЕОМЕТРИИ QS-ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Л.В. СТЕПАНОВА, Г.А. БАНАРУ, М.Б. БАНАРУ

Abstract. Almost contact metric structures are induced on any oriented hypersurface of an almost Hermitian manifold. In this paper, we study the case when the almost Hermitian manifold is Kählerian and the almost contact structure on its hypersurface is quasi-Sasakian. Some theorems on geometry of quasi-Sasakian hypersurfaces of a Kählerian manifold are proved.

Keywords: almost contact metric structure, quasi-Sasakian structure, type number, hypersurface, Kählerian manifold.

1

Почти контактная метрическая структура индуцируется на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия. Многие специалисты отмечают, что именно этот факт определяет глубокую связь между контактной и эрмитовой геометриями. Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий исследовались и исследуются многими геометрами. Классическими считаются работы С. Сасаки, С. Голдберга, Д. Блэра, Й. Ишихары, Х. Янамото и К. Яно. Отметим, что обзор [1] содержит множество результатов современных геометров по данной тематике.

В данной статье рассматривается случай, когда на ориентируемой гиперповерхности келерова многообразия индуцируется квазисасакиева структура. Как известно, класс келеровых многообразий — самый простой и наиболее изученный класс почти эрмитовых многообразий. Он входит в состав любого из 16 классов Грея–Хервеллы почти эрмитовых многообразий [2]. Поэтому всякий

Stepanova, L.V., Banaru, G.A., Banaru, M.B., On geometry of QS-hypersurfaces of Kählerian manifolds.

Поступила 21 февраля 2017 г., опубликована 1 августа 2018 г.

результат о геометрии почти эрмитовых многообразий какого угодно класса имеет непосредственное отношение и к келеровым многообразиям.

Также отметим, что геометрия почти эрмитовых многообразий, или эрмитова геометрия, — это интенсивно развивающийся в настоящее время раздел дифференциальной геометрии. Этот раздел обладает богатым внутренним содержанием, а также имеет теснейшие связи как с другими разделами геометрии, так и различными областями современной теоретической физики.

Настоящая работа является продолжением исследований авторов в области геометрии почти контактных метрических структур на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий. К ней наиболее близки статьи [3] и [4] о квазисасакиевых гиперповерхностях квазикелеровых и эрмитовых многообразий, а также работы о почти контактных метрических структурах на гиперповерхностях келеровых многообразий [5], [6], [7]. Некоторые результаты, содержащиеся в данной статье, были анонсированы на международных конференциях в Новосибирске, Крайове и Минске в 2016 г., а также в кратком сообщении [8].

2

Напомним, что почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, для которой выполняются условия [9]:

$$\eta(\xi) = 1,\ \Phi(\xi) = 0,\ \eta \circ \Phi = 0,\ \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y),\ X, Y \in \aleph(N).$$

(Здесь Φ — поле тензора типа (1, 1), ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.)

Хорошо известно, что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, нечетномерно и ориентируемо. Классическим примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура [9], характеризуемая тождествами

$$\nabla\eta = 0\,, \quad \nabla\Phi = 0,$$

где ∇ — риманова связность метрики g . Многообразия, наделенные такой структурой, локально эквивалентны произведению келерова многообразия на вещественную прямую [9].

Почти контактная метрическая структура $(\Phi\,,\, \xi\,,\, \eta\,,\, g)$ называется квазисасакиевой (quasi-Sasakian, QS-), если ее фундаментальная форма $\Omega\,(X, Y) = \langle X,\, \Phi Y\rangle$ замкнута и выполняется такое условие:

$$N_\Phi + \frac{1}{2}\,d\eta \otimes \xi\, = 0.$$

где N_Φ — тензор Нейенхейса оператора Φ.

По нашему мнению, важнейшей работой в области геометрии квазисасакиевых структур является статья В.Ф. Кириченко и А.Р. Рустанова [10].

Почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J,\, g = \langle\cdot,\, \cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии [9]. При этом J и $g = \langle\cdot,\,\cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX,\ JY\rangle = \langle X,\ Y\rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Здесь $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH-) многообразием. С каждой AH-структурой $\{J,\ g = \langle\cdot,\,\cdot\rangle\}$ на многообразии связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (то есть 2-формы), определяемого равенством

$$F(X,\ Y) = \langle X,\ JY\rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n})$$

и называемого фундаментальной формой структуры.

Пусть $\big(M^{2n},\ \{J,\ g = \langle\cdot,\,\cdot\rangle\}\big)$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p \in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p, $\{J_p,\ g_p = \langle\cdot,\,\cdot\rangle\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J,\ g = \langle\cdot,\,\cdot\rangle\}$. Реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (или A-реперы), устроены следующим образом:

$$(p,\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n,\ \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где ε_a — собственные векторы оператора почти комплексной структуры в комплексификации касательного пространства, отвечающие собственному значению оператора $i = \sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ — собственные векторы, отвечающие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n; $\hat{a} = a + n$. Матрица оператора структуры в A-репере в точке p имеет вид:

$$(J_j^k) = \left(\begin{array}{c|c} iI_n & 0 \\ \hline 0 & -iI_n \end{array}\right),$$

где I_n — единичная матрица порядка n; $k,\ j = 1, \ldots, 2n$. Хорошо известно [9], что матрицы римановой метрики g и фундаментальной формы F в A-репере принимают, соответственно, вид:

$$(g_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right); \ \ (F_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & iI_n \\ \hline -iI_n & 0 \end{array}\right).$$

Почти эрмитово многообразие называется эрмитовым, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема, и келеровым, если $\nabla F = 0$ [2], [9].

3

Приведем основные результаты.

Теорема 1. *Матрица второй квадратичной формы погружения квазисасакиевой гиперповерхности N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n} имеет вид:*

$$(\sigma_{ps}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \text{\Large 0} & \begin{matrix}0\\ \dots\\ 0\end{matrix} & \sigma_{\alpha\hat{\beta}} \\ \hline 0\dots0 & \sigma_{nn} & 0\dots0 \\ \hline \sigma_{\hat{\alpha}\beta} & \begin{matrix}0\\ \dots\\ 0\end{matrix} & \text{\Large 0} \end{array}\right) p, s = 1, ..., 2n-1. \tag{1}$$

Доказательство. Воспользуемся структурными уравнениями Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1} эрмитова многообразия M^{2n} [3]:

$$\begin{gathered} d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + \left(\sqrt{2}B^{\alpha n}{}_\beta + i\sigma^\alpha_\beta\right)\omega^\beta \wedge \omega + \\ + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_n + i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \left(\sqrt{2}B_{\alpha n}{}^\beta - i\sigma^\beta_\alpha\right)\omega_\beta \wedge \omega + \\ + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B_{\alpha\beta}{}^n - i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^\beta \wedge \omega; \\ d\omega = \left(\sqrt{2}B^{n\alpha}{}_\beta - \sqrt{2}B_{n\beta}{}^\alpha - 2i\sigma^\alpha_\beta\right)\omega^\beta \wedge \omega_\alpha + \left(B_{n\beta}{}^n + i\sigma_{n\beta}\right)\omega \wedge \omega^\beta + \\ + \left(B^{n\beta}{}_n - i\sigma^\beta_n\right)\omega \wedge \omega_\beta, \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2}J^a_{\hat{b},c}, \quad B_{ab}{}^c = \frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}.$$

Здесь через $\{J^j_{k,m}\}$ обозначены компоненты ∇J; системы функций $\left\{B^{ab}{}_c\right\}$ и $\{B_{ab}{}^c\}$ служат компонентами тензоров Кириченко [11] почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n}. Также отметим, что $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n-1$; $a, b, c = 1, \dots, n$; $\hat{a} = a + n$; σ; — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в эрмитово многообразие M^{2n}; $\{\omega^\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ — компоненты форм смещения $(\omega^n = \omega)$; $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности; $\omega_\alpha = \omega^{\hat{\alpha}}$.

Пусть на гиперповерхности N^{2n-1} эрмитова многообразия M^{2n} индуцируется квазисасакиева структура. Известно, что первая группа структурных уравнений Картана квазисасакиевой структуры имеет следующий вид [3], [10]:

$$\begin{gathered} d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^\alpha_\beta \omega \wedge \omega^\beta\,; \\ d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta - B^\beta_\alpha \omega \wedge \omega_\beta\,; \\ d\omega = 2\,B^\alpha_\beta\,\omega^\beta \wedge \omega_\alpha\,. \end{gathered} \tag{3}$$

Сопоставляя (2) и (3), мы получаем:

$$\begin{gathered} 1)\sqrt{2}B^{\alpha n}{}_\beta + i\sigma^\alpha_\beta = B^\alpha_\beta;\ \ 2)B^{\alpha\beta}{}_\gamma = 0;\ \ 3) - \frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_n + i\sigma^{\alpha\beta} = 0; \\ 4)\sqrt{2}B^{n\alpha}{}_\beta - \sqrt{2}B_{n\beta}{}^\alpha - 2i\sigma^\alpha_\beta = 2B^\alpha_\beta;\quad 5)B^{n\beta}{}_n - i\sigma^\beta_n = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

а также формулы, получаемые комплексным сопряжением формул (4). Их запись мы опускаем.

Из $(4)_3$ мы имеем, что

$$\sigma^{\alpha\beta} = -\frac{i}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_n.$$

Проальтернируем это соотношение:

$$0 = \sigma^{[\alpha\beta]} = -\frac{i}{\sqrt{2}} B^{[\alpha\beta]}{}_n = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \left(B^{\alpha\beta}{}_n - B^{\beta\alpha}{}_n \right) = -\frac{i}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_n.$$

Следовательно,

$$B^{\alpha\beta}{}_n = 0,$$

а значит,

$$\sigma^{\alpha\beta} = 0.$$

Из $(4)_1$ мы имеем, что

$$B^{n\alpha}{}_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} B^\alpha_\beta + \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma^\alpha_\beta.$$

Используя $(4)_4$, получаем:

$$B^\alpha_\beta + i\sigma^\alpha_\beta - \sqrt{2}\, B_{n\beta}{}^\alpha - 2i\,\sigma^\alpha_\beta = 2\, B^\alpha_\beta,$$
$$-\sqrt{2}\, B_{n\beta}{}^\alpha - i\,\sigma^\alpha_\beta = B^\alpha_\beta,$$
$$\sigma^\alpha_\beta = i\sqrt{2}\, B_{n\beta}{}^\alpha + i\, B^\alpha_\beta.$$

Поэтому условия (4) можно переписать следующим образом:

$$1)\, \sigma_{\alpha\beta} = 0;\;\; 2)\; \sigma_{\hat{\alpha}\beta} = i\sqrt{2}\, B_{n\beta}{}^\alpha + i\, B^\alpha_\beta;\;\; 3)\, \sigma_{n\hat{\beta}} = i\, B^{n\beta}{}_n;$$
$$4)\, B^{\alpha\beta}{}_\gamma = 0;\;\; 5)\, B^{\alpha\beta}{}_n = 0, \qquad (5)$$

а также формулы, получаемые комплексным сопряжением формул (5).

Теперь учтем, что эрмитово многообразие является келеровым тогда и только тогда, когда его тензоры Кириченко обращаются в нуль [12]:

$$B^{ab}{}_c = 0,\;\; B_{ab}{}^c = 0.$$

Поэтому из формул (5) следует:

$$1)\, \sigma_{\alpha\beta} = 0;\;\; 2)\, \sigma^{\alpha\beta} = 0;\;\; 3)\, \sigma^\beta_n = 0;\;\; 4)\, \sigma_{n\beta} = 0. \qquad (6)$$

Вот почему матрица второй квадратичной формы погружения гиперповерхности N^{2n-1} с квазисасакиевой структурой в келерово многообразие M^{2n} имеет вид (1), что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Структурные уравнения Картана квазисасакиевой структуры на гиперповерхности N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n} имеют следующий вид:*

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + i\sigma^\alpha_\beta\, \omega^\beta \wedge \omega\,;$$
$$d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta - i\sigma^\beta_\alpha \omega_\beta \wedge \omega\,; \qquad (7)$$
$$d\omega = -2i\sigma^\alpha_\beta\, \omega^\beta \wedge \omega_\alpha.$$

Доказательство. Применим соотношения (6) к структурным уравнениям (2) почти контактной метрической структуры на гиперповерхности эрмитова многообразия. Также учтем упомянутое выше обращение в нуль тензоров Кириченко в случае, когда эрмитово многообразие является келеровым. В итоге получаем структурные уравнения (7), что и требовалось доказать. □

Теорема 3. *Если квазисасакиева гиперповерхность келерова многообразия минимальна, то имеет место тождество* $\sigma(\xi, \xi) = 0$.

Доказательство. Критерием (иногда — определением) минимальности гиперповерхности является условие [13]

$$g^{ps}\sigma_{ps} = 0, \;\; p, s = 1, ..., 2n-1.$$

Принимая во внимание вид матрицы контравариантного метрического тензора [14]:

$$(g^{ps}) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & I_{n-1} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \hline I_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & 0 \end{array} \right),$$

где I_{n-1} — единичная матрица порядка $n-1$, мы получаем с учетом (5) и (6):

$$g^{ps}\sigma_{ps} = g^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + g^{\hat{\alpha}\beta}\sigma_{\hat{\alpha}\beta} + g^{\alpha\hat{\beta}}\sigma_{\alpha\hat{\beta}} + g^{nn}\sigma_{nn} =$$

$$= g^{\hat{\alpha}\beta}\sigma_{\hat{\alpha}\beta} + g^{\alpha\hat{\beta}}\sigma_{\alpha\hat{\beta}} + g^{nn}\sigma_{nn} = \sigma_{nn}.$$

Следовательно,

$$g^{ps}\sigma_{ps} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{nn} = 0,$$

что означает

$$\sigma(\xi, \xi) = 0.$$

Итак, минимальность квазисасакиевой гиперповерхности N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n} означает, что $\sigma(\xi, \xi) = 0$, что и требовалось доказать. □

Теорема 4. *Если квазисасакиева гиперповерхность келерова многообразия минимальна, то ее типовое число четно.*

Доказательство. Вначале напомним, что типовым числом гиперповерхности называют ранг ее второй квадратичной формы [13].

В силу доказанной выше Теоремы 2, матрица второй квадратичной формы минимальной квазисасакиевой гиперповерхности N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n} имеет следующий вид:

$$(\sigma_{ps}) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & \sigma_{\alpha\hat{\beta}} \\ \hline 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \hline \sigma_{\hat{\alpha}\beta} & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & 0 \end{array} \right), \; p, s = 1, \dots, 2n-1. \quad (8)$$

Следовательно, ранг (σ_{ps}) будет определяться так:

$$rank\,(\sigma_{ps}) = rank\,(\sigma_{\hat{\alpha}\beta}) + rank\,(\sigma_{\alpha\hat{\beta}}).$$

Поскольку $\sigma_{\hat{\alpha}\beta} = \overline{\sigma_{\alpha\hat{\beta}}}$, получим, что

$$rank(\sigma_{ps}) = 2rank(\sigma_{\hat{\alpha}\beta}),$$

то есть этот ранг, или типовое число гиперповерхности, есть число четное. Конкретнее, это типовое число может принимать значение 0 (что соответствует тривиальному случаю вполне геодезической гиперповерхности), а также $2, \dots, 2n-2$. Теорема полностью доказана. □

Замечание 1. Обратим внимание на тот факт, что необходимым и достаточным условием четности типового числа QS-гиперповерхности N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n} является условие $\sigma_{nn} = 0$. Но компонента σ_{nn} не присутствует в структурных уравнениях Картана (7) квазисасакиевой структуры на гиперповерхности келерова многообразия. Это означает, что QS-структура может быть реализована как на гиперповерхностях с четным, так и с нечетным типовым числом.

Теорема 5. *Если квазисасакиева гиперповерхность N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n} минимальна, то она линейчата.*

Доказательство. Обратим внимание на то, что минимальность оснащенной квазисасакиевой структурой гиперповерхности N^{2n-1} в келеровом многообразии M^{2n} влечет вырожденность матрицы ее второй квадратичной формы:

$$rank\,(\sigma_{ps}) < 2\,n - 1.$$

А это означает, что гиперповерхность окажется линейчатой, что и требовалось доказать. □

Замечание 2. Поскольку, как отмечалось выше, класс келеровых многообразий входит в любой из классов Грея-Хервеллы почти эрмитовых многообразий, то доказательство ключевой Теоремы 1 можно было бы провести иным путем. А именно, используя [14], где рассматриваются квазисасакиевы гиперповерхности квазикелеровых (quasi-Kählerian, QK-) многообразий. Условия, при которых QK-многообразие является келеровым, давно известны и содержатся, например, в [12].

Замечание 3. Если гиперповерхность N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n} является вполне омбилической, то есть выполняется условие

$$\sigma_{ps} = \lambda g_{ps}, \quad \lambda - const,$$

то квазисасакиева структура будет сасакиевой [15]. Случай минимальности сасакиевой гиперповерхности келерова или специального эрмитова многообразия детально рассмотрен в [16].

Авторы выражают искреннюю благодарность Алигаджи Рабадановичу Рустанову (Московский педагогический государственный университет) за содержательные дискуссии о гиперповерхностях келеровых многообразий, которые были весьма полезны при подготовке этой работы.

References

[1] M.B. Banaru, V.F. Kirichenko, *Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds*, Journal of Mathematical Sciences (New York), **207**:4 (2015), 513–537. Zbl 1325.53037

[2] A. Gray, L.M. Hervella, *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, Ann. Mat. Pura Appl., **123**:4 (1980), 35–58. MR0581924

[3] L.V. Stepanova, *Quasi-Sasakian structures on hypersurfaces of Hermitian manifolds*, Nauchnye Trudy MPGU «V.I. Lenin», (1995), 187–191 (in Russian).

[4] L.V. Stepanova, M.B. Banaru, *On hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds*, Analele Stiintifice ale Universitatii «Al. I. Cuza». Iaşi, **47**:1 (2001), 65–70. MR1920199
[5] A. Abu-Saleem, G.A. Banaru, *On some contact metric structures on hypersurfaces in a Kählerian manifold*, Acta Universitatis Apulensis, **31** (2012), 179–189. MR3099449
[6] M.B. Banaru, *On almost contact metric 1-hypersurfaces in Kählerian manifolds*, Siberian Mathematical Journal, **55**:4 (2014), 585–588. MR3242590
[7] M.B. Banaru, *On almost contact metric 2-hypersurfaces in Kählerian manifolds*, Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series III. Mathematics, Informatics, Physics, **9**(58):1 (2016), 1–10. MR3528065
[8] L.V. Stepanova, G.A. Banaru, M.B. Banaru, *On quasi-Sasakian hypersurfaces of Kähler manifolds*, Russian mathematics, **60**:1 (2016), 73–75. MR3586665
[9] V.F. Kirichenko, Differential-geometric structures on manifolds, Odessa: Pechatnyi Dom, 2013 (in Russian).
[10] V.F. Kirichenko, A.R. Rustanov, *Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds*, Sbornik: Mathematics, **193**:8 (2002), 1173–1201. MR1934545
[11] A. Abu-Saleem, M.B. Banaru, *Some applications of Kirichenko tensors*, An. Univ. Oradea, Fasc. Mat., **17**:2 (2010), 201–208. MR2674468
[12] M.B. Banaru, *On the Gray–Hervella classes of AH-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra*, Annuaire de l'universite de Sofia «St. Kl. Ohridski». Math., **95** (2004), 125–131. MR2131513
[13] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Springer. Berlin–Heidelberg–New-York, 2003.
[14] L.V. Stepanova, *Contact geometry of hypersurfaces in quasi-Kählerian manifolds (PhD thesis)*, Moscow State Pedagogical University, 1995 (in Russian).
[15] D.E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lect. Notes Math., **509** (1976), 1–145. MR0467588
[16] M.B. Banaru, *On minimality of a Sasakian hypersurface in a W_3-manifold*, Saitama Mathematical Journal, **20** (2002), 1–7. MR1972495

Lidia Vasil'evna Stepanova
Russian Open Transport Academy,
ul. Chasovaya, 22/2
125993, Moskow, Russia
E-mail address: lide@yandex.ru

Mihail Borisovich Banaru
Smolensk State University,
ul. Przhevalskogo, 4
214000, Smolensk, Russia
E-mail address: mihail.banaru@yahoo.com

Galina Anatol'evna Banaru
Smolensk State University,
ul. Przhevalskogo, 4
214000, Smolensk, Russia
E-mail address: mihail.banaru@yahoo.com