

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 15, стр. 844–852 (2018)

УДК 519.165

DOI 10.17377/semi.2018.15.072

MSC 05A17

О КРАТЧАЙШИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В РЕШЕТКЕ РАЗБИЕНИЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В.А. БАРАНСКИЙ, Т.А. СЕНЬЧОНОК

ABSTRACT. A partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ is a sequence of non-negative integers (the parts) in non-increasing order $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ with a finite number of non-zero elements. A *weight* of λ is the sum of parts, denoted by $\text{sum}(\lambda)$. We define two types of elementary transformations of the partition lattice *NPL*. The first one is a box transference, the second one is a box destroying. Note that a partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ dominates a partition $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, denoted by $\lambda \geq \mu$, iff μ is obtained from λ by a finite sequence of elementary transformations.

Let λ and μ be two partitions such that $\lambda \geq \mu$. The *height* of λ over μ is the number of transformations in a shortest sequence of elementary transformations which transforms λ to μ , denoted by $\text{height}(\lambda, \mu)$. The aim is to prove that

$$\text{height}(\lambda, \mu) = \sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^{\infty} (\lambda_j - \mu_j) = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j - \mu_j|.$$

where $C = \text{sum}(\lambda) - \text{sum}(\mu)$. Also we found an algorithm that builds some useful shortest sequences of elementary transformations from λ to μ .

Keywords: integer partition, lattice, Ferrer's diagram.

Под графами мы будем понимать обыкновенные графы, т. е. графы без петель и кратных рёбер. Для графов будем придерживаться терминологии и обозначений из [1].

Разбиением [2] называется последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ целых неотрицательных чисел такая, что λ содержит лишь конечное число ненулевых

BARANSKY, V.A., SENCHONOK, T.A., ON THE SHORTEST SEQUENCES OF ELEMENTARY TRANSFORMATIONS IN THE PARTITION LATTICE.

© 2018 БАРАНСКИЙ В.А., СЕНЬЧОНОК Т.А.

Поступила 20 июня 2018 г., опубликована 14 августа 2018 г.

компонент, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = m$, где m — натуральное число. Говорят, что λ является разбиением числа m , а m называют *весом* разбиения λ , также пишут $m = \text{sum}(\lambda)$. Натуральное число $l = l(\lambda)$ такое, что $\lambda_l > 0$ и $\lambda_{l+1} = \lambda_{l+2} = \dots = 0$, называют *длиной* разбиения λ . Для удобства разбиение λ будем иногда записывать в виде конечной последовательности следующих типов:

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{t+1}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{t+2}) = \dots,$$

где $t = l(\lambda)$, т. е. будем опускать нули, начиная с некоторой компоненты, но при этом будем помнить, что рассматривается бесконечная последовательность.

Через NPL будем обозначать множество всех разбиений всех натуральных чисел, а через $NPL(m)$ — множество всех разбиений заданного натурального числа m . На множествах NPL и $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, будем рассматривать известное *отношение доминирования* \leq [3], полагая $\lambda \leq \mu$, если

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \mu_1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &\leq \mu_1 + \mu_2, \\ &\dots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i &\leq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i, \\ &\dots \end{aligned}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$.

Разбиение удобно изображать в виде его диаграммы Ферре, которую можно представлять себе как конечный набор квадратных *блоков* одинакового размера, составляющих “ступенчатую” фигуру. Например, на рис. 1 представлена диаграмма Ферре разбиения $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ длины 8 и веса 26.

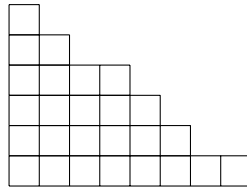


Рис. 1

Определим *элементарные преобразования* разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ (см. [3]–[5]).

Пусть для натуральных чисел $i, j \in \{1, \dots, t\}$ таких, что $i < j \leq t = l(\lambda) + 1$, выполняются условия:

- 1) $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$,
- 2) $\lambda_{j-1} \geq \lambda_j + 1$,
- 3) $\lambda_i \geq 2 + \lambda_j$.

Будем говорить, что разбиение $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_t)$ получено из разбиения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_t)$ *элементарным преобразованием первого типа* (или *перекидыванием блока*, см. рис. 2). Отметим, что μ отличается от λ точно на двух компонентах с номерами i и j . Для диаграммы Ферре разбиения λ такое преобразование означает перемещение верхнего блока из

i -го столбца вправо на верх j -го столбца. Условия 1) и 2) гарантируют, что после такого перемещения снова получится разбиение. Очевидно, элементарные преобразования первого типа сохраняют вес разбиения.

Пусть для некоторого числа i такого, что $1 \leq i \leq l(\lambda)$ выполняется условие $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$. Преобразование, заменяющее разбиение λ на разбиение $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots)$, будем называть *элементарным преобразованием второго типа* (или *удалением блока*, см. рис. 2). Очевидно, удаление блока уменьшает вес разбиения на 1.

Если разбиение μ получено из разбиения λ с помощью элементарного преобразования первого или второго типа, то кратко будем писать $\lambda \rightarrow \mu$.

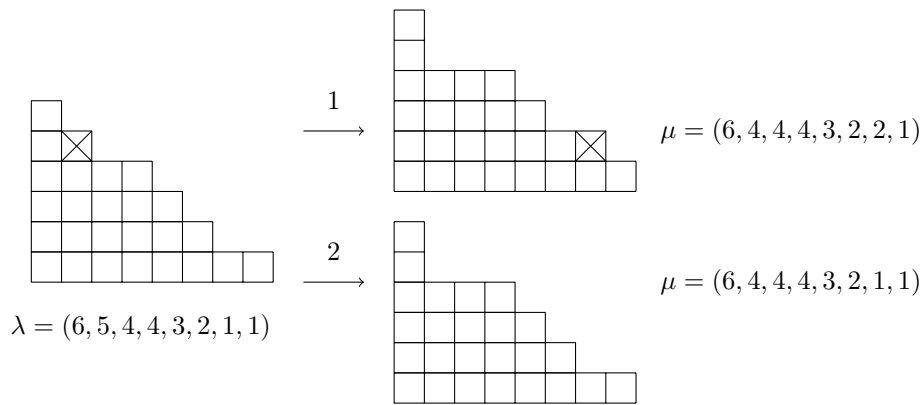


Рис. 2

На множествах NPL и $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, определим отношение \geq , полагая $\lambda \geq \mu$, если разбиение μ можно получить из разбиения λ с помощью последовательного применения конечного числа (возможно нулевого) элементарных преобразований указанных типов. Ясно, что в случае множеств $NPL(m)$ можно использовать только элементарные преобразования первого типа, которые не меняют веса разбиений. В [4] и [5] показано, что отношения \leq и \leq совпадают на каждом из рассматриваемых множеств.

Отметим, что множества $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, и NPL (см. [6] и [3]–[5]) являются решётками относительно \leq . В [5] показано, что решётка NPL является дизъюнктивным объединением решёток $NPL(m)$, где m пробегает \mathbb{N} , отвечающим некоторой естественной транзитивной системе вложений. В [4] и [5] указаны алгоритмы вычисления пересечения \wedge и объединения \vee в указанных решётках.

Пусть λ и μ — два произвольных разбиения и $\lambda \geq \mu$, т. е. λ и μ сравнимы. *Высотой* $\text{height}(\lambda, \mu)$ разбиения λ над разбиением μ будем называть число преобразований в кратчайшей последовательности элементарных преобразований (любых типов), преобразующей λ в μ .

Основная цель данной работы состоит в построении алгоритма (см. Алгоритм 1), который для двух произвольных разбиений λ и μ таких, что $\lambda \geq \mu$, находит некоторые кратчайшие последовательности элементарных преобразований от λ до μ , удобные для применения. Кроме того, мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\lambda \geq \mu$ в NPL и $C = \text{sum}(\lambda) - \text{sum}(\mu)$. Тогда

$$\text{height}(\lambda, \mu) = \sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^{\infty} (\lambda_j - \mu_j) = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j - \mu_j|.$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ и $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ — два произвольных разбиения, где t — максимальная из длин λ и μ .

Заметим, что если $\lambda \geq \mu$, то $\text{sum}(\lambda) \geq \text{sum}(\mu)$ и число $C = \text{sum}(\lambda) - \text{sum}(\mu)$ является целым и неотрицательным.

Условие $\lambda \geq \mu$ по определению задаётся системой неравенств

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k \geq \mu_1 + \dots + \mu_k \quad (k = 1, \dots, t).$$

Эту систему неравенств перепишем в следующей эквивалентной форме:

$$\sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^k (\lambda_j - \mu_j) \geq \sum_{j=1, \lambda_j < \mu_j}^k (\mu_j - \lambda_j) \quad (k = 1, \dots, t). \quad (1)$$

(Здесь и в дальнейшем в случае, когда условию суммирования не удовлетворяет ни один индекс, будем считать, что соответствующая сумма равна 0.)

Условие $\lambda \geq \mu$ можно задать также следующей системой:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_t = \mu_1 + \dots + \mu_t + C, \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} \geq \mu_1 + \dots + \mu_{k-1} \quad (k = 2, \dots, t), \end{cases}$$

где C — некоторое неотрицательное целое число. Поскольку для любого $k = 2, \dots, t$ выполняется

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} + \lambda_k + \dots + \lambda_t = \mu_1 + \dots + \mu_{k-1} + \mu_k + \dots + \mu_t + C,$$

последняя из рассмотренных систем эквивалентна системе:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_t = \mu_1 + \dots + \mu_t + C, \\ \lambda_k + \dots + \lambda_t \leq \mu_k + \dots + \mu_t + C \quad (k = 2, \dots, t). \end{cases}$$

Полученную систему перепишем в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^t (\lambda_j - \mu_j) = \sum_{j=1, \lambda_j < \mu_j}^t (\mu_j - \lambda_j) + C, & (2) \\ \sum_{j=k, \lambda_j > \mu_j}^t (\lambda_j - \mu_j) \leq \sum_{j=k, \lambda_j < \mu_j}^t (\mu_j - \lambda_j) + C \quad (k = 2, \dots, t). & (3) \end{cases}$$

Для $j = 1, 2, \dots, t$ будем говорить, что j -компонента разбиения λ имеет j -горку (или просто горку) относительно разбиения μ , если $\lambda_j > \mu_j$. В случае, когда выполняется условие $\lambda_j > \mu_j$, будем считать, что верхние $\lambda_j - \mu_j$ блоков j -столбца диаграммы Ферре разбиения λ образуют j -горку высоты $\lambda_j - \mu_j$.

Для $j = 1, 2, \dots, t$ будем говорить, что j -компонента разбиения λ имеет j -ямку (или просто ямку) относительно разбиения μ , если $\lambda_j < \mu_j$. В случае, когда выполняется условие $\lambda_j < \mu_j$, будем считать, что над j -столбцом диаграммы Ферре разбиения λ имеется j -ямка глубины $\mu_j - \lambda_j$.

Отметим, что условие $\lambda_j = \mu_j$ равносильно тому, что в j -столбце разбиения λ нет j -горки и нет j -ямки.

Условия (1) можно переформулировать в следующем виде: для любого $k = 1, \dots, t$ сумма высот всех j -горок, таких, что $1 \leq j \leq k$, больше или равна сумме глубин всех j -ямок таких, что $1 \leq j \leq k$.

Условия (2) и (3) можно переформулировать соответственно в следующем виде:

- сумма высот всех горок равна сумме числа C и суммы глубин всех ямок,
- для любого $k = 2, \dots, t$ сумма высот всех j -горок таких, что $j \geq k$, не превосходит суммы числа C и суммы глубин всех j -ямок таких, что $j \geq k$,

где C — некоторое целое неотрицательное число.

Предположим теперь, что $\lambda \geq \mu$.

Пусть λ имеет i -ямку для некоторого $i \in \{1, \dots, t\}$ относительно разбиения μ . Тогда в силу условий (1) существует ближайшая к ней слева (по диаграмме Ферре) i' -горка такая, что $1 \leq i' < i$. Тогда между i' -горкой и i -ямкой нет горок (т.е. s -горок таких, что $i' < s < i$).

Заметим, что $\lambda_{i'} > \mu_{i'} \geq \mu_{i'+1} \geq \lambda_{i'+1}$, т.е. $\lambda_{i'} > \lambda_{i'+1}$ (будем говорить, что в i' -столбце диаграммы Ферре разбиения λ имеется *уступ*). Кроме того, $\lambda_{i'} > \mu_{i'} \geq \mu_i > \lambda_i$, поэтому $\lambda_{i'} \geq 2 + \lambda_i$.

Будем говорить, что i -ямка *допустима*, если $\lambda_{i-1} > \lambda_i$. Очевидно, что ближайшая справа к i' -горке ямка допустима. Действительно, пусть такая ямка расположена в k -столбце. Тогда $\lambda_{k-1} \geq \mu_{k-1} \geq \mu_k > \lambda_k$, т.е. $\lambda_{k-1} > \lambda_k$.

Таким образом, если имеется хотя бы одна ямка, то имеется и допустимая ямка.

Пусть рассматриваемая i -ямка допустима. Тогда к разбиению λ можно применить (i', i) -перекидывание блока, т.е. перекидывание верхнего блока i' -столбца на верх i -столбца. Полученное таким перекидыванием разбиение обозначим через λ' . Указанное преобразование будем называть *перекидыванием верхнего блока в допустимую ямку из ближайшей к ней слева горки*.

Отметим, что для полученного разбиения λ' сохраняются условия (1), т.е. $\lambda' \geq \mu$. Действительно, если $k < i'$, то соответствующее k условие из (1) для λ совпадает с соответствующим k условием для λ' ; в случае $k \geq i$ из левой и правой части соответствующего k условия (1) вычитается по 1. Предположим теперь, что $i' \leq k < i$. Тогда

$$\sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^k (\lambda_j - \mu_j) = \sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^i (\lambda_j - \mu_j) \geq \sum_{j=1, \lambda_j < \mu_j}^i (\mu_j - \lambda_j) > \sum_{j=1, \lambda_j < \mu_j}^k (\mu_j - \lambda_j),$$

т.е. соответствующее числу k условие из (1) является для разбиения λ строгим неравенством. при переходе к разбиению λ' левая часть неравенства уменьшается на 1, а правая — не изменяется, поэтому при переходе к λ' неравенство сохранится, но может стать нестрогим.

Таким образом, если λ' получено из λ с помощью перекидывания верхнего блока в допустимую ямку из ближайшей к ней слева горки, то $\lambda' \geq \mu$.

Рассмотрим теперь последнюю горку разбиения λ относительно разбиения μ , т.е. i -горку с наибольшим значением индекса i . Тогда $\lambda_i > \mu_i \geq \mu_{i+1} \geq \lambda_{i+1}$, т.е. в i -столбце имеется уступ. Поэтому при $C > 0$ к λ можно применить элементарное преобразование второго типа, состоящее в удалении верхнего блока

из i -столбца диаграммы Ферре разбиения λ . Будем называть такое преобразование *удалением верхнего блока из последнего горки*. Ясно, что для полученного разбиения λ' выполняется $\text{sum}(\lambda') - \text{sum}(\mu) = C - 1$ и для λ' сохраняются условия вида (2) и (3), т. е. $\lambda' \geq \mu$.

Таким образом, если разбиение λ' получено из разбиения λ с помощью удаления верхнего блока из последней горки, то $\lambda' \geq \mu$.

Следующий алгоритм строит некоторые кратчайшие последовательности длины $\text{height}(\lambda, \mu)$ элементарных преобразований от λ до μ в случае, когда $\lambda \geq \mu$.

Алгоритм 1. Пусть $\lambda \geq \mu$ и $C = \text{sum}(\lambda) - \text{sum}(\mu)$.

- 1) Полагаем $\lambda' = \lambda$ и $C' = C$.
- 2) К текущим значениям разбиения λ' и числа C' применяем любое из следующих возможных элементарных преобразований:
 - если λ' имеет ямку, то заменяем λ' на разбиение, полученное из λ' с помощью перекидывания верхнего блока в некоторую допустимую ямку из ближайшей к ней слева горки;
 - если $C' > 0$, то заменяем C' на $C' - 1$, а разбиение λ' — на разбиение, полученное из λ' с помощью удаления верхнего блока из последней горки.
- 3) Выполняем 2) до тех пор, пока это возможно. Процесс обязательно завершится. Выполненные преобразования составят кратчайшую последовательность элементарных преобразований от λ до μ .

Доказательство корректности алгоритма. В силу сделанных ранее замечаний справедливы следующие утверждения:

- если у текущего разбиения λ' имеется ямка, то имеется и допустимая ямка;
- при каждом выполнении (2) сумма высот всех горок уменьшается точно на 1;
- для каждого очередного значения разбиения λ' выполняется $\lambda' \geq \mu$.

В силу этих утверждений и условия (2) на шаге выполнения 2) с номером

$$\sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^{\infty} (\lambda_j - \mu_j) \quad (4)$$

у полученного разбиения λ' не будет горок, не будет ямок и будет выполняться равенство $C' = 0$, поэтому будет выполняться равенство $\lambda' = \mu$. Отметим, что число (4) равно сумме высот всех горок разбиения λ и оно же в силу условия (2) равно сумме числа C и суммы глубин всех ямок разбиения λ .

С другой стороны, если некоторая последовательность элементарных преобразований преобразует λ в μ , то каждый блок, содержащийся в какой-либо из горок, обязательно должен быть перемещён (перекинут или удалён). Поэтому число элементарных преобразований в такой последовательности не меньше суммы высот всех горок. \square

Докажем теперь Теорему 1. Поскольку

$$\sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^{\infty} (\lambda_j - \mu_j) = C + \sum_{j=1, \lambda_j < \mu_j}^{\infty} (\mu_j - \lambda_j),$$

REFERENCES

- [1] M.O. Asanov, V.A. Baransky, V.V. Rasin, *Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy*, SPb: Lan', 2010. [In Russian]
- [2] G.E. Andrews, *The theory of partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976. MR1634067
- [3] V.A. Baransky, T.A. Koroleva, *The lattice of partitions of a positive integer*, Doklady Math., **77(1)** (2008), 72–75. MR2479430
- [4] V.A. Baransky, T.A. Koroleva, T.A. Senchonok, *O reshetke razbieniy natural'nogo chisla*, Trudy Instituta matematiki i mehaniki UrO PAN, **21(3)** (2015), 30–36. [In Russian] MR3468086
- [5] V.A. Baransky, T.A. Koroleva, T.A. Senchonok, *On the partition lattice of all integers*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 744–753. MR3553165
- [6] T. Brylawski, *The lattice of integer partitions*, Discrete Math, **6** (1973), 210–219. MR0325405

VITALY ANATOLIEVICH BARANSKY
URAL FEDERAL UNIVERSITY,
PR. LENINA, 51,
620083, EKATERINBURG, RUSSIA
E-mail address: vitaly.baransky@urfu.ru

TATIANA ALEXANDROVNA SENCHONOK
URAL FEDERAL UNIVERSITY,
PR. LENINA, 51,
620083, EKATERINBURG, RUSSIA
E-mail address: tatiana.senchonok@urfu.ru