S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 823–828 (2018) УДК 514.76
DOI 10.17377/semi.2018.15.069 MSC 53D15

КОНТАКТНЫЕ АНАЛОГИ ТОЖДЕСТВ ГРЕЯ ДЛЯ NC_{10}-МНОГООБРАЗИЙ

А.Р. РУСТАНОВ, О.Н.КАЗАКОВА, С.В.ХАРИТОНОВА

Abstract. We consider contact analogues of Gray identities for almost contact metric manifolds class NC_{10}. It is proved that every NC_{10}-manifold is a manifold of class CR_3. We obtain a local structure NC_{10}-manifolds class CR_1 and CR_2.

Keywords: a cosymplectic structure, exact cosymplectic manifold, Kähler manifold, Riemann-Christoffel tensor, identity Gray, NC_{10}-manifold.

1. Введение

В работе рассматриваются NC_{10}-многообразия, определение которых было введено в [1]. Данные многообразия обобщают почти контактные метрические многообразия класса C_{10} в классификации Чинья и Гонзалеза [2]. C_{10}-многообразия, в свою очередь, являются естественными обобщениями косимплектических многообразий и изучались А. Р. Рустановым в [3], [4]. Интерес к NC_{10}-многообразиям объясняется еще и тем, что они обобщают класс точнейше косимплектических многообразий, локальная характеризация которых приведена в [5].

Напомним некоторые сведения необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть M — гладкое многообразие, размерности 2n+1, $X(M)$ — C^∞-модуль гладких векторных полей на многообразии M. В дальнейшем, все многообразия, тензорные поля и т. п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Определение 1 ([5], [6])**.** *Почти контактной структурой на многообразии называется тройка (η, ξ, Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η —*

Rustanov, A.R., Kazakova, O.N., Kharitonova, S.V., Contact analogs of Gray's identity for NC_{10}-manifolds.

Поступила 15 февраля 2017 г., опубликована 1 августа 2018 г.

дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры, ξ — векторное поле, называемое характеристическим, Φ — эндоморфизм модуля $X(M)$, называемый структурным эндоморфизмом. При этом

$$(1) \qquad 1)\ \eta(\xi)=1;\quad 2)\ \eta\circ\Phi=0;\quad 3)\ \Phi(\xi)=0;\quad 4)\ \Phi^2=-id+\eta\otimes\xi.$$

Если, кроме того, на M фиксирована риманова структура $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ такая, что

$$(2) \qquad \langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y), X,Y\in X(M),$$

то четверка $(\eta,\xi,\Phi,g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется почти контактной метрической (короче, AC-) структурой.

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная (метрическая) структура, называется почти контактным метрическим (короче, AC-) многообразием.

Кососимметричный тензор $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle, X,Y\in X(M)$ называется фундаментальной формой AC-структуры [5], [6].

Пусть (η,ξ,Φ,g) – почти контактная метрическая структура на многообразии M^{2n+1}. В модуле $X(M)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $m=\eta\otimes\xi$ и $l=id-m=-\Phi^2$ [5], [6]; таким образом, $X(M)=L\oplus M$, где $L=Im(\Phi)=ker\eta$ – так называемое контактное распределение, $dimL=2n$, $M=Imm=ker(\Phi)=L(\xi)$ – линейная оболочка характеристического вектора (причем l и m являются проекторами на подмодули L,M соответственно).

Очевидно, распределения L и M инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны. Очевидно также, что $\tilde\Phi^2=-id$, $\left\langle\tilde\Phi X,\tilde\Phi Y\right\rangle=\langle X,Y\rangle$, $X,Y\in X(M)$, где $\tilde\Phi=\Phi|L$. Следовательно, $\{\tilde\Phi_p,g_p|L\}$ – эрмитова структура на пространстве L_p.

Комплексификация $X(M)^C$ модуля $X(M)$ распадается в прямую сумму $X(M)^C=D_\Phi^{\sqrt{-1}}\oplus D_\Phi^{-\sqrt{-1}}\oplus D_\Phi^0$ собственных подпространств структурного эндоморфизма Φ, отвечающих собственным значениям $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ и 0 соответственно. Причем проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут, соответственно, эндоморфизмы [6] $\pi=\sigma\circ l=-\frac{1}{2}(\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi)$, $\bar\pi=\bar\sigma\circ l=-\frac{1}{2}(-\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi)$, $m=id+\Phi^2$, где $\sigma=\frac{1}{2}(id-\sqrt{-1}\Phi)$, $\bar\sigma=\frac{1}{2}(id+\sqrt{-1}\Phi)$.

Отображения $\sigma_p:L_p\to D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ и $\bar\sigma_p:L_p\to D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$ являются соответственно изоморфизмом и антиизоморфизмом эрмитовых пространств. Поэтому к каждой точке $p\in M^{2n+1}$ можно присоединить семейство реперов пространства $T_p(M)^C$ вида $(p,\epsilon_0,\epsilon_1,\dots,\epsilon_n,\epsilon_{\hat 1},\dots,\epsilon_{\hat n})$, где $\epsilon_a=\sqrt{2}\sigma_p(e_a)$, $\epsilon_{\hat a}=\sqrt{2}\bar\sigma_p(e_a)$; $\epsilon_0=\xi_p$ где $\{e_a\}$ – ортонормированный базис эрмитова пространства L_p. Такой репер называется А-репером [6]. Легко видеть, что матрицы компонент тензоров Φ_p и g_p в А-репере имеют вид:

$$(3) \qquad (\Phi_i^j)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\sqrt{-1}I_n&0\\0&0&-\sqrt{-1}I_n\end{pmatrix},(g_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_n\\0&I_n&0\end{pmatrix},$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Хорошо известно [5], [6], что совокупность таких реперов определяет G-структуру на M со структурной группой

$\{1\} \times U(n)$, представленной матрицами вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$, где $A \in U(n)$. Эта G-структура называется присоединенной [5], [6].

2. NC_{10}-многообразия

Определение 2 ([1]). *AC-структура, характеризуемая тождеством*

$$\begin{aligned} &\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = \xi\nabla_X(\eta)\Phi Y + \xi\nabla_Y(\eta)\Phi X + \\ &+\eta(X)\nabla_{\Phi Y} + \eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi; X, Y \in X(M). \end{aligned} \tag{4}$$

называется NC_{10}-структурой. AC-многообразие, снабженное NC_{10}-структурой называется NC_{10}-многообразием.

Полная группа структурных уравнений NC_{10}-структуры на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} &1)\ d\omega = F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b; \\ &2)\ d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + F^{ab}\omega_b \wedge \omega; \\ &3)\ d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + F_{ab}\omega^b \wedge \omega; \\ &4)\ d\theta^a_b + \theta^a_c \wedge \theta^c_b = (A^{ad}_{bc} - 2C^{adh}C_{hbc} - F^{ad}F_{bc})\omega^c \wedge \omega_d, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}}; \quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c}; \quad C^{[abc]} = C^{abc}; \\ C_{[abc]} = C_{abc}; \quad \overline{C^{abc}} = C_{abc}; \quad F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}}; \quad F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b}; \\ F^{ab} + F^{ba} = 0; \quad F_{ab} + F_{ba} = 0; \quad \overline{F^{ab}} = F_{ab}; \\ A^{ad}_{[bc]} = A^{[ad]}_{bc} = 0; \quad F_{ad}C^{dbc} = F^{ad}C_{dbc} = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Кроме того, имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} &1)\ dF_{ab} - F_{cb}\theta^c_a - F_{ac}\theta^c_b = 0; \\ &2)\ dF^{ab} + F^{cb}\theta^a_c + F^{ac}\theta^b_c = 0; \\ &3)\ dC_{abc} - C_{dbc}\theta^d_a - C_{adc}\theta^d_b - C_{abd}\theta^d_c = C_{abcd}\omega^d; \\ &4)\ dC^{abc} + C^{dbc}\theta^a_d + C^{adc}\theta^b_d + C^{abd}\theta^d_c = C^{abcd}\omega_d, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$C_{a[bcd]} = F_{a[b}F_{cd]}, C^{a[bcd]} = F^{a[b}F^{cd]}. \tag{8}$$

Дифференцируя внешним образом вторую группу структурных уравнений (5_4), получим

$$dA^{ad}_{bc} + A^{hd}_{bc}\theta^a_h + A^{ah}_{bc}\theta^d_h - A^{ad}_{hc}\theta^h_b - A^{ad}_{bh}\theta^h_c = A^{ad}_{bch}\omega^h + A^{adh}_{bc}\omega_h, \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} A^{ad}_{b[ch]} = A^{a[dh]}_{bc} = 0, \quad A^{ad}_{b[c}C_{gf]d} = 2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d}, \quad A^{a[d}_{bc}C^{gf]c} = 2C^{ah[d}C_{hbc}C^{gf]c}, \\ A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]} = F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]}, \quad A^{a[d}_{bc}F^{|c|g]} = F^{a[d}F_{bc}F^{|c|g]}. \end{gathered} \tag{10}$$

Назовем тождество $F^{ad}C_{dbc} = 0$ первым фундаментальным тождеством NC_{10}-структуры; тождество $A^{ad}_{b[c}C_{gf]d} = 2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d}$ вторым фундаментальным тождеством; тождество $A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]} = F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]}$ третьим фундаментальным тождеством.

Следуя [5] тензор $C = \{C^i{}_{jk}\}$; $C^a{}_{\hat{b}\hat{c}} = C^{abc}$; $C^{\hat{a}}{}_{bc} = C_{abc}$; все прочие компоненты нулевые, назовем первым структурным тензором NC_{10}-структуры. Тензор $F = \{F^i{}_j\}$; $F^a{}_{\hat{b}} = F^{ab}$; $F^{\hat{a}}{}_b = F_{ab}$; все прочие компоненты нулевые, назовем вторым структурным тензоромNC_{10}-структуры.

Предложение 1 ([5]). *Структурные тензоры NC_{10}-структуры обладают следующими свойствами:*

$$1)\ \Phi \circ C(X,Y) = -C(\Phi X, Y) = -C(X, \Phi Y);$$
$$2)\ \langle\langle C(X,Y), Z\rangle\rangle + \langle\langle Y, C(\bar{X}, Z)\rangle\rangle = 0;$$
$$3)\ \Phi \circ F = -F \circ \Phi;$$
$$4)\ \langle F(X), Y\rangle = -\langle X, F(Y)\rangle;$$
$$5)\ \eta \circ F = 0;$$
$$6)\ F(\xi) = 0; \forall X, Y, Z \in X(M).$$

Предложение 2 ([1]). *. NC_{10}-структура является: 1) точнейше косимплектической тогда и только тогда, когда второй структурный тензор равен нулю, т.е. $F = 0$; 2) структурой класса C_{10} тогда и только тогда, когда первый структурный тензор равен нулю, т.е. $C^{abc} = C_{abc} = 0$; 3) косимплектической структурой тогда и только тогда, когда $C^{abc} = C_{abc} = 0, F^{ab} = F_{ab} = 0$.*

Предложение 3. *Существенные ненулевые компоненты тензора Римана-Кристоффеля на пространстве присоединенной G-структуры имеют вид* [1]*:*

$$\begin{aligned} &1)\ R^b_{00a} = F_{ac}F^{cb};\quad 2) R^a_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - C^{adh}C_{hbc};\\ &3)\ R^a_{\hat{b}cd} = 2C^{abh}C_{hcd};\quad 4) R^{\hat{a}}_{bcd} = C_{acdb} - F_{ab}F_{cd}. \end{aligned} \tag{11}$$

3. Контактные аналоги тождеств кривизны Грея

Наиболее интересные свойства проявляются, если почти контактную метрическую структуру многообразия дополнить некоторыми условиями. Рассмотрим контактные аналоги тожеств Грея на тензор римановой кривизны. Таковыми являются следующие тождества [7]:

$$\begin{aligned} &CR_1 : \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \left\langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W\right\rangle;\\ &CR_2 : \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \left\langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W\right\rangle +\\ &\quad + \left\langle R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi^2 Z, \Phi W\right\rangle + \left\langle R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi^2 W\right\rangle;\\ &CR_3 : \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \left\langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z, \Phi^2 W\right\rangle. \end{aligned} \tag{12}$$

На пространстве присоединенной G-структуры тождества $CR_1 - CR_3$ эквивалентны следующим равенствам [7]:

$$\begin{aligned} &CR_1 \Leftrightarrow R_{\hat{a}bcd} = R_{abcd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0;\\ &CR_2 \Leftrightarrow R_{\hat{a}bcd} = R_{abcd} = 0;\\ &CR_3 \Leftrightarrow R_{\hat{a}bcd} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Замечание. Согласно формулам (13) очевидны включения $CR_1 \subset CR_2 \subset CR_3$.

Определение 3. *NC_{10}-многообразия, тензор Римана — Кристоффеля которых удовлетворяет тождеству $CR_i (i = 1, 2, 3)$, называются NC_{10}-многообразиями класса $CR_i (i = 1, 2, 3)$.*

Теорема 1. *NC_{10}-многообразие является многообразием класса CR_3.*

Доказательство. Пусть $S = (\Phi, \xi, \eta, g)$ – NC_{10}-структура. Согласно тождествам (11) для неё верно $R_{\hat{a}bcd} = 0$. Это означает, что S – структура класса CR_3. □

Теорема 2. *Пусть $S = (\Phi, \xi, \eta, g)$ – NC_{10}-структура. S – структура класса CR_2 тогда и только тогда, когда второй структурный тензор тождественно равен нулю.*

Доказательство. Пусть $S = (\Phi, \xi, \eta, g)$ – NC_{10}-структура.Тогда согласно (13) S – структура класса CR_2 тогда и только тогда, когда $R_{\hat{a}bcd} = R_{abcd} = 0$, т.е. с учетом (11) $C_{acdb} = F_{ab}F_{cd}$. Полученное равенство свернем с объектом F^{bh}, тогда получим $C_{acdb}F^{bh} = F_{ab}F_{cd}F^{bh}$. Поскольку для NC_{10} – структуры имеет место тождество [1] $C_{acdb}F^{bh} = 0$, то $F_{ab}F_{cd}F^{bh} = 0$. Свернем полученное равенство по индексам a и h, тогда получим $F_{cd}F_{ab}F^{ab} = 0$, т.е. $F_{cd}\Sigma_{a,b}|F_{ab}|^2 = 0$. Отсюда следует, что $F_{ab} = 0$, т.е. второй структурный тензор равен нулю.

Обратно, пусть второй структурный тензор NC_{10}-структуры равен нулю, т.е. $F_{ab} = 0$. Тогда с учетом тождества $C_{a[bcd]} = F_{a[b}F_{cd]}$ и свойств первого структурного тензора имеем, что $C_{abcd} = 0$, т.е. $R_{\hat{a}bcd} = 0$. Таким образом, NC_{10}-структура S является структурой класса CR_2. □

Следствие 1. *Пусть $S = (\Phi, \xi, \eta, g)$ – NC_{10}-структура. Тогда S – структура класса CR_2 тогда и только тогда, когда первый структурный тензор параллелен в первой канонической связности.*

Следствие 2. *Пусть $S = (\Phi, \xi, \eta, g)$ – NC_{10}-структура. Тогда S – структура класса CR_2 тогда и только тогда, когда структура является точнейше косимплектической.*

Теорема 3. *NC_{10} – многообразие является многообразием класса CR_2 тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из следствия 2 к теореме 2 и следствия к теореме 3.1 [5]. □

Теорема 4. *NC_{10} – многообразие является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда структурные тензоры нулевые, т.е. когда оно является косимплектическим.*

Доказательство. Рассмотрим условия, при которых компоненты тензора Римана-Кристоффеля вида $R_{\hat{a}\hat{b}cd}$ равны нулю, т.е. $R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$. С учётом равенств (11) получаем, что это имеет место в том и только том случае, когда $C^{abh}C_{hcd} = 0$. Свернём это тождество по парам индексов a и c, b и d. Получим $C^{abc}C_{cba} = 0$. Так как C^{abc} и C_{cba} кососимметричны, то с учётом операции поднятия и опускания индексов получим, что $\Sigma_{a,b,c}|C_{abc}|^2 = 0$. Отсюда следует, что $C_{abc} = 0$, т.е. первый структурный тензор нулевой. И наоборот, равенство первого структурного тензора влечет равенство нулю компоненты $R_{\hat{a}\hat{b}cd}$. Как было доказано выше равенство $R_{\hat{a}bcd} = 0$ равносильно равенству нулю второго структурного тензора. □

Таким образом, NC_{10}-многообразие является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда структурные тензоры нулевые. Согласно предложению 1.2 NC_{10}-многообразие класса CR_1 является косимплектическим многообразием.

Поскольку косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую [5], предыдущую теорему можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5. *NC_{10}-многообразие является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда структурные тензоры нулевые, т.е. когда оно локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.*

References

[1] A. R. Rustanov, *Manifolds of class NC_{10}*, Prepodavatel XXI vek, **3** (2014), 209–218.
[2] D. Chinea, C.Gonzalez, *Classification of almost contact metric structures*, Annali di Matematica pura ed applicata (4), **156** (1990), 15–36. MR1080209
[3] A. R. Rustanov, *Curvature identities for almost contact metric manifolds of class C_{10}*, Prepodavatel XXI vek, **4** (2010), 199–207.
[4] A. R. Rustanov, *The properties of isotropy of the curvature tensor of almost contact metric manifolds of class C_{10}*, Prepodavatel XXI vek, **2** (2014), 207–213.
[5] V. F. Kirichenko, *Differential-geometric structures on manifolds* M.: MPSU, 2003.
[6] V. F. Kirichenko, A. R. Rustanov, *The geometry of quasi-Sasakian manifolds*, Sbornik Mathematics, **193**:8 (2002), 71–100. Zbl 1066.53130
[7] V. F. Kirichenko, E. V. Kusova, *On geometry of weakly cosymplectic manifolds*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, **16**:2 (2010), 33–42.

Aligadgi Rabadanovich Rustanov
Institute of Fundamental Education of the National Research,
Moscow State University of Civil Engineering,
Yaroslavskoe highway, 26,
129337, Moscow, Russia
E-mail address: aligadzhi@yandex.ru

Olga Nikolaevna Kazakova
Orenburg State University,
pr. Pobedy, 13,
460018, Orenburg, Russia
E-mail address: olnikka@yandex.ru

Svetlana Vladimirovna Kharitonova
Orenburg State University,
pr. Pobedy, 13,
460018, Orenburg, Russia
E-mail address: hcb@yandex.ru