S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 86–91 (2018) УДК 512.54
DOI 10.17377/semi.2018.15.010 MSC 20D05, 20E28

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЧЕТЫРЬМЯ КЛАССАМИ СОПРЯЖЕННЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП. II

В. А. БЕЛОНОГОВ

Abstract. In this work we continue investigate the finite groups, having exactly four conjugate classes of maximal subgroups. The groups with this property we call $4M$-groups. The investigation of such groups was started in the part I where the simple $4M$-groups and as well nonsimple nonsolvable $4M$-groups without normal maximal subgroups were completely described. In the present part II we begin study the remaining case, in which a nonsolvable $4M$-group has a normal maximal subgroup. Here the early results of the author on the structure of the finite groups with exactly three conjugate classes of maximal subgroups and the results of G. Pazderski on the structure of the finite groups with exactly two conjugate classes of maximal subgroups are used.

Keywords: finite group, nonsolvable group, conjugate classes of maximal subgroups, $4M$-groups.

Введение

В настоящей статье продолжается изучение конечных групп, имеющих небольшое число классов сопряжённых максимальных подгрупп.

Определение 1. *Группа, имеющая точно n классов сопряжённых максимальных подгрупп (n — натуральное число), называется nM-группой.*

Понятно, что конечные $1M$-группы — это примарные циклические группы. Конечные $2M$-группы были описаны в 1964 г. Г. Паздерским в [1], где, в

Belonogov, V.A., The finite groups with exactly four conjugate classes of maximal subgroups. II.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы «Современные проблемы алгебры и комбинаторики» (госбюджетный проект 0387-2015-0060).

Поступила 10 декабря 2017 г., опубликована 7 февраля 2018 г.

частности, установлено, что порядок любой такой группы является произведением степеней двух различных простых чисел и, следовательно, конечные $2M$-группы разрешимы. Описание конечных $3M$-групп, разрешимых и неразрешимых, было получено автором в 1986 г. в [2].

Таким образом, ввиду работ [1] и [2] *конечные nM-группы при $n \leq 3$ известны.*

Изучение конечных $4M$-групп начато в первой части настоящей работы [3, теоремы 1, 2]. В настоящей, второй части, мы продолжаем исследование таких групп. Прежде, чем сформулировать основной результат (теорему 3 ниже), приведём результаты работ [2] и [3].

Используемые в статье обозначения объясняются ниже в конце введения.

Предложение 1 ([2, теорема 1]). *Конечная неразрешимая группа G является $3M$-группой если и только если $G/\Phi(G)$ есть простая группа, изоморфная $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$, где r — простое число.*

Теорема 1 ([3, теорема 1]). *Конечная простая группа G является $4M$-группой если и только если выполнено одно из следующих условий:*

(1) $G \cong PSL_2(11)$;

(2) $G \cong PSL_2(p)$, *где p — простое число, $p > 3$ и $p \equiv \pm 3, \pm 13 \pmod{40}$;*

(3) $G \cong PSL_2(p^{r^m})$, *где p, r — простые числа, $r > 2$ при $p > 2$, $m \in \mathbb{N}$ и $pm > 2$;*

(4) $G \cong PSL_3(3)$;

(5) $G \cong PSU_3(q)$, *где $q = 3$ или $q = 2^{2^m}$, где $m \in \mathbb{N}$;*

(6) $G \cong Sz(2^r)$, *где r — простое число ($r > 2$).*

Теорема 2 ([3, теорема 2]). *Пусть G — конечная непростая группа без нормальных подгрупп простого индекса. Равносильны следующие утверждения:*

(1) *G — $4M$-группа и $\Phi(G) = 1$;*

(2) *$G = P \rtimes M$, где P — минимальная нормальная p-подгруппа в G при некотором простом p, $M/\Phi(M)$ изоморфна $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$ при некотором простом r, $M_G = 1$ и любое дополнение к P в G сопряжено в G с M.*

Таким образом, в работе [3] *описано строение конечных $4M$-групп, совпадающих со своим коммутантом.*

В настоящей, второй, части работы продолжается изучение $4M$-групп, начатое в [3]. Здесь наша цель — доказать следующий результат. (Мы продолжаем нумерацию теорем, начатую в первой статье этой серии.)

Теорема 3. *Пусть G — конечная неразрешимая группа, имеющая нормальную подгруппу простого индекса p. Предположим, что G есть $4M$-группа и $\Phi(G) = 1$. Тогда выполнено одно из следующих условий:*

(1) *$G = P \times L$, где $|P| = p$ и L изоморфна $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$, где r — простое число;*

(2) *G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K, причём $K = L_1 \times \cdots \times L_t$, где $L_1, \ldots, L_t$ — изоморфные простые неабелевы группы, t делит $|G/K|$ и G/K есть разрешимая группа с не более чем 2-я классами сопряжённых максимальных подгрупп.*

Группы типа (1), очевидно, удовлетворяют условию теоремы: здесь G есть $4M$-группа и $\Phi(G) = 1$ (достаточно применить предложение 1). Группы же типа (2) требуют дополнительного исследования, и такое исследование будет предпринято автором в следующей работе. (Понятно, что группа G/K в пункте (2) теоремы 3 имеет нормальную подгруппу индекса p.)

Сформулируем теперь ещё один результат из [2], который необходим нам для доказательства основной теоремы этой статьи.

Предложение 2 ([2, теорема 2])**.** *Конечная группа, имеющая не более двух классов сопряжённых ненормальных максимальных подгрупп, разрешима.*

Заметим, что предложения 1 и 2 доказаны с помощью классификации конечных простых групп [4], а потому и доказанная с их помощью теорема 3 также зависит от этой классификации.

Используемые в статье о б о з н а ч е н и я, в основном, стандартны (см., например, [5, 6, 7]). $\mathbb{N}$ есть множество всех натуральных чисел. Через Z_n, E_n и D_n обозначаются соответственно циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка n. Если H — подгруппа группы G, то $\{H\}^G$ есть класс сопряжённых подгрупп группы G, содержащий подгруппу H, и H_G — пересечение всех подгрупп группы G, сопряжённых с H в G (*ядро* H в G). $m(G)$ обозначает число классов сопряжённых максимальных подгрупп группы G. Классы сопряжённых максимальных подгрупп мы будем называть также просто *классами максимальных подгрупп.*

Используются также следующие, несколько видоизменённые, обозначения из Атласа конечных групп [8, с. XX]. Запись $G \doteq A.B$ (читается "G имеет тип $A.B$" или "G есть группа типа $A.B$") означает, что группа G имеет нормальную подгруппу, изоморфную A, фактор-группа по которой изоморфна B (т. е. G есть расширение A с помощью B). В случае расщепляемого расширения вместо точки может быть использован знак $\leftthreetimes$ (в частности, в настоящей статье) или знак : (в Атласе [8] и ряде других работ).

Следует учитывать условность принятых в теории групп [5, 6, 7] выражений "максимальная (нормальная) подгруппа" и "минимальная (нормальная) подгруппа", в которых под словом "подгруппа" следует понимать "собственная подгруппа".

1. Доказательство теоремы

Пусть G — конечная неразрешимая группа, имеющая нормальную подгруппу N простого индекса p.

Предположим, что G есть $4M$-группа и $\Phi(G) = 1$. Мы должны показать, что выполнено одно из условий (1) и (2) теоремы.

Пусть k — число нормальных максимальных подгрупп в G и, следовательно, $4-k$ — число классов ненормальных максимальных подгрупп в G. Если $4-k \leq 2$, то согласно предложению 2 группа G разрешима. Поскольку по условию группа G неразрешима, то $4-k \geq 3$ и, следовательно, $k = 1$. Итак,

G имеет точно одну нормальную максимальную подгруппу N (индекса p) и точно три класса $\{M_1\}^G$, $\{M_2\}^G$, $\{M_3\}^G$ ненормальных максимальных подгрупп, причём подгруппа N — неразрешима.

Пусть $N_i := (M_i)_G$ — ядро подгруппы M_i в G ($i \in \{1,2,3\}$). Тогда $\Phi(G) = N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N$ и любая собственная нормальная подгруппа группы G содержится в одной из подгрупп N_1, N_2, N_3, N. Понятно также, что $N_i \neq N$ при

$i \in \{1,2,3\}$. Кроме того, $G \doteq N.Z_p$ и при любом $i \in \{1,2,3\}$ $G = M_iN$ и $M_i \doteq (M_i \cap N).Z_p$.

Случай 1. Предположим, что G имеет максимальную нормальную собственную подгруппу K, отличную от N.

Тогда $K = N_i$ для некоторого i; пусть, например, $K = N_1$.

Далее, $G = KN$, $K \doteq (K \cap N).Z_p$ и, положив $\overline{G} := G/(K \cap N)$, имеем

(1.1) $\overline{G} = \overline{K} \times \overline{N}$, где $\overline{K} = K/(K \cap N) \cong Z_p$ и $\overline{N} = N/(K \cap N)$,

а так как K и N — максимальные нормальные собственные подгруппы группы G, то

(1.2) $\overline{K}$ и $\overline{N}$ — минимальные нормальные собственные подгруппы в $\overline{G}$, причём $\overline{K} \cong Z_p$ и $\overline{N} = L$ — простая группа.

Если группа $\overline{G}$ разрешима, то $\overline{G} = \overline{K} \times \overline{N}$ — абелева группа, а тогда $K \cap N \supseteq G'$ и, следовательно, $K = N_1 = M_1 \trianglelefteq G$, что противоречиво.

Следовательно, *группа $\overline{G}$ неразрешима* и ввиду результата Г. Паздерского [1, теорема 6] число $m = m(\overline{G})$ классов сопряжённых максимальных подгрупп в $\overline{G}$ должно быть ≥ 3, т. е. $m \in \{3,4\}$.

1а. Пусть $m = 3$ (значит, $K \cap N \nsubseteq \Phi(G)$). Тогда по предложению 1

(1.3) $\overline{G}/\Phi(\overline{G})$ изоморфна $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$, где r — простое число.

Но согласно утверждениям (1.1) и (1.2) выше, $\overline{G} = \overline{K} \times \overline{N} \cong Z_p \times L$, где L — простая неабелева группа. А отсюда следует, что $\overline{K} \nsubseteq \Phi(\overline{G})$ и, значит, $\overline{G}/\Phi(\overline{G})$ содержит нормальную подгруппу $\overline{K}/\Phi(\overline{G})$ порядка p, что противоречит утверждению (1.3). Следовательно, случай $m = 3$ противоречив.

1б. Пусть $m = 4$. Тогда $K \cap N \subseteq \Phi(G) = 1$ и для $G = \overline{G}$ должны быть выполнены условия (1.1) и (1.2) выше, т. е.

$G = K \times N$, $K \cong Z_p$ и N — простая неабелева группа.

Понятно, что группа G должна иметь точно 3 класса максимальных подгрупп, содержащих K, и, следовательно, подгруппа N должна иметь точно 3 класса максимальных подгрупп. Тогда согласно предложению 1 N изоморфна $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$, где r — простое число.

Таким образом, в случае 1 выполнено (при $P = K$ и $L = N$) условие (1) теоремы 3.

Теперь мы рассмотрим ситуацию, противоположную ситуации, рассмотренной в случае 1.

Случай 2. Предположим, что каждая собственная нормальная подгруппа группы G содержится в N.

Тогда, в частности, $N_i < N$ при всех $i \in \{1,2,3\}$ и $N_1 \cap N_2 \cap N_3 = \Phi(G) = 1$.

Пусть K — произвольная минимальная нормальная подгруппа в G ($K \leq N$). Так как $K > 1 = \Phi(G)$ и, следовательно, K не содержится в некоторой максимальной подгруппе группы G, то число $m = m(G/K)$ классов максимальных подгрупп в G/K меньше 4-х, Покажем, что при любом $m \in \{1,2,3\}$ группа G/K разрешима.

При $m = 1$, очевидно, выполнено утверждение (2) теоремы 3.

При $m = 2$ согласно результату Г. Паздерского [1, теорема 6] группа G/K бипримарна и снова выполнено утверждение (2) теоремы 3.

Пусть, наконец, $m = 3$, т. е группа $\overline{G} = G/K$ имеет точно 3 класса максимальных подгрупп. Тогда группа G имеет точно 3 класса максимальных подгрупп, содержащих K (включая N), и один класс, скажем $\{M_3\}^G$, максимальных подгрупп, не содержащих K. Пусть r — произвольное число из $\pi(K)$ и $R \in Syl_r(K)$. По аргументу Фраттини ([6, теор. 1.3.7]) $G = KN_G(R)$ и, следовательно, $N_G(R)$ содержится в некоторой максимальной подгруппе группы G, не содержащей K. Значит, $N_G(R) \subseteq M_3^g$ при некотором $g \in G$ и тогда $M_3 \supseteq N_G(R)^{g^{-1}} \supseteq R^{g^{-1}}$. Таким образом, M_3 содержит некоторую силовскую r-подгруппу из K при любом $r \in \pi(K)$. Но тогда M_3 должно содержать K, что противоречиво. Следовательно, $m \neq 3$.

Таким образом, $m \in \{1, 2\}$ и, как показано выше, G/K разрешима. Поскольку по условию группа G неразрешима, то K неразрешима и, следовательно,

$K = L_1 \times \cdots \times L_t$ — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп, где $t \geq 1$.

Итак, мы показали, что каждая минимальная собственная нормальная подгруппа группы G неразрешима. Отсюда и из разрешимости фактор-группы G/K следует, что K — единственная минимальная собственная нормальная подгруппа в G.

Согласно [7, теор. I.9.12] единственными нееденичными нормальными погруппами в группе K являются подгруппы вида $\times_{j \in J} L_j$, где $J \subseteq \{1, \ldots, t\}$. В частности, $L_1, \ldots, L_t$ — единственные минимальные собственные нормальные подгруппы в K. Поскольку K — минимальная собственная нормальная подгруппа в G, то подгруппы $L_1, \ldots, L_t$ образуют один класс сопряжённых подгрупп в G, т. е. $\{L_1\}^G = \{L_1, \ldots, L_t\}$ и, следовательно, $t = |G : N_G(L_1)|$. Так как $N_G(L_1) \geq K$, то t делит $|G/K|$.

Заметим также, что G/K имеет нормальную подгруппу N/K индекса p.

Итак, в случае 2 выполнено условие (2) теоремы.

Теорема 3 доказана.

Как легко заметить, из теорем 2 и 3 вытекает, что группы G типа (1) теоремы 3 могут быть охарактеризованы

как конечные неразрешимые $4M$-группы G с $\Phi(G) = 1$, имеющие более одной минимальной нормальной подгруппы, а также —

как конечные неразрешимые $4M$-группы G с $\Phi(G) = 1$, имеющие более одной максимальной нормальной подгруппы.

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа, для которой выполнено утверждение* (2) *теоремы* 3. *Тогда G изоморфна подгруппе из $Aut(K)$ и G/K изоморфна подгруппе из $Out(K) = Aut(K)/Inn(K)$.*

Доказательство. Так как K — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $C_G(K) = 1$. Поэтому отображение α из G в группу $Aut(K)$, сопоставляющее элементу g группы G автоморфизм подгруппы K, вызванный сопряжением её элементом g, имеет единичное ядро ($Ker\alpha = 1$) и, значит, есть изоморфное вложение G в $Aut(K)$: $G \cong \alpha(G) \leq Aut(K)$. Понятно также, что α отображает K на $Inn(K)$. Итак, $Aut(K) \geq \alpha(G) \geq \alpha(K) = Inn(K)$, $Aut(K)/Inn(K) \geq \alpha(G)/Inn(K) \geq \alpha(G)/\alpha(K) \cong G/K$.

Лемма 1 доказана. □

Замечание. Если $K = L_1 \times \cdots \times L_t$, где $L_1, \ldots, L_t$ — изоморфные простые неабелевы группы, как в п. (2) теоремы 3, то, как легко увидеть,
$Aut(K) \cong (Aut(L_1) \times \cdots \times Aut(L_t)) \leftthreetimes S_t$.

References

[1] G. Pazderski, *Über maximal Untergruppen endlicher gruppen,* Math. Nachr., **26**:6 (1964), 307–319. Zbl 0126.05203

[2] V. A. Belonogov, *Finite groups with three classes of maximal subgroups*, Math. USSR-Sb., **59**:1 (1988), 223–236. MR0865936

[3] V. A. Belonogov, *Finite groups with four classes of maximal subgroups. I*, Tr. Inst. mat. mech. UrO RAN, **23**:4 (2017), 52–62.

[4] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, *The classification of the finite simple groups,* Math. Surveys and Monographs, 40.1. AMS, 1994. MR1303592

[5] M. Hall, *Group theory*, M.: Izd. inostr. lit., 1962. Zbl 0103.25502

[6] D. Gorenstein, *Finite Groups*, New York–London: Harper & Row, 1968. MR0231903

[7] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Berlin: Springer, 1967. MR0224703

[8] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norten, R.A. Parker, R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford: Oxford University Press, 1985. MR0827219

Vyacheslav Alexandrovich Belonogov
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
S.Kovalevskaya str., 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
E-mail address: belonogov@imm.uran.ru