S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 863–881 (2018) УДК 517.53

DOI 10.17377/semi.2018.15.074 MSC 30E05

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

А.Г. ЛИПЧИНСКИЙ, В.Н. СТОЛБОВ

Abstract. We consider an interpolation process for a class of functions having a finite number of singular points, using rational functions the poles of which coincide with the singular points of the interpolated function. Interpolation points form a triangular matrix where there is at least about one special point of the interpolated function having the limit of the ratio of the difference between the number of nodes of the n-th row associated with a singular point, and the corresponding n fraction multiplicity pole at this point to when n is different from zero. The necessary and sufficient conditions of uniform convergence on any compact, which does not contain the singular points of the function; the sequence of interpolation fractions to the interpolated function were found, as well as other convergence conditions. Results on the interpolation of functions with a finite number of singular points by rational fractions and entire functions by polynomials are generalized.

Keywords: analytic function, singular point of a function, interpolation process, rational function, uniform convergence, convergence conditions.

Через $A\left(a_1, a_2, ..., a_{p+1}\right)$ обозначим класс однозначных аналитических функций, не имеющих других особых точек, кроме, быть может, точек a_s, $s = 1, 2, ..., p+1$, $a_{p+1} = \infty$.

Класс матриц узлов интерполяции $\left\{z_j^{(n)}\right\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, у которых при всех $n > N$ n-ю строку матрицы можно разбить на $p+2$ группы точек $\left\{z_{s,j}^{(n)}\right\}$, $s = 1, 2, \ldots, p+1$, и $\left\{z_{0,j}^{(n)}\right\}$ так, что узлы $\left\{z_{s,j}^{(n)}\right\}$, $j = 1, 2, \ldots, \lambda_n^{(s)}$, при неограниченном возрастании n имеют единственную точку сгущения a_s,

Lipchinskij, A.G., Stolbov, V.N., Interpolation of analytic functions with finite number of special points by rational functions.

Поступила 13 февраля 2018 г., опубликована 15 августа 2018 г.

$z_{p+1,j}^{(n)} \neq 0$, а множество точек $\left\{z_{0,j}^{(n)}\right\}$, $j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(0)}$, принадлежит некоторому компакту, не содержащему точек $a_k, k = 1, 2, \dots, p$, обозначим символом $\bigcup s = 1^{p+1} a_s$.

Пусть заданы последовательности целых неотрицательных чисел $\left\{m_n^{(k)}\right\}$, $k = 1, 2, ..., p$ таких, что при всех n, $\sum_{k=1}^{p} m_n^{(k)} = m_n \leq n - 1$.

Для каждого $n = 1, 2, \dots,$ построим рациональную функцию

$$R_{n-1}(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_{m_n}(z)}, \tag{1}$$

где $P_{n-1}(z)$ – многочлен степени $n-1$, $Q_{m_n}(z) = \prod_{k=1}^{p} (z - a_k)^{m_n^{(k)}}$, интерполирующую функцию $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$ в узлах $\left\{z_j^{(n)}\right\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$. Известно (см. [1, гл. VIII, с. 226, теорема 1; 2, гл. I, с. 16]), что такая рациональная функция единственная.

Далее будем пользоваться обозначениями, введенными в [3]:

$$m_n^{(p+1)} = n - m_n - 1, u_{n,j}^{(k)} = \left|a_k - z_{k,j}^{(n)}\right|^{-1}, k = 1, 2, ..., p, u_{n,j}^{(p+1)} = \left|z_{p+1,j}^{(n)}\right|,$$

$\overline{D}$ – замкнутая область, определяемая неравенствами $|z| \leq \frac{1}{d}$,$|a_k - z| \geq d$, $k = 1, 2, ..., p$, $d < 1$ так мало, что окружности $|a_k - z| = d$ не пересекаются и расположены внутри круга $|z| \leq \frac{1}{d}$,

$$F_{n,k}(z) = \exp\left\{\sum_{s=1, s\neq k}^{p} \frac{\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)}}{n} \ln\left|\frac{z - a_s}{a_k - a_s}\right| \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_n^{(k)} - m_n^{(k)}}{n} \ln|z - a_k| + c_1^{(k)}(z) \frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\right\},$$

$$F_{n,p+1}(z) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_n^{(k)} - m_n^{(k)}}{n} \ln|z - a_k| + c_2(z) \frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\right\},$$

$A_1^{(k)}(z) = \frac{1}{\lambda_n^{(0)}} \sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}} \ln\left|\frac{z - z_{0,j}^{(n)}}{a_k - z_{0,j}^{(n)}}\right|$, $c_2(z) = \frac{1}{\lambda_n^{(0)}} \sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}} \ln\left|z - z_{0,j}^{(n)}\right|$, где $z \in \overline{D}$, $z \neq z_j^{(n)}$, $b_{\eta_n^{(s)}}^{(s)}$ — коэффициент при $\eta_n^{(s)}$-м члене главной части ряда Лорана в окрестности точки a_s, $s = 1, 2, ..., p+1$, функции $f(z)$, при этом $\eta_n^{(s)} = m_n^{(s)} + 1$, если $b_{m_n^{(s)}+1}^{(s)} \neq 0$, и $\eta_n^{(s)}$– наименьший номер отличных от нуля членов $b_h^{(s)}$ при $h > m_n^{(s)} + 1$, если $b_{m_n^{(s)}+1}^{(s)} = 0$,

$$\upsilon_{n,s}(z) = \prod_{j=1}^{\lambda_n^{(s)}} \left(z - z_{s,j}^{(n)}\right), s = 1, 2, ..., p+1.$$

В [3] доказана следующая теорема:

Теорема 1[3]. *Для того чтобы последовательность интерполяционных дробей* (1), *построенная для функции* $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$ *по матрице* *узлов* $\left\{z_j^{(n)}\right\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$, *равномерно сходилась на любом компакте, не содержащем точек* a_k, $k = 1, 2, ..., p$, *к функции* $f(z)$, *необходимо, чтобы выполнялись неравенства*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{\overline{D}} F_{n,k}(z) \left[\left|b^{(k)}_{\eta_n^{(k)}}\right| \cdot |\upsilon_{n,k}(a_k)|^{-1}\right]^{\frac{1}{n}} \le 1, k = 1, 2, ..., p, \tag{2}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{\overline{D}} F_{n,p+1}(z) \left[\left|b^{(p+1)}_{\eta_n^{(p+1)}}\right| \cdot |\upsilon_{n,p+1}(0)|\right]^{\frac{1}{n}} \le 1, \tag{3}$$

и достаточно, чтобы они были строгими.

Введем обозначения

$$\frac{1}{n}\left(\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)}\right) = \alpha_n^{(s)}, \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{(s)} = \alpha^s, s = 1, 2, ..., p+1, \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(s)}}{n} = \chi_s, \tag{4}$$

$s = 0, 1, 2, ..., p+1$.

Заметим, что $\left|\alpha_n^{(s)}\right| \le 1$ и $0 \le \chi_s \le 1$.

Лемма 1. *Если хотя бы одно из чисел* $\alpha^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., p$, *отрицательно, то существует* $z \in \overline{D}$ *и* N_1 *такие,что при любом* $n > N_1$,$\max\limits_{\overline{\mathrm{D}}} F_{n,s}(z)$, $s = 1, 2, ..., p+1$, *неограниченно возрастают, когда* $d \to 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha^{(\tau)} < 0$, $1 \le \tau \le p$. Положим $|z - a_\tau| = d$, где $d < 1$ настолько мало, что узлы $\left\{z_{0,j}^{(n)}\right\}$ лежат внутри $\overline{D}$. Если $\tau = k$, то величины $|z - a_s|$, $|a_k - a_s|$, $s \ne k$, $\left|z - z_{0,j}^{(n)}\right|$, $\left|a_k - z_{0,j}^{(n)}\right|$ положительны и ограничены, следовательно, все слагаемые в $F_{n,s}(z)$,$s = 1, 2, ..., p+1$, кроме $\alpha_n^{(\tau)} \cdot \ln|z - a_\tau|$, ограничены.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{(\tau)} = \alpha^{(\tau)} < 0$, то существует N_1 такое, что при всех $n > N_1$ $\alpha_n^{(\tau)} < 0$, следовательно, при всех $n > N_1$ справедливо равенство

$$\alpha_n^{(\tau)} \cdot \ln|z - a_\tau| = \left|\alpha_n^{(\tau)}\right| \cdot \ln\frac{1}{d}. \tag{5}$$

Правая часть последнего равенства неограниченно возрастает, если $d \to 0$, откуда следует справедливость леммы при $\tau = k$.

Если же $\tau \ne k$, тогда все слагаемые в $F_{n,s}(z)$, $s = 1, 2, ..., p+1$, кроме

$$\alpha_n^{(\tau)} \cdot \ln\left|\frac{z - a_\tau}{a_k - a_\tau}\right| \text{ в } F_{n,k}(z) \text{ и } \alpha_n^{(\tau)} \cdot \ln|z - a_\tau| \text{ в } F_{n,p+1}(z),$$

ограничены. В силу равенства (5) и

$$\alpha_n^{(\tau)} \cdot \ln\left|\frac{z - a_\tau}{a_k - a_\tau}\right| = \left|\alpha_n^{(\tau)}\right| \cdot \ln\frac{|a_k - a_\tau|}{d},$$

можем утверждать, что при всех $n > N_1$ рассматриваемые слагаемые неограниченно возрастают, если $d \to 0$, следовательно, неограниченно возрастают и $F_{n,s}(z)$.

Таким образом, независимо от величины и знака $\alpha^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., p$, $k \ne \tau$, при $\alpha^{(\tau)} < 0$ $F_{n,s}(z)$ неограниченно возрастают. □

Заметим, что лемма 1 имеет место и в случае, когда

$$\lambda_n^{(\tau)} = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{m_n^{(\tau)}}{n} = \gamma_\tau > 0.$$

Лемма 2. *Пусть $\alpha^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., p$, неотрицательные числа. Если хотя бы одно из них или χ_0 положительно, то при всех достаточно больших n $\max\limits_{\overline{\mathrm{D}}} F_{n,s}(z)$, $s = 1, 2, ..., p+1$, неограниченно возрастают при $d \to 0$.*

Доказательство. Положим $|z| = \frac{1}{d}$, где d удовлетворяет требованиям построения замкнутой области $\overline{D}$, узлы $\left\{z_{0,j}^{(n)}\right\}$ лежат внутри $\overline{D}$. Кроме того, имеют место неравенства $|z - a_k| > 1$, $k = 1, 2, ..., p$, и $\left|z - z_{0,j}^{(n)}\right| > 1$, $j = 1, 2, ..., \lambda_n^{(0)}$.

Будем оценивать $F_{n,s}(z)$ на окружности $|z| = \frac{1}{d}$. $F_{n,k}(z)$ и $F_{n,p+1}(z)$ запишем в виде

$$F_{n,k}(z) = \exp\left\{\sum_{s=1}^{p} \alpha_n^{(s)} \ln|z - a_s| - \sum_{s=1, s\neq k}^{p} \alpha_n^{(s)} \ln|a_k - a_s| \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}} \ln\left|z - z_{0,j}^{(n)}\right| - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}} \ln\left|a_k - z_{0,j}^{(n)}\right| \right\},$$

$$F_{n,p+1}(z) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{p} \alpha_n^{(k)} \ln|z - a_k| + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}} \ln\left|z - z_{0,j}^{(n)}\right| \right\}.$$

Заметим, что величины $|a_k - a_s|$ и $\left|a_k - z_{0,j}^{(n)}\right|$ ограничены, следовательно, вычитаемые суммы в $F_{n,s}(z)$ ограничены, их сумму обозначим через c_1. На окружности $|z| = \frac{1}{d}$ имеем

$$F_{n,k}(z) = \exp\left\{\sum_{s=1}^{p} \alpha_n^{(s)} \ln\frac{1}{d} + \sum_{s=1}^{p} \alpha_n^{(s)} \ln\left|1 - \frac{a_s}{z}\right| \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}} \ln\frac{1}{d} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}} \ln\left|1 - \frac{z_{0,j}^{(n)}}{z}\right| - c_1 \right\},$$

$$F_{n,p+1}(z) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{p} \alpha_n^{(k)} \ln\frac{1}{d} + \sum_{k=1}^{p} \alpha_n^{(k)} \ln\left|1 - \frac{a_k}{z}\right| \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} \ln\frac{1}{d} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}} \ln\left|1 - \frac{z_{0,j}^{(n)}}{z}\right| \right\}.$$

Суммы $\sum_{s=1}^{p} \alpha_n^{(s)} \ln\left|1 - \frac{a_s}{z}\right|$ и $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}} \ln\left|1 - \frac{z_{0,j}^{(n)}}{z}\right|$ ограничены, обозначим их через c_2 и c_3. Имеем

$$F_{n,k}(z) = \exp\left\{\left[\sum_{s=1}^{p} \alpha_n^{(s)} + \frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\right] \ln\frac{1}{d} + c_2 + c_3 - c_1 \right\},$$

$$F_{n,p+1}(z) = \exp\left\{\left[\sum_{s=1}^{p}\alpha_n^{(s)} + \frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\right]\ln\frac{1}{d} + c_2 + c_3\right\}.$$

По условию леммы предел выражения в квадратных скобках последних равенств положителен, следовательно, существует N такое, что при всех $n > N$ это выражение больше нуля. Значит при таких n произведение

$$\left[\sum_{s=1}^{p}\alpha_n^{(s)} + \frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\right]\ln\frac{1}{d}$$

неограниченно возрастает, если $d \to 0$, отсюда следует справедливость леммы 2. □

Лемма 3. *Если $\alpha^{(k)} = 0$, $k = 1, 2, ..., p$, то $\alpha^{(p+1)} = -\chi_0$.*

Доказательство. Имеют место равенства

$$\lambda_n^{(p+1)} = n - \left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_n^{(k)} + \lambda_n^{(0)}\right), m_n^{(p+1)} = n - 1 - \sum_{k=1}^{p} m_n^{(k)}. \tag{6}$$

Воспользовавшись равенствами (6) и (4), найдем

$$\alpha^{(p+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\lambda_n^{(p+1)} - m_n^{(p+1)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n - \left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_n^{(k)} + \lambda_n^{(0)}\right) - \left(n - 1 - \sum_{k=1}^{p} m_n^{(k)}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_n^{(k)} - m_n^{(k)}}{n} - \frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{p}\alpha^{(k)} - \chi_o = -\chi_0.$$

□

Следствие 1. *Если не все числа $\alpha^{(s)}$, $s = 1, 2, ..., p+1$, равны нулю, то каково бы ни было число $B > 0$, можно найти d такое, что $\max\limits_{\overline{\mathrm{D}}} F_{n,s}(z)$, $s = 1, 2, ..., p+1$, $n > \max[N, N_1, N_2]$, больше B.*

Доказательство. Из лемм 1-3 следует, что если хотя бы одно из чисел $\alpha^{(s)}$, $s = 1, 2, ..., p+1$, отлично от нуля, то существует N такое, что при любом $n > N$ $\max\limits_{\overline{\mathrm{D}}} F_{n,s}(z) \to \infty$, $s = 1, 2, ..., p+1$, если $d \to 0$. Значит, для любого числа $B > 0$ существует такое $d > 0$, что при $n > N$ $\max\limits_{\overline{\mathrm{D}}} F_{n,s}(z) > B$, $s = 1, 2, ..., p+1$. □

Теорема 1. *Пусть матрица узлов интерполяции $\left\{z_j^{(n)}\right\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$. Если среди чисел $\alpha^{(s)}$, $s = 1, 2, ..., p+1$, есть отличные от нуля,то для того чтобы последовательность интерполяционных дробей (1), построенная для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$ по матрице узлов $\left\{z_j^{(n)}\right\}$, равномерно сходилась к интерполируемой функции на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, ..., p$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left|b_{\eta_n^{(s)}}^{(s)}\right| \cdot \prod_{j=1}^{\lambda_n^{(s)}} u_{n,j}^{(s)}\right]^{\frac{1}{n}} = 0, s = 1, 2, ..., p+1. \tag{7}$$

Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ. Предположим, что последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по матрице узлов $\left\{z_j^{(n)}\right\}$, равномерно сходится на любом компакте, не содержащем точек a_k, к функции $f(z)$, но хотя бы для одного s, $1 \le s \le p+1$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\left| b^{(s)}_{\eta_n^{(s)}} \right| \cdot \prod_{j=1}^{\lambda_n^{(s)}} u_{n,j}^{(s)} \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{B} > 0. \tag{8}$$

Теорему достаточно доказать для замкнутой области $\overline{D}$, где $d > 0$ может быть как угодно малым.

Поскольку рассматриваемый интерполяционный процесс равномерно сходится, то в замкнутой области $\overline{D}$ выполняются условия (2) и (3). На основании следствия 1 d можно взять таким, что $\max\limits_{\overline{\mathrm{D}}} F_{n,s}(z) > B$. Перемножая (8) и последнее неравенство, найдем, что левые части неравенств (2) и (3), при рассматриваемом s, больше единицы. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно. Необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Каковы бы ни были величины $\max\limits_{\overline{\mathrm{D}}} F_{n,s}(z) \ne \infty$, $s = 1, 2, ..., p+1$, умножая на них равенство (7), убеждаемся, что условия (2) и (3) выполняются. Достаточность доказана. □

Заметим, что условия (7) равномерной сходимости дробей (1) около точек a_s, $s = 1, 2, ..., p+1$, являются взаимно независимыми в том смысле, что они зависят от кратностей полюсов дробей в данной точке a_s, коэффициентов главной части ряда Лорана интерполируемой функции в окрестности этой точки, количества связанных с точкой a_s узлов интерполяции и скорости их стремления к этой особой точке и не зависят от каких-либо характеристик в других особых точках интерполируемой функции и матрицы узлов интерполяции.

Следствие 2. *Пусть узлы интерполяции* $\left\{z_j^{(n)}\right\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, $\chi_0 \ne 0$. *Для того чтобы последовательность интерполяционных полиномов, построенная для целой функции* $f(z)$, *равномерно сходилась к* $f(z)$ *на любом компакте, необходимо и достаточно чтобы выполнялось равенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\left| b^{(p+1)}_{\eta_n^{(P+1)}} \right| \cdot \prod_{j=1}^{\lambda_n^{(p+1)}} u_{n,j}^{(p+1)} \right]^{\frac{1}{n}} = 0. \tag{9}$$

Справедливость следствия вытекает из теоремы 1.

Теорема 1 и следствие 2 обобщают теоремы 3 и 2 из [3], соответственно, на случай, когда не все числа $\alpha^{(s)}$, $s = 1, 2, ..., p+1$, равны нулю.

Следствие 3. *Пусть* $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$, *а матрица узлов интерполяции* $\left\{z_j^{(n)}\right\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$. *Если функция* $f(z)$ *в одной или нескольких точках* a_τ, $1 \le \tau \le p+1$, *имеет полюсы порядка не выше* m_τ, *то (при выполненных условиях (7) в других особых точках функции) для равномерной сходимости процесса к* $f(z)$ *на любом компакте, не содержащем точек* a_k, $k = 1, 2, ..., p$, *достаточно потребовать выполнения неравенств* $m_n^{(\tau)} \ge m_\tau$. *Если же точка* a_τ *не является особой точкой функции* $f(z)$, *то (при выполненных условиях*

(7) в точках a_k, $1 \leq k \leq p$, $k \neq \tau$) интерполяционный процесс будет сходиться при любых $m_n^{(\tau)}$.

Доказательство. В самом деле, в ряде Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a_τ присутствует лишь не более m_τ членов главной части. Следовательно, все $b^{(\tau)}_{\eta_n^{(\tau)}}$, где $\eta_n^{(\tau)} > m_\tau$, равны нулю. Отсюда ясно, что при $m_n^{(\tau)} \geq m_\tau$, произведения с индексом $s = \tau$ в равенстве (7) обращаются в нуль, значит, условия (7) при $s = \tau$ также выполняются. Если же точка a_τне является особой, то все коэффициенты главной части ряда Лорана $b^{(\tau)}_{\eta_n^{(\tau)}} = 0$. □

Подчиняя узлы интерполяции $\left\{z_{s,j}^{(n)}\right\}$, числа $\alpha^{(s)}$, $s = 1, 2, ..., p+1$, и χ_0 различным требованиям, из теоремы 1 и следствия 2 можно получить конкретные условия равномерной сходимости последовательности (1) и интерполяционных полиномов к интерполируемой функции на любом компакте, не содержащем точек $a_k, k = 1, 2, ..., p$.

Теорема 2. *Пусть одно или несколько чисел $\lambda_n^{(\tau)} = 0{,}1 \leq \tau \leq p+1$. Функция $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$, последовательности $\left\{m_n^{(s)}\right\}$, $s = 1, 2, ..., p+1$, и узлы интерполяции $\left\{z_j^{(n)}\right\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1}, s \neq \tau$, такие, что в точках a_s, $s = 1, 2, ..., p+1$, $s \neq \tau$, выполнены условия (7). Для того чтобы последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по матрице узлов $\left\{z_j^{(n)}\right\}$, равномерно сходилась на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, ..., p$, к интерполируемой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n^{(\tau)}}{n} = \gamma_\tau > 0. \tag{10}$$

Доказательство. Так как $\lambda_n^{(\tau)} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(\tau)} = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_n^{(\tau)}}{n} = -\gamma_\tau \leq 0$. При доказательстве теоремы воспользуемся условиями (7), которые в окрестностях точек a_τ принимают вид

$$\lim_{n\to\infty} \left| b^{(\tau)}_{\eta_n^{(\tau)}} \right|^{\frac{1}{n}} = 0. \tag{11}$$

По условию теоремы равенства (7) около точек a_s, $s \neq \tau$, выполнены. Поскольку далее в доказательстве теоремы будем рассматривать только точку a_τто в целях упрощения записи индекс τ писать не будем.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть последовательность (1) равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, ..., p$, но $\gamma_\tau = 0$. Возьмем $0 < q < 1$ и рассмотрим подкласс функций класса $A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$, у которых коэффициенты главных частей лорановских разложений в окрестностях точек a удовлетворяют равенствам $|b_{\eta_n}| = \left|b_{m_{n+1}}\right| = q^n$. Такие функции в классе $A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$ существуют, так как $q^{\frac{n}{m_n+1}} \to 0$ при $n \to \infty$. Если $f(z)$ из этого подкласса, то

$$\lim_{n\to\infty} |b_{\eta_n}|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (q^n)^{\frac{1}{n}} = q \neq 0.$$

Отсюда следует, что достаточное условие равномерной сходимости (7) около точки a не выполняется. Последний вывод противоречит нашему предположению о равномерной сходимости последовательности (1) к функции $f(z)$. Полученное противоречие доказывает необходимость.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Поскольку для любой функции $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$ около особой точки имеет место равенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |b_{\eta_n}|^{\frac{1}{\eta_n}} = 0$, то получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |b_{\eta_n}|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[|b_{\eta_n}|^{\frac{1}{\eta_n}} \right]^{\frac{\eta_n}{n}} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[|b_{\eta_n}|^{\frac{1}{\eta_n}} \right]^{\frac{m_n}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\left| b_{\eta_n}^{\frac{1}{\eta_n}} \right| \right]^{\gamma} = 0.$$

Достаточность доказана. □

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если все $\lambda_n^{(s)} = \lambda_n^{(\tau)} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_n^{(\tau)}}{n} = \gamma_\tau > 0$, $\tau = 1, 2, \ldots, p+1$, получаем теорему 1 из [4].

В теореме 2 $\lambda_n^{(\tau)} = 0$ нельзя заменить каким-либо натуральным числом без дополнительных условий на коэффициенты главной части ряда Лорана интерполируемой функции в окрестности точки a_τ и скорость стремления узлов к этой особой точке.

В самом деле, пусть, например, $\lambda_n^{(\tau)} = 1$, тогда условие (7) около особой точки a_τ принимает вид

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left| b^{(\tau)}_{\eta_n^{(\tau)}} \right| \cdot u_{n,1}^{(\tau)} \right]^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Если произведение в квадратных скобках последнего равенства по некоторой последовательности натуральных чисел n больше или равно единице, то условие равномерной сходимости интерполяционного процесса не выполняется, следовательно, процесс расходится.

Следствие 4. *Последовательность интерполяционных полиномов, построенная для всякой целой функции $f(z)$ по узлам $\left\{ z_j^{(n)} \right\}$, расположенным на некотором компакте, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте.*

Доказательство. В этом случае $\tau = p+1$, $\lambda_n^{(p+1)} = 0$, $m_n^{(p+1)} = n-1$, условия сходимости (7) принимают вид (11). Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_n^{(p+1)}}{n} = \gamma_{p+1} = 1$, то с помощью теоремы 2 убеждаемся в справедливости следствия 4. □

Если в следствии 4 $z_j^{(n)} = a$, $j = 1, 2, ..., n$, $n = 1, 2, ...$, то интерполяционные полиномы являются частичными суммами ряда Тейлора с центром в точке a, построенным для целой функции $f(z)$.

Порядок ρ_s функции $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$ около особой точки a_s, $s = 1, 2, ..., p+1$, определяется формулой [5,3]

$$\rho_s = \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\ln\ln M_s(f, \mathrm{r})}{\ln \mathrm{r}},$$

где $M_k(f, \mathrm{r}) = \max\limits_{|z-a_k| = \frac{1}{\mathrm{r}}} |f(\mathrm{z})|$, $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{p}$, $M_{p+1}(f, r) = \max\limits_{|z|=r} |f(\mathrm{z})|$, а порядок μ_sсходимости последовательности $\{z_i^{(n)}\} \in \bigcup\limits_{S=1}^{p+1} a_s$ около точки a_sравенством

$$\frac{1}{\mu_s} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln u_{n,j}^{(s)}}{\ln j}, j = 1, 2, ..., \lambda_n^{(s)}.$$

Не нарушая общности, далее будем полагать, что при всех $n > n_0$выполнены неравенства $u_{n,j}^{(s)} \leq u_{n,j+1}^{(s)}$, $s = 1, 2, ..., p+1$, в противном случае узлы интерполяции в строках матрицы можно перенумеровать.

Теорема 3. *Пусть матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(s)}\} \in \bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$, *среди чисел* $\alpha^{(s)}, s = 1, 2, ..., p+1$, *есть отличные от нуля. В одной или нескольких точках* a_τ, $1 \leq \tau \leq p+1$, χ_τ *и* γ_τ *положительны, матрицы узлов интерполяции* $\{z_{\tau,i}^{(n)}\}$ *имеют порядки сходимости* $\mu_\tau > 0$. *Если* $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$ *около точек* a_τ *имеет порядки* $\rho_\tau > 0$, *то (при выполненных условиях* (7) *в точках* $a_s, 1 \leq s \leq p+1, s \neq \tau$) *для равномерной сходимости последовательности* (1), *построенной для функции* $f(z)$ *по матрице узлов* $\{z_j^{(n)}\}$ *к* $f(z)$ *на любом компакте, не содержащем точек* a_k, $k = 1, 2, ..., p$, *достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\rho_\tau < \frac{\gamma_\tau}{\chi_\tau}\mu_\tau. \tag{12}$$

Если же, кроме того, при всех $n > N$ *имеют место равенства*

$$u_{n,j}^{(\tau)} = A_\tau j^{\frac{1}{\mu_\tau}}, \tag{13}$$

то необходимо, чтобы неравенства (12) *были нестрогими.*

Доказательство. ДОСТАТОЧНОСТЬ. Поскольку по условию теоремы равенства (7) в окрестностях точек $a_s, 1 \leq s \leq p+1, s \neq \tau$, выполнены, то в доказательстве теоремы будем рассматривать лишь точки a_τ. Возьмём точку a_τ. В силу того, что группа точек $\{z_{\tau,i}^{(n)}\}$ имеет порядок сходимости $\mu_\tau > 0$, для любого $0 < \varepsilon < \mu_\tau$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что при всех $j > N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство $u_{n,j}^{(\tau)} < j^{(\mu_\tau - \varepsilon)^{-1}}$. Далее в доказательстве теоремы индекс τ писать не будем. Для таких узлов имеет место неравенство

$$[\prod_{j=1}^{\lambda_n} u_{n,j}]^{\frac{1}{n}} < c\lambda_n^{\frac{\lambda_n}{n}(\mu-\varepsilon)^{-1}}, 0 < c < \infty. \tag{14}$$

Так как по условию теоремы функция $f(z)$ около рассматриваемой точки имеет порядок ρ, на основании равенства (см. [6, с.13])

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln |b_n|^{-1}} \tag{15}$$

при достаточно больших n можем записать

$$|b_\eta|^{\frac{1}{n}} < \eta_n^{-\frac{\eta_n}{n}(\rho+\varepsilon)^{-1}}.$$

Перемножая (14) с последним неравенством, найдём

$$[|b_{\eta_n}| \cdot \prod_{j=1}^{\lambda_n} u_{n,j}]^{\frac{1}{n}} < c\lambda_n^{\frac{\lambda_n}{n}(\mu-\varepsilon)^{-1}} \cdot \eta_n^{-\frac{\eta_n}{n}(\rho+\varepsilon)^{-1}} = c \cdot (\frac{\lambda_n}{\eta_n})^{\frac{\lambda_n}{n}(\mu-\varepsilon)^{-1}} \cdot \eta_n^{(\frac{\lambda_n}{n}\frac{1}{\mu-\varepsilon} - \frac{\eta_n}{n}\frac{1}{\rho+\varepsilon})}.$$

Покажем, что второй сомножитель в правой части последнего соотношения ограничен. В самом деле, если $\chi > 0$, то в силу неравенства $\eta_n \geq m_n + 1$ последовательности $\frac{\lambda_n}{n}$ и $\frac{\lambda_n}{\eta_n}$ ограничены, следовательно, и сомножитель $(\frac{\lambda_n}{\eta_n})^{\frac{\lambda_n}{n}(\mu-\varepsilon)^{-1}}$

ограничен. Таким образом, можем записать

$$[|b_{\eta_n}|\cdot\prod_{j=1}^{\lambda_n}u_{n,j}]^{\frac{1}{n}}<c_1\cdot\eta_n^{(\frac{\lambda_n}{n}\frac{1}{\mu-\varepsilon}-\frac{\eta_n}{n}\frac{1}{\rho+\varepsilon})},0<c_1<\infty. \tag{16}$$

Так как $\eta_n\geq m_n+1$,то

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{n\to\infty}}(\frac{\lambda_n}{n}\frac{1}{\mu-\varepsilon}-\frac{\eta_n}{n}\frac{1}{\rho+\varepsilon})=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_n}{n}\frac{1}{\mu-\varepsilon}-\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\eta_n}{n}\frac{1}{\rho+\varepsilon}\\&\leq\chi\cdot\frac{1}{\mu-\varepsilon}-\frac{1}{\rho+\varepsilon}\lim_{n\to\infty}\frac{m_{n+1}}{n}=\chi\cdot\frac{1}{\mu-\varepsilon}-\gamma\cdot\frac{1}{\rho+\varepsilon}.\end{aligned} \tag{17}$$

Если выполнено условие (12), то, выбрав $0<\varepsilon<(\gamma\cdot\mu-\chi\cdot\rho)(\chi+\gamma)^{-1}$, получим, что правая часть (17) отрицательна, следовательно, правая часть неравенства (16) стремится к нулю при $n\to\infty$.

Таким образом, при выполненных условиях (12), имеют место условия равномерной сходимости (7) около рассматриваемой точки α. Достаточность доказана.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Докажем вторую часть теоремы. Пусть последовательность интерполяционных дробей (1), построенная для функции $f(z)\in A(a_1,a_2,...,a_{p+1})$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, при этом около рассматриваемой точки α выполняется (13), сходится к *f(z)* на любом компакте, не содержащем точек $a_k, k=1,2,...,p$, однако, $\rho>\frac{\gamma}{\chi}\mu$.

С помощью формулы Стирлинга (см. [7, гл.1, с.19]), найдём

$$\begin{aligned}&\prod_{j=1}^{\lambda_n}u_{n,j}]^{\frac{1}{n}}=(1+o(1))A^{\frac{\lambda_n}{n}}(\lambda_n!)^{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{n}}=\\&=(1+o(1))A^{\frac{\lambda_n}{n}}(\frac{\lambda_n}{e})^{\frac{\lambda_n}{n}\cdot\frac{1}{\mu}}(\sqrt{2\pi\lambda_n})^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\mu}}=c_2\lambda_n^{\frac{\lambda_n}{n}\cdot\frac{1}{\mu}},\end{aligned} \tag{18}$$

где $0<c_2<\infty$.

Рассмотрим подкласс функций класса $A(a_1,a_2,...,a_{p+1})$, у которых при всех достаточно больших n $\eta_n=m_n+1$. Для таких функций около точки α условия (7) принимают вид

$$\lim_{n\to\infty}[|b_{m_n+1}|\cdot\prod_{j=1}^{\lambda_n}u_{n,j}]^{\frac{1}{n}}=0. \tag{19}$$

Поскольку функция $f(z)$ по условию теоремы около точки α имеет порядок $\rho>0$, то из (15) следует, что для любого $0<\varepsilon<\rho$ существует последовательность натуральных чисел $\{\overline{n}\}$ такая, что

$$|b_{m_n+1}|\geq(m_{\overline{n}}+1)^{-\frac{m_{\overline{n}}+1}{\rho-\varepsilon}},$$

значит

$$|b_{m_{\bar{n}}+1}|^{\frac{1}{\overline{n}}}\geq(m_{\overline{n}}+1)^{-\frac{m_{\overline{n}}+1}{n(\rho-\varepsilon)}}.$$

Полагая в равенстве (18) $n = \overline{n}$ и перемножая его с последним неравенством, будем иметь

$$[|b_{m_{\overline{n}}+1}| \cdot \prod_{j=1}^{\lambda_{\overline{n}}} u_{\overline{n},j}]^{\frac{1}{\overline{n}}} \geq c_2 \lambda_{\overline{n}}^{\frac{\lambda_{\overline{n}}}{\overline{n}} \cdot \frac{1}{\mu}} (m_{\overline{n}}+1)^{-\frac{m_{\overline{n}}+1}{\overline{n}(\rho-\varepsilon)}}$$

$$= [c_2 (\frac{\lambda_{\overline{n}}}{m_{\overline{n}}+1})^{\frac{\lambda_{\overline{n}}}{\overline{n}} \cdot \frac{1}{\mu}}] \cdot (m_{\overline{n}}+1)^{(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\lambda_{\overline{n}}}{\overline{n}} - \frac{m_{\overline{n}}+1}{(\rho-\varepsilon)\overline{n}})}.$$

Так как выражение в квадратных скобках правой части последнего соотношения положительно и ограничено, то можем записать

$$[|b_{m_{\overline{n}}+1}| \cdot \prod_{j=1}^{\lambda_{\overline{n}}} u_{\overline{n},j}]^{\frac{1}{\overline{n}}} \geq c_3 (m_{\overline{n}}+1)^{(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\lambda_{\overline{n}}}{\overline{n}} - \frac{1}{\rho-\varepsilon} \cdot \frac{m_{\overline{n}}+1}{\overline{n}})}, \quad 0 < c_3 < \infty. \tag{20}$$

Заметим, что имеет место равенство

$$\lim_{\overline{n}\to\infty} (\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\lambda_{\overline{n}}}{\overline{n}} - \frac{1}{\rho-\varepsilon} \cdot \frac{m_{\overline{n}}+1}{\overline{n}}) = \frac{1}{\mu}\chi - \frac{1}{\rho-\varepsilon}\gamma. \tag{21}$$

Поскольку $\rho > \frac{\gamma}{\chi}\mu$, выбрав ε удовлетворяющим неравенству $0 < \varepsilon < \frac{\rho\chi-\gamma\mu}{\chi}$, убеждаемся, что правая часть последнего равенства положительна. Следовательно, правая часть в (20) не стремится к нулю

В таком случае условия (19) около рассматриваемой особой точки по последовательности $\{\overline{n}\}$ не выполняются, интерполяционный процесс расходится и наше предположение, по поводу его сходимости, неверно. Необходимость доказана. □

Следствие 5. *Пусть матрица узлов* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, $0 < \chi_0 < 1$. *Для того чтобы последовательность интерполяционных полиномов, построенная для целой функции* $f(z)$ *порядка* $\rho > 0$, *по матрице узлов* $\{z_j^{(n)}\}$ *с порядком сходимости* $\mu > 0$, *равномерно сходилась к* $f(z)$ *на любом компакте, достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\rho < \frac{\mu}{\chi}.$$

Если же, кроме того, при всех достаточно больших n *имеют место равенства* $u_{n,j} = A_j^{\frac{1}{\mu}}$, *то условие*

$$\rho \leq \frac{\mu}{\chi}$$

является необходимым.

Доказательство. Справедливость следствия вытекает из теоремы 3, где

$$\gamma_\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n^{(p+1)}}{n} = 1, \chi_\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(p+1)}}{n} = 1 - \chi_0 = \chi > 0.$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Необходимое условие в теореме 3 и следствии 5 имеет место и при узлах $u_{n,j}^{(\tau)} = A_\tau (\lambda_n^{(\tau)})^{\frac{1}{\mu_\tau}}$, поскольку равенство (18) справедливо и в этом случае. В самом деле, при таких узлах имеем (индекс τ в следующем равенстве писать не будем)

$$[\prod_{j=1}^{\lambda_n} u_{n,j}]^{\frac{1}{n}} = A_n^{\frac{\lambda_n}{n}}(\lambda_n)^{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\lambda_n}{n}} = c_5(\lambda_n)^{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\lambda_n}{n}}, 0 < c_5 < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из теоремы 3 можно сделать вывод, что при выполненных условиях теоремы и фиксированном $\mu_\tau > 0$, $1 \le \tau \le s$, за счёт изменения кратности полюсов дробей (1) $m_n^{(\tau)}$ в точке a_τ или количества узлов, интерполяции $\lambda_n^{(\tau)}$, связанных с этой точкой, можно изменять класс равномерной сходимости дробей (1) около точки a_τ, либо расширяя его, если

$$\lim_{n\to\infty} m_n^{(\tau)} \cdot (\lambda_n^{(\tau)})^{-1} = \frac{\gamma_\tau}{\chi_\tau} > 1,$$

либо сужая, если $\frac{\gamma_\tau}{\chi_\tau} < 1$, относительно класса функций с порядком $\rho_\tau = \mu_\tau = \theta_s$, когда $\gamma_s = \chi_s$ (см.[3, теорема 4]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если в следствии 5 положить $\chi_0 = 0$, то получим первую часть теоремы IV из [8] (см. [8, гл. II, §3, с.179]). Следствие 5 обобщает первую часть этой теоремы на случай, когда $\chi_0 \ne 0$.

Теорема 4. *Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{P+1} a_s$, около одной или нескольких точек $a_\tau, 1 \le \tau \le \rho+1, \gamma_\tau > 0$ и матрицы узлов $\{z_{\tau,i}^{(n)}\}$ имеют порядки сходимости $\mu_\tau > 0$. Для того чтобы последовательность* (1), *построенная для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$ любого конечного порядка $\rho_\tau > 0$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходилась на любом компакте, не содержащем точек $a_k, k = 1, 2, ..., p$, к функции f(z) (при выполненных условиях (7) в точках $a_s, 1 \le s \le p+1, s \ne \tau$), достаточно, чтобы $\chi_\tau = 0$. Если же, кроме того, при всех достаточно больших n имеют место равенства* (13), *то условия $\gamma_\tau = 0$ являются необходимыми.*

Доказательство. ДОСТАТОЧНОСТЬ. Поскольку $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{P+1} a_s$, то при всех достаточно больших n $\lambda_n^{(\tau)} \ge 1$. Повторяя доказательство достаточности в теореме 3, получим неравенство (16). Если $\chi = 0$, то при любом $0 < \rho < \infty$ правая часть соотношения (17) отрицательна, значит правая часть неравенства (16) стремится к нулю при $n \to \infty$. Мы показали, что условия (7) выполняются во всех особых точках функции. Достаточность доказана.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Докажем вторую часть теоремы. Пусть последовательность интерполяционных дробей (1), построенная для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, где около рассматриваемой точки α имеет место равенство (13), сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, ..., p$, но $\chi > 0$. Далее, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве необходимости в теореме 3, получим неравенство (20). Заметим, что при $\rho > \frac{\beta}{\chi}\mu + \varepsilon$ правая часть равенства (21) положительна, следовательно, правая часть (20) при таких ρ не стремится к нулю, значит, условие (7) около рассматриваемой точки не выполняется, процесс расходится. Полученное противоречие доказывает необходимость. □

Следствие 6. *Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^i a, a = \infty$, имеет порядок сходимости $\mu_{p+1} > 0$. Для того чтобы последовательность* *интерполяционных полиномов, построенная для функции $f(z)$ любого конечного порядка по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходилась к $f(z)$ на любом компакте, достаточно, чтобы $\chi_{p+1}=0$. Если же, кроме того, при всех достаточно больших n выполняется равенство $u_{n,j}^{(p+1)}=A_{p+1}j^{\frac{1}{\mu_{p+1}}}$, то условие $\chi_{p+1}=0$ является необходимым.*

Справедливость следствия вытекает из теоремы 4.

Замечание 2 справедливо для теоремы 4 и следствия 6.

Функция плотности узлов интерполяции $n_k(R)$ около точки $a_k, k=1,2,...,p$, равна количеству чисел из группы $\{z_{k,j}^{(n)}\}$, находящихся вне круга $|z-a_k|<\frac{1}{R}$ и $n_{p+1}(R)$ — число точек группы $\{z_{p+1,j}^{(n)}\}$, попавших в круг $|z|\le R$ [3].

Теорема 5. *Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\}\in\bigcup_{s=1}^{p+1}a_s$ и не все числа $\alpha^{(s)}$ равны нулю. Для того чтобы последовательность (1), построенная для функции $f(z)\in A(a_1,a_2,...,a_{p+1})$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходилась к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек $a_k, k=1,2,...,p$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln|b^{(s)}_{\eta_n^{(s)}}|-N_s(R_n^{(s)})+n_s(R_n^{(s)})\ln R_n^{(s)}]=-\infty, s=1,2,...,p+1, \tag{22}$$

где $R_n^{(s)}=u_{n,\lambda_n^{(s)}}$, $N_s(R_n^{(s)})$ — функции Неванлинна, $n_s(R_n^{(s)})$ — функции плотности узлов интерполяции около точек a_s.

Доказательство. Необходимым и достаточным условием равномерной сходимости рассматриваемого интерполяционного процесса к функции $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k=1,2,...,p$, является выполнение равенств (7). В целях упрощения записи индекс s в доказательстве писать не будем.

Обозначим выражение под знаком предела в (7) через q_n. Если условие (7) выполняется, то $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=0$.

Прологарифмировав равенство

$$[|b_n|\cdot\prod_{j=1}^{\lambda_n}u_{n,j}]^{\frac{1}{n}}=q_n$$

и воспользовавшись формулой

$$\sum_{u_n\le R}\varphi(u_n)=n(R)\varphi(R)-\int_0^R n(t)\varphi'(t)dt$$

из [9] (см. [9 отд. II, гл. 3, с.93, 94]), полагая при этом $\varphi(u_n)=\ln u_{n,j}$, $R=R_n, \int_0^{R_n}\frac{n(t)}{t}dt=N(R_n)$ — функция Неванлинна (см. [8, гл. III, §1, с.204]), получим

$$\frac{1}{n}[\ln|b_{\eta_n}|-N(R_n)+n(R_n)\ln R_n]=\ln q_n.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в обеих частях последнего равенства, приходим к равенству (22). □

Теорема 5 обобщает теорему 6 из [3] на случай, когда не все числа a_s, $s=1,2,...,p$ равны нулю.

Следствие 7. *Если матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^i a, a = \infty$, *и* $0 < \chi_0 < 1$, *то для того чтобы последовательность интерполяционных полиномов, построенная для целой функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходилась к* $f(z)$ *на любом компакте, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[\ln|b^{(p+1)}_{\eta_n^{(p+1)}}| - N(R_n^{(p+1)}) + n(R_n^{(p+1)}) \ln R_n^{(p+1)}] = -\infty,$$

где $R_n^{(p+1)} = u^{(p+1)}_{n,\lambda_n^{(p+1)}}$, $n(R_n^{(p+1)})$ — *функция плотности узлов интерполяции,* $N(R_n^{(p+1)})$ — *функция Неванлинна.*

Справедливость следствия вытекает из теоремы 5.

Следствие 7 обобщает следствие 5 из [3] на случай, когда $0 < \chi_0 < 1$.

Теорема 6. *Пусть матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$, *не все числа* $\alpha^{(s)}, s = 1, 2, ..., p+1$, *равны нулю и* $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$. *Если существуют положительные последовательности* $\{\theta_n^{(s)}\}$ *такие, что* $R_n^{(s)}(\theta_n^{(s)})^{-1} \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *и выполняются равенства*

(23)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[\ln M_s(f, \frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}}) - n_s(R_n^{(s)}) \ln \frac{1}{\theta_n^{(s)}} + (\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)} - 1) \ln \frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}} - N_s(R_n^{(s)})] = -\infty,$$

где $R_n^{(s)} = u^{(s)}_{n,\lambda_n^{(s)}}, s = 1, 2, ..., p+1$, $n_s(R_n^{(s)})$ — *функции плотности узлов интерполяции около точек* $a_s, N_s(R_n^{(s)})$ — *функции Неванлинна, то последовательность* (1), *построенная для функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходятся к* $f(z)$ *на любом компакте, не содержащем точек* a_k, $k = 1, 2, ..., p$.

Доказательство. В доказательстве теоремы индекс s писать не будем. На основании неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда имеем $\ln|b_{\eta_n}| \le \ln M(f, r_n) - \eta_n \ln r_n$, где $r_n > 1$ такое, что $f(z)$ аналитическая в круге $|z - \alpha| \le \frac{1}{r_n}$ с выколотым центром, если α — конечная особая точка функции $f(z)$, и $f(z)$ аналитическая вне круга $|z| < r_n$ за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, если $\alpha = \infty$.

Учитывая неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда, можем утверждать, что выражение под знаком предела в (22) не превосходит

$$\frac{1}{n}[\ln M(f, r_n) - \eta_n \ln r_n - N(R_n) + n(R_n) \ln R_n]. \tag{24}$$

Положим $r_n = \frac{R_n}{\theta_n}$. Поскольку $\eta_n \ge m_n + 1$ и $n(R_n) = \lambda_n$, то, заключаем, что выражение (24) не больше, чем

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{n}[\ln M(f, \tfrac{R_n}{\theta_n}) - (m_n + 1) \ln \tfrac{R_n}{\theta_n} + n(R_n) \ln R_n - N(R_n)]\\ &= \tfrac{1}{n}[\ln M(f, \tfrac{R_n}{\theta_n}) - n(R_n) \ln \tfrac{1}{\theta_n} + (\lambda_n - m_n - 1) \ln \tfrac{R_n}{\theta_n} - N(R_n)].\end{aligned}$$

Заметим, что выражение под знаком предела в (23) равно правой части последнего равенства, которое не меньше выражения под знаком предела в (22). Отсюда следует, что если имеет место равенство (23), то выполняются условия (22) около всех особых точек функции $f(z)$. □

Теорема 6 обобщает теорему 7 из [3] на случай, когда не все числа $\alpha^{(s)}, s = 1, 2, ..., p+1$, равны нулю.

Следствие 8. *Пусть матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^i a, a = \infty$ *и* $0 < \chi_0 < 1$. *Если существует положительная последовательность* $\{\theta_n\}$ *такая, что* $R_n \cdot \theta_n^{-1} \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *и выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[\ln M(f, \frac{R_n}{\theta_n}) - n(R_n) \ln \frac{1}{\theta_n} + (\lambda_n^{(p+1)} - m_n^{(p+1)} - 1) \ln \frac{R_n}{\theta_n} - N(R_n)] = -\infty,$$

где $R_n = u^{(p+1)}_{n,\lambda_n^{(p+1)}}$, $n(R_n)$ *— функция плотности узлов интерполяции около бесконечно удаленной точки,* $N(R_n)$*-функция Неванлинна этих узлов, то последовательность полиномов, построенная для целой функции f(z) по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходилась к f(z) на любом компакте.*

Справедливость следствия вытекает из теоремы 6.

Следствие 8 обобщает следствие 6 из [3] на случай, когда $0 < \chi_0 < 1$.

Будем пользоваться обозначениями

$$e_0(x) = x, e_1(x) = e^x, e_l(x) = e_{l-1}(e(x)) = e(e_{l-1}(e_0(x))),\ l = 1, 2, \dots,$$

$$\ln_0(x) = x, \ln_1(x) = \ln x, \ln_l(x) = \ln_{l-1}(\ln x), (E_l < x < \infty), E_l = e_l(0).$$

Скажем, что функция $f(z)$ около особой точки $\alpha_s, s = 1, 2, ..., p+1$, ступени l_s, если

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_{l_s} M_s(f,r)}{\ln r} = \infty, \overline{\lim_{\tau\to\infty}} \frac{\ln_{l_s+1} M_s(f,r)}{\ln r} = \rho_s < \infty, l_s \geq 0, s = 1, 2, ..., \rho+1,$$

где ρ_s — порядок функции $f(z)$ ступени l_s около особой точки a_s.

Класс функций $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$, у которых около особой точки a_s ступень меньше l_s, либо равна l_s, но порядок меньше ρ_s, обозначим через $\{l_s, \rho_s)$, а если при той же ступени около особой точки 0_sпорядок не превосходит ρ_s, то через $\{l_s, \rho_s]$.

Нижнюю плотность v_s функции плотности $n_s(r)$ ступени l_s около точки a_s определим равенством [10]

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_{l_s+1} n_s(r)}{\ln r} = v_s > 0, l_s \geq 0, s = 1, 2, \dots, p+1.$$

Класс последовательностей $\{z_{s.j}^{(n)}\}$ узлов интерполяции, функция плотности у которых ступени либо больше l_s, либо равна l_s, а нижняя плотность не меньше v_s, обозначим символом $\{l_s, v_s]$.

Теорема 7. *Пусть матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$, *около одной или нескольких точек* $a_\tau, 1 \leq \tau \leq p+1$, $\chi_\tau > 0$ *и* $\gamma_\tau > 0$, $\{z_{\tau,j}^{(n)}\} \in \{l_\tau, v_\tau]$, $l_\tau \geq 0$. *Если* $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$ *такова, что в окрестностях точек* a_s, $s = 1, 2, ..., p+1$, $s \neq \tau$, *выполнены условия* (7) *или* (23), *а около точек* a_τ *она принадлежит классу* $\{l_\tau + 1, \frac{\gamma_\tau}{\chi_\tau} v_\tau)$, *то последовательность* (1), *построенная для функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходятся к* $f(z)$ *на любом компакте, не содержащем точек* α_k, $k = 1, 2, ..., p$.

Доказательство. В силу того, что условия равномерной сходимости около точек $\alpha_s, s \neq \tau$, выполнены, будем рассматривать только точки α_τ, поэтому индекс τ в доказательстве теоремы писать не будем. Для доказательства используем условия (23). Пусть порядок функции $f(z)$ около точки α равен ρ. Если функция $f(z)$ около точки α принадлежит классу $\{l{+}1, \frac{\gamma}{\chi}v)$, то по определению этого класса имеем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_{l+2} M(f,r)}{\ln r} = \rho < \frac{\gamma}{\chi}v.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малое, что имеет место неравенство $\frac{\gamma}{\chi}(v-\varepsilon) > \rho$. Существует N_1 такое, что при всех $n > N_1$ выполняется неравенство

$$\ln M(f, \frac{R_n}{\theta_n}) < e_l((\frac{R_n}{\theta_n})^{\frac{\gamma}{\chi}(v-\varepsilon)}),$$

где $R_n = u_{n,\lambda_n}, \theta_n > 0$ такое, что $\frac{R_n}{\theta_n} \to \infty$ при $n \to \infty$.

На основании определения класса последовательностей $\{l, v]$ для $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ найдётся N_2 такое, что при всех $n > N_2$ имеет место соотношение

$$\lambda_n = n(R_n) \geq e_l(R_n^{v-\varepsilon_1}).$$

Так как $N(R_n) \geq 0$, то можно утверждать, что выражение под знаком предела в (23) при всех $n > \max[N_1, N_2]$ не превосходит

$$\frac{\lambda_n}{n}[e_l((\frac{R_n}{\theta_n})^{\frac{\gamma}{\chi}(v-\varepsilon)}) \cdot (n(R_n))^{-1} - \ln\frac{1}{\theta_n} + (1-\frac{m_n}{\lambda_n})\ln\frac{R_n}{\theta_n}]. \tag{25}$$

Если *l=0*, то последнее выражение не превосходит

$$\frac{\lambda_n}{n}[(\frac{R_n}{\theta_n})^{\frac{\gamma}{\chi}(v-\varepsilon)}) \cdot R_n^{-(v-\varepsilon)} - \ln\frac{1}{\theta_n} + (1-\frac{m_n}{\lambda_n})\ln\frac{R_n}{\theta_n}]. \tag{26}$$

Пусть $\theta_n = R_n^c, c < 1$ тогда выражение (26) перепишем в виде

$$\frac{\lambda_n}{n}[R_n^{(1-c)\frac{\gamma}{\chi}(v-\varepsilon)-(v-\varepsilon_1)} + c\ln R_n + (1-c)(1-\frac{m_n}{\lambda_n})\ln R_n]. \tag{27}$$

Если выбрать $c = 1-\frac{\chi}{\gamma}(v-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon}{2})(v-\varepsilon)^{-1}$, то найдём, что показатель степени при таком с в (27) равен $\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon) < 0$, следовательно, первое слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$. Кроме того, при выбранном с, имеем

$$c\ln R_n + (1-c)(1-\frac{m_n}{\lambda_n})\ln R_n = [1-(1-c)\frac{m_n}{\lambda_n}]\ln R_n. \tag{28}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}[1-(1-c)\frac{m_n}{\lambda_n}] = 1-(1-c)\frac{\gamma}{\chi} = (\varepsilon_1-\varepsilon)[2(v-\varepsilon)]^{-1} < 0$, замечаем, что левая часть равенства (28) стремится к $-\infty$, если $n \to \infty$.

Таким образом, предел при $n \to \infty$ выражения (27), а значит и (26) при $n \to \infty$ равен $-\infty$, то есть условие (23) около точки a выполняется.

Пусть теперь $l \geq 1$. В этом случае (25) перепишем в виде

$$\frac{\lambda_n}{n}[\exp(e_{l-1}(\frac{R_n}{\theta_n})^{\frac{\gamma}{\chi}(v-\varepsilon)} - e_{l-1}(R_n)^{v-\varepsilon_1}) - \ln\frac{1}{\theta_n} + (1-\frac{m_n}{\lambda_n})\ln\frac{R_n}{\theta_n}]. \tag{29}$$

В силу того, что при любых x_1 и x_2 таких, что $0 < x_1 < x_2$, имеет место неравенство

$$x_1 - x_2 > e_1(x_1) - e_1(x_2) > ... > e_{l-1}(x_1) - e_{l-1}(x_2),$$

можно утверждать, что выражение (29) не превосходит

$$\frac{\lambda_n}{n}[\exp((\frac{R_n}{\theta_n})^{\frac{\gamma}{\chi}(v-\varepsilon)} - R_n^{v-\varepsilon_1}) - \ln\frac{1}{\theta_n} + (1-\frac{m_n}{\lambda_n})\ln\frac{R_n}{\theta_n}]. \tag{30}$$

С помощью (27) первое слагаемое перепишем так

$$\exp((\frac{R_n}{\theta_n})^{\frac{\gamma}{\chi}(v-\varepsilon)} - R_n^{v-\varepsilon_1}) = \exp(R_n^{(1-c)\frac{\gamma}{\chi}(v-\varepsilon)} - R_n^{v-\varepsilon_1}) =$$
$$= \exp[R_n^{v-\varepsilon_1}(R_n^{(1-c)\frac{\gamma}{\chi}(v-\varepsilon)-(v-\varepsilon_1)} - 1)].$$

При выбранных с,ε и ε_1 разность в круглых скобках в правой части последнего равенства при $n \to \infty$ стремится к -1. Так как $R^{v-\varepsilon_1}$ неограниченно возрастает, если $n \to \infty$, то, следовательно, первое слагаемое в (30) стремится к нулю. Сумма двух других слагаемых в (30), как показано выше, при $n \to \infty$ стремится к $-\infty$. Следовательно, условие (23) около точки a выполняется и в этих случаях. Теорема доказана. □

Следствие 9. *Пусть матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, $0 < \chi_0 < 1$ *и* $\{z_{p+1,j}^{(n)}\} \in \{l_{p+1}, v_{p+1}]$. *Если целая функция* $f(z) \in \{l_{p+1} + 1, \chi_{p+1}^{-1} v_{p+1}]$, *то последовательность интерполяционных полиномов, построенная для функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходится к* $f(z)$ *на любом компакте.*

Справедливость следствия вытекает из теоремы 7 и равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n^{(p+1)}}{n} = 1 = \gamma_{p+1}.$$

Замечаем, что во второй части теоремы 3 при узлах $\{z_{\tau,i}^{(n)}\}$, $i = 1, 2, ..., \lambda_n^{(\tau)}$, удовлетворяющих условию (13), функции плотности узлов интерполяции $n_\tau(R_n^{(\tau)}) = A_\tau^{-\mu_\tau} \cdot (R_n^{(\tau)})^{m_\tau}$. Значит, нижние плотности последовательностей узлов около точек a_τ $v_\tau = \mu_\tau$. В терминах теоремы 7, $\{z_{\tau,j}^{(n)}\} \in \{o, \mu_\tau]$.

Необходимым условием равномерной сходимости интерполяционных дробей к функции $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_s, является неравенство $\rho_\tau \leq \frac{\gamma_\tau}{\chi_\tau}\mu_\tau$, то есть принадлежность функции $f(z)$ около точек a_τ классу $\{1, \frac{\gamma_\tau}{\chi_\tau}\mu_\tau]$. В теореме 7 достаточным условием равномерной сходимости интерполяционного процесса на любом компакте, не содержащем точек a_s,является принадлежность функции $f(z)$ около особой точки a_τклассу $\{1, \frac{\gamma_\tau}{\chi_\tau}v_\tau)$. В силу равенства $v_\tau = \mu_\tau$ заключаем, что при $l = 0$ теорему 7 и следствие 9, без дополнительных условий на узлы интерполяции, улучшить, в смысле расширения класса равномерной сходимости, нельзя.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В доказательстве теоремы 7 $\theta_n = R_n^c$, где $c = 1 - \frac{\chi}{\gamma}(v - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon}{2})(v-\varepsilon)^{-1}$, где $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ могут быть как угодно малыми. В силу неулучшаемости теоремы 7 при $l = 0$, можем утверждать, что выбор θ_n для $l = 0$ является оптимальным. Следовательно, при заданной нижней плотности узлов интерполяции в доказательстве теоремы 7, θ_n может неограниченно возрастать, когда $n \to \infty$, если $\frac{\chi}{\gamma} < 1$, либо стремиться к нулю, если $\frac{\chi}{\gamma} > 1$. В самом деле, поскольку

$$(v - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon}{2})(v-\varepsilon)^{-1} > \lim_{\varepsilon_1\to\varepsilon}(v - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon}{2})(v-\varepsilon)^{-1} = 1, \tag{31}$$

в силу равенства в (31) заключаем, что для любого числа $0 < \frac{\chi}{\gamma} < 1$, найдется $\varepsilon_1 < \varepsilon$ такое, что $0 < \frac{\chi}{\gamma}(v - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon}{2})(v-\varepsilon)^{-1} < 1$, значит, $c > 0$, $\theta_n = R_n^c \to \infty$

при $n \to \infty$. Если $\frac{\chi}{\gamma} > 1$, то в силу неравенства в (31) найдём, что $c < 0$ и, следовательно, $\theta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Отметим, что в случае $\chi = \gamma$ в теоремах 1,2,5 [10] показано, что $\theta_B^{(s)}$ нужно брать из интервала (0,1).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если в следствии 9 при $l_{p+1} = 0$ плотность $\chi_{p+1} = 1$, то получим вторую часть теоремы IV из [8] (см. [8, гл. II, §3, с.179). Следствие 9 обобщает вторую часть теоремы IV из [8] на случай, когда $\chi_0 \neq 0$, узлы интерполяции и целые функции любой конечной ступени.

Теорема 8. *Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$, не все числа $\alpha^{(s)} = 0$, $f(z) \in A(a_1, a_2, ..., a_{p+1})$ и выполнены условия (7). Какова бы ни была матрица узлов интерполяции $\{z'^{(n)}_j\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$, удовлетворяющая неравенствам*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}[\prod_{j=1}^{\lambda'^{(s)}_n} u'^{(s)}_{n,j}]^{\frac{1}{n}} \cdot [\prod_{j=1}^{\lambda^{(s)}_n} u^{(s)}_{n,j}]^{-\frac{1}{n}} \leq c_s < \infty, s = 1, 2, ..., p+1,$$

где $u'^{(s)}_{n,j} = |a_s - z'^{(n)}_{s,j}|^{-1}, s = 1, 2, ..., p$, и $u'^{(p+1)}_{n,j} = |z'^{(n)}_{p+1,j}|^{-1}$, последовательность интерполяционных дробей (1), построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z'^{(n)}_j\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, ..., p$.

Доказательство. В самом деле, имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}[|b^{(s)}_{\eta^{(s)}_n}| \cdot \prod_{j=1}^{\lambda'^{(s)}_n} u'^{(s)}_{n,j}]^{\frac{1}{n}} = c_s \lim_{n\to\infty}[|b^{(s)}_{\eta^{(s)}_n}| \cdot \prod_{j=1}^{\lambda^{(s)}_n} u^{(s)}_{n,j}]^{\frac{1}{n}} = 0, s = 1, 2, ..., p+1.$$

Следовательно, для функции $f(z)$ и матрицы узлов $\{z'^{(n)}_j\}$ условия (7) выполняются. □

Следствие 10. *Пусть для узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a, a = \infty$, и целой функции $f(z)$ выполняются условия (9). Какова бы ни была матрица $\{z'^{(n)}_j\} \in \bigcup_1^1 a, a = \infty$, удовлетворяющая неравенству*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}[\prod_{j=1}^{\lambda'^{(p+1)}_n} u'^{(p+1)}_{n,j}]^{\frac{1}{n}} \cdot [\prod_{j=1}^{\lambda^{(p+1)}_n} u^{(p+1)}_{n,j}]^{-\frac{1}{n}} \leq c < \infty,$$

последовательность полиномов, построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z'^{(n)}_j\}$ равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте.

Справедливость следствия 10 вытекает из теоремы 8.

References

[1] J.L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1961. MR0218586

[2] V.I. Smirnov, N.A. Lebedev, *Constructive theory of functions of a complex variable*, M: Nauka, 1964. MR0171926

[3] A.G. Lipchinskij, *Interpolation of analytic functions with finitely many singularities*, Siberian Mathematical Journal, **53**:5 (2012), 821—838. MR3057925

[4] A.G. Lipchinskij, *Convergence Conditions for Interpolation Fractions at the Nodes Distinct from the Singular Points of a Function*, Siberian Mathematical Journal, **46**:4 (2005), 652—660. MR2169399

[5] V.L. Goncharov, *On the interpolation of functions with a finite number of singularities by means of rational functions*, Izv. AN SSSR Ser. mat., **1**:2 (1937), 171—189.

[6] B.Ya. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, M.: Izd-vo inostr. lit., 1961.

[7] N.G. De Brain, *Asymptotic methods in analysis*, M.:Izd-vo inostr. lit., 1961. MR0177247

[8] A.O. Gelfond, *Finite difference calculus*, M.: Nauka, 1967. MR0216186

[9] G. Polia, G. Szego, *Problems and theorems from analysis*, Vol. 1, M.: Gostekhizdat, 1956.

[10] A.G. Lipchinskij, *Convergence conditions for interpolation rational fractions with finitely many poles*, Siberian Mathematical Journal, **56**:3 (2015), 442—454. MR3442802

Aleksandr Grigor'evich Lipchinskij
E-mail address: deigpi72@gmail.com

Viktor Nikolaevich Stolbov
Tyumen State University,
Volodarskogo st., 6,
625003, Tyumen, Russian Federation
E-mail address: vstolbov@gmail.com