S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 882–889 (2018) УДК 513.83

DOI 10.17377/semi.2018.15.075 MSC 53A04

О ПЛОСКИХ ЛИНИЯХ С АФФИННО-ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ДУГАМИ

И.В. ПОЛИКАНОВА

Abstract. It is proved in the article that the only curves with affine congruent arcs in the affine plane are straight lines, parabolas or their connected parts.

Keywords: curve with affine congruent arcs, straight line, parabola.

1. Введение

Будем рассматривать линии в 2-мерной аффинной плоскости A^2. Под линией понимаем одномерное многообразие, под дугой линии – образ числового отрезка $[a, b]$ при вложении его в линию. Также саму кривую, являющуюся гомеоморфным образом числового отрезка в A^2, будем называть дугой. Условимся дугу линии с концами A и B обозначать AB в отличие от прямолинейного отрезка $[AB]$ – замкнутого (с концами) и $]AB[$ – открытого (без концов).

Дуги AB и CD линии называются аффинно-эквивалентными, если существует аффинное преобразование плоскости, отображающее одну дугу на другую. В дальнейшем аффинное преобразование плоскости для краткости будем называть просто аффинным преобразованием.

Линию, всякие 2 дуги которой аффинно-эквивалентны, будем называть *линией с аффинно-эквивалентными дугами* или обладающей свойством аффинной эквивалентности дуг.

В [1] доказана следующая

Теорема 1. *Всякие две дуги параболы аффинно-эквивалентны.*

и анансирован следующий результат.

Теорема 2. *Плоская линия с аффинно-эквивалентными дугами есть либо прямая, либо парабола, либо их связные части.*

Polikanova, I.V., On the flat curves with affine congruent arcs.

Поступила 19 февраля 2017 г., опубликована 15 августа 2018 г.

В настоящей статье приводится доказательство теоремы 2.

Этапы доказательства: если линия с аффинно-эквивалентными дугами не содержит прямолинейных отрезков, то

1) всякая её дуга является выпуклой кривой.

2) всякая её дуга локально представима графиками функций, имеющих 2-ые производные.

3) всякая её дуга является параболой.

Доказательство использует результаты из работ [2],[3] которые в применении к A^2 принимают вид:

Теорема 3. *Пусть линия в A^2 является гомеоморфным образом числового отрезка [a,b] или окружности и не содержится в прямой. Если всякая прямая пересекает её не более чем в 2 точках, то линия лежит на границе своей выпуклой оболочки.*

Теорема 4. *Если линия в A^2 обладает свойством аффинной эквивалентности дуг и не содержится в прямой, то касательные прямые в разных её точках не параллельны.*

и свойства аффинных преобразований ([4], параграф 48):

Теорема 5. *При аффинном преобразовании в A^2:*
a) всякие 3 коллинеарные точки отображаются в 3 коллинеарные, при этом сохраняется порядок точек на прямой;
b) прямая отображается в прямую, луч — в луч, отрезок — в отрезок, причём концы отрезка — в концы его образа;
c) параллельные прямые отображаются в параллельные;
d) парабола отображается в параболу;
e) выпуклое множество отображается в выпуклое, а опорная прямая к нему в граничной точке — в опорную прямую к образу выпуклого множества в соответствующей точке.

2. Доказательство лемм.

Лемма 1. *Линия с аффинно-эквивалентными дугами, содержащая прямолинейный отрезок, есть прямая либо её связная часть.*

Доказательство. Пусть γ – линия с аффинно-эквивалентными дугами, содержащая прямолинейный отрезок $[AB]$, l – прямая, определяемая точками A и B. Допустим существование точки $M \in \gamma$, не принадлежащей прямой l. Пусть для определённости точка B лежит на γ между A и M. Тогда дуга AM содержит отрезок $[AB]$. Будучи ему аффинно-эквивалентной, она также является прямолинейным отрезком, причём, содержащим отрезок $[AB]$. Следовательно, $M \in l$. Получили противоречие. Таким образом, γ с необходимостью является прямой или её связной частью. Заметим, что прямая и любая её связная часть обладают свойством аффинной эквивалентности дуг.

Лемма 2. *Пусть дуга в A^2 с аффинно-эквивалентными дугами не содержит прямолинейных отрезков. Тогда она пересекается с каждой прямой не более, чем в двух точках.*

Доказательство. Пусть γ – дуга с аффинно-эквивалентными дугами, не содержащая прямолинейных отрезков. Предположим противное: некоторая прямая l имеет с γ более двух общих точек; например, K, L, N – три из них, и L лежит на l между K и N. Заметим, что всякие 2 точки дуги γ однозначно определяют содержащуюся в ней дугу с концами в этих точках.

Случай 1. L лежит на γ между K и N. На прямолинейном отрезке $[KL]$ существует точка P, не принадлежащая γ. Так как дуга KL линии является замкнутым множеством в A^2, то множество $l \setminus KL$ открыто в l. Поэтому его связная компонента, содержащая точку P, представляет собой открытый отрезок $]QS[$ (точки Q, S могут совпадать с K и L). Рассуждением „от противного“ проверяется, что $Q, S \in KL$. Действительно, если $Q \notin KL$, то Q принадлежит открытому в l множеству $l \setminus KL$. Следовательно, существует открытый отрезок $]Q'Q''[$, содержащий точку Q и содержащийся в $l \setminus KL$. Пусть Q лежит на l между Q' и S. Тогда открытый отрезок $]Q'S[$ содержится в $l \setminus KL$ и содержит отрезок $]QS[$, а, значит и точку P. А это противоречит определению связной компоненты точки P, как максимального по включению множества, содержащего P и содержащегося в $l \setminus KL$. Таким образом, $Q \in KL$. Аналогично проверяется, что $S \in KL$. Итак, дуга QS линии γ не имеет с отрезком $[QS]$ общих точек кроме концов. Пусть L' – образ точки L при аффинном преобразовании плоскости, отображающем дугу KN в дугу QS. По теореме 5(a) L' является внутренней точкой отрезка $[QS]$ и дуги QS. Пришли к противоречию. Данный случай невозможен.

Случай 2. L лежит на γ вне дуги KN, например, K – между L и N. Множество $LN \cap l$ компактно в A^2 как замкнутое подмножество компактного множества LN ([5], теорема 17, с.18), а, значит и в l. Пусть на l задана аффинная система координат (сокращённо АСК). Тогда биективное отображение $f : l \to R$, сопоставляющее каждой точке прямой её координату в АСК, порождает на l топологию, являющуюся прообразом естественной топологии на R при отображении f. Она совпадает с топологией, индуцированной на l из A^2. При этом отображение f становится гомеоморфизмом. Пусть Δ – образ компактного множества $LN \cap l$ при гомеоморфизме f. Тогда множество Δ компактно в R и по теореме Бореля-Лебега замкнуто и ограничено ([6], с. 147). Пусть $e = \inf \Delta$, $g = \sup \Delta$. Тогда $-\infty < e < g < +\infty$ и $e, g \in \Delta$ и $\Delta \subset [e, g]$. Пусть E, G – точки на l, соответствующие значениям e и g при отображении f (не исключено, что они совпадут с K и N). Тогда $E, G \in LN$ и $LN \cap l \subset [EG]$. Пусть для определённости порядок точек на l таков: $E - K - L - N - G$. Существует аффинное преобразование, отображающее дугу LN в дугу EG. Пусть K' – образ точки K при этом преобразовании. По теореме 5(a) точка K' лежит на l вне отрезка $[EG]$. Но поскольку дуга EG содержится в дуге LN, то точка $K' \in LN \cap l \subset [EG]$. Получили противоречие. Делаем вывод, что исходное допущение о том, что прямая имеет более двух точек пересечения с γ, ложно. Лемма 2 доказана.

Из лемм 1, 2 и теоремы 3 с учётом того, что свойство аффинной эквивалентности дуг линии является наследственным для дуг линии, выводим:

Теорема 6. *Если линия с аффинно-эквивалентными дугами не содержит прямолинейных отрезков, то всякая её дуга является выпуклой кривой.*

Замечание. Для евклидовой плоскости из этого утверждения можно было бы вывести свойство выпуклости для всей линии даже, если она не является компактным множеством. Для A^2 не знаю.

Лемма 3. *Для всяких двух внутренних точек X и Y линии с аффинно-эквивалентными дугами в A^2 найдётся аффинное преобразование, отображающее некоторую окрестность точки X на некоторую окрестность точки Y так, что точка X при этом отобразится в точку Y.*

Доказательство. Если линия является прямой или её связной частью, то утверждение тривиально. Пусть линия с аффинно-эквивалентными дугами не содержит прямолинейных отрезков, X и Y – произвольные её внутренние точки. По теореме 6 всякая дуга линии выпукла. Пусть γ – выпуклая дуга этой линии, содержащая X и Y в качестве внутренних точек. Проведём в точках X и Y опорные прямые l_X и l_Y к γ. Так как X, Y – внутренние точки дуги γ, то можно провести параллельные прямым l_X и l_Y соответственно прямые l'_X и l'_Y так, чтобы они отсекали от γ дуги

γ_X, γ_Y, причём, $X \in \gamma_X$, $Y \in \gamma_Y$. Существует аффинное преобразование g, отображающее дугу γ_X в дугу γ_Y, при этом концы дуги γ_X отобразятся в концы дуги γ_Y. Поскольку при аффинном преобразовании опорные прямые к γ_X отображаются в опорные прямые к γ_Y в соответствующих точках и сохраняется параллельность (теорема 5 (c, e)), то параллельные прямые l'_X и l_X отобразятся в параллельные прямые l'_Y и m – опорную к γ_Y в некоторой точке Z. Ввиду того, что для любого направления существует не более двух параллельных опорных прямых, ограничивающих 2-мерное компактное выпуклое тело, прямая m должна совпасть с l_Y. Тогда множество $l_X \cap \gamma_X$ отобразится при отображении g в множество $l_Y \cap \gamma_Y$. Так как линия не содержит прямолинейных отрезков, то $l_X \cap \gamma_X = \{X\}$ и $l_Y \cap \gamma_Y = \{Y\}$. Следовательно $Y = g(X)$. Доказано.

Напомним, что *полукасательной* к линии γ в точке $X \in \gamma$ называется предельный луч для последовательностей лучей $([XX_i))$, когда всевозможные последовательности точек (X_i) сходятся к X с одной стороны (при условии, что предел существует). Если во внутренней точке X линии существуют левая и правая полукасательные, объединение которых есть прямая, то в этой точке существует касательная прямая. В этом случае точку X будем называть *гладкой.* Используя теорему 5(b), можно доказать, что полукасательная к линии при аффинном преобразовании отображается в полукасательную к её образу, а касательная — в касательную, а, значит, гладкая точка линии отобразится в гладкую точку образа этой линии.

Лемма 4. *Линия с аффинно-эквивалентными дугами в A^2 во всех своих внутренних точках имеет касательную, а на концах (если таковые имеются) – полукасательные. Кроме того, в окрестности любой своей точки линия может рассматриваться как график выпуклой функции, имеющей вторые производные во всех точках.*

Доказательство. Пусть γ – линия с аффинно-эквивалентными дугами, не содержащая прямолинейных отрезков. Так как всякая её дуга является выпуклой кривой, то множество точек, в которых не существует касательной, не более чем счётно ([7], теорема 10.7, с. 102), и во всех точках определены левая и правая полукасательные и по одной из них на концах линии [7]. Пусть X – гладкая внутренняя точка линии γ, а Y – произвольная её внутренняя точка. По лемме 3 существует аффинное отображение, отображающее некоторую окрестность точки X на некоторую окрестность точки Y так, что точка X при этом отобразится в точку Y. Следовательно точка Y – гладкая.

У всякой гладкой внутренней точки O выпуклой кривой, каковой является окрестность точки O на γ, существует окрестность U, однозначно проектирующаяся на касательную к γ в точке O. ([5], с. 76) Выберем аффинную систему координат (АСК) O_{xy} с началом O, осью Ox, совпадающей с касательной в точке O, и осью O_y, имеющей направление проектирования. Тогда эта окрестность представляет собой график выпуклой функции $y = f(x)$, $x \in I$ ([7], теорема 10.1, с. 93). Известно, что эта функция почти всюду имеет вторую производную ([5], с. 84). Пусть $X \in U$ – гладкая внутренняя точка дуги U, в которой существует вторая производная, а $Y \in U$ – произвольная внутренняя точка. По лемме 3 существует аффинное отображение g, отображающее некоторую окрестность γ_X точки X на некоторую окрестность γ_Y точки Y так, что точка X при этом отобразится в точку Y. Пусть формулы аффинного преобразования g имеют вид:

$$(1) \qquad \begin{cases} \bar{x} = c_{11}x + c_{12}y + b_1 \\ \bar{y} = c_{21}x + c_{22}y + b_2 \end{cases} .$$

Исходя из параметрического задания дуги $\gamma_X: \ x = t, \ y = f(t),$ получим параметрическое задание дуги $\gamma_Y = g(\gamma_X):$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = c_{11}t + c_{12}f(t) + b_1 \\ y = c_{21}t + c_{22}f(t) + b_2 \end{array} \right. .$$

Заметим, что относительно системы координат Oxy дуга γ_Y задаётся той же функцией $f(x)$, вторая производная от которой вычисляется по формуле

$$f''_{xx} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2)^3} ,$$

там, где она существует. (Точками обозначены производные по параметру t.) Найдём её.

$$\dot{x} = c_{11} + c_{12}\dot{f}(t), \ \ \ddot{x} = c_{12}\ddot{f}(t).$$
$$\dot{y} = c_{21} + c_{22}\dot{f}(t), \ \ \ddot{y} = c_{22}\ddot{f}(t).$$

Тогда

$$f''_{xx} = \frac{c_{22}\ddot{f}(t)(c_{11} + c_{12}\dot{f}(t)) - c_{12}\ddot{f}(t)(c_{21} + c_{22}\dot{f}(t))}{((c_{11} + c_{12}\dot{f}(t))^2 + (c_{21} + c_{22}\dot{f}(t))^2)^3}$$

или

$$f''_{xx} = \frac{|C| \, \ddot{f}(t)}{((c_{11} + c_{12}\dot{f}(t))^2 + (c_{21} + c_{22}\dot{f}(t))^2)^3} , \tag{2}$$

где $|C| = |c_{ij}| \neq 0$ – определитель матрицы аффинного преобразования.

Так как при значении параметра $t = t_0$, соответствующем точке X на γ_X, касательный вектор $(1, f'(t))$ к γ существует и не является нулевым, а определитель $|c_{ij}| \neq 0$, то знаменатель в формуле (2) не обращается в нуль. Кроме того, в силу выбора X существует вторая производная $\ddot{f}(t_0)$. Следовательно вторая производная f''_{xx} в точке Y, соответствующей в формуле (2) параметру $t = t_0$, также существует. Лемма доказана.

Точка $M(x_0, y_0)$ линии $\vec{r} = \vec{r}(t), \ t \in I,$ называется *точкой спрямления*, если в ней существует производная 2-ого порядка от вектор-функции, и векторы $\vec{r}\,'$ и $\vec{r}\,''$ коллинеарны в этой точке ([3], с. 56). Для плоской линии, задаваемой параметризацией $\vec{r} = (x(t), y(t))$, это означает:

$$\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0) - \ddot{x}(t_0)\dot{y}(t_0) = 0,$$

а в случае явного задания уравнением $y = f(x)$ последнее условие принимает вид

$$f''(x_0) = 0.$$

Пусть имеют место соглашения, относящиеся к доказательству леммы 4. Из формулы (2) видно, что, если X является точкой спрямления дуги U, то точка $Y = g(X)$ также является точкой спрямления для U. В силу произвольности точки Y отсюда заключаем, что все точки дуги U являются точками спрямления. Следовательно дуга U содержится в прямой ([3], лемма 3), что противоречит предположению, что линия не содержит отрезков. Значит, линия не содержит точек спрямления. Тем самым справедливо утверждение, доказанное ранее ([3], теорема 1 – более общее, относительно точек уплощения k-ого порядка) при более сильном условии C^2-гладкости линии:

Лемма 5. *Линия с аффинно-эквивалентными дугами в A^2, имеющая точку спрямления, содержится в прямой.*

3. Доказательство теоремы 2.

Лемма 6. *Линия с аффинно-эквивалентными дугами, не содержащая точек спрямления, локально параболична.*

Доказательство. Пусть γ – линия с аффинно-эквивалентными дугами без точек спрямления. Тогда она не содержит прямолинейных отрезков ([3], лемма 2). Для произвольной точки $O \in \gamma$ выберем окрестность U на γ и АСК Oxy как в лемме 4. В U найдётся дуга η, содержащая точку O и стягиваемая хордой, параллельной оси Ox. Она задаётся в системе координат Oxy выпуклой функцией $y = f(x)$. Пусть η_1 – другая дуга линии γ, также содержащая точку O и стягиваемая хордой параллельной оси Ox, причём $\eta_1 \subset \eta$. Тогда дуга η_1 задаётся той же функцией $y = f(x)$. Пусть g – аффинное преобразование, отображающее η_1 в η, задаётся формулами (1).

Так как при аффинном преобразовании касательные к выпуклой кривой отображаются в касательные, а параллельные прямые отображаются в параллельные, концы дуги – в концы дуги, то ось Ox, будучи параллельной прямым, проходящим через концы дуг η и η_1, отобразится сама в себя. Значит и точка $O = \eta_1 \cap Ox$ отобразится в точку $O = \eta \cap Ox$. Поэтому аффинное преобразование g будет задаваться формулами вида:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{x} = & c_{11}x + c_{12}y \\ \bar{y} = & \qquad\; c_{22}y \end{array} \right. . \tag{3}$$

Так как при этом дуга η_1 линии $y = f(x)$ отображается в дугу η, задаваемую той же явной формулой, то

$$f(c_{11}x + c_{12}f(x)) = c_{22}f(x). \tag{4}$$

Во всех точках по лемме 4 функция $f(x)$ имеет вторые производные. Продифференцируем равенство (4) дважды:

$$f'(c_{11}x + c_{12}f(x))(c_{11} + c_{12}f'(x)) = c_{22}f'(x).$$

$$f''(c_{11}x + c_{12}f(x))(c_{11} + c_{12}f'(x))^2 + f'(c_{11}x + c_{12}f(x))c_{12}f''(x) = c_{22}f''(x).$$

Подставим в равенства значение $x = 0$. Так как Ox – касательная к γ в точке $O(0,0)$, то $f'(0) = 0$. В результате первое равенство даёт $0 = 0$, а второе: $f''(0)c_{11}^2 = c_{22}f''(0)$. Так как дуга η не содержит точек спрямления, то $f''(0) \neq 0$. Значит, $c_{22} = c_{11}^2$ и формулы (3) принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{x} = & c_{11}x + c_{12}y \\ \bar{y} = & \qquad\; c_{11}^2 y \end{array} \right. . \tag{5}$$

Зафиксируем два конца $A(X,Y)$, $A_1(X_1,Y)$ дуги η, а концы $M(x,y)$, $M_1(x_1,y)$ дуги η_1 будем считать переменными. Касательный вектор $(1,a)$ к дуге η в точке $A(X,Y)$ не параллелен касательному вектору $(1,0)$ к η в начале координат (теорема 4). Поэтому $a \neq 0$. Обозначим через x абсциссу того конца дуги η_1, который отображается в точку $A(X,Y)$, при аффинном преобразовании плоскости, отображающем дугу η_1 в дугу η. Тогда коэффициенты c_{11}, c_{12}, также как и y, в формулах (5) можно рассматривать как функции от переменной x. Тогда

$$X = c_{11}x + c_{12}y, \quad Y = c_{11}^2 y.$$

Так как касательный вектор $(1, y')$ в точке M дуги η_1 при преобразовании (5) отображается в вектор (координаты его записаны в столбец)

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{11}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} + c_{12}y' \\ c_{11}^2 y' \end{pmatrix},$$

коллинеарный вектору $(1, a)$, то условие пропорциональности координат коллинеарных векторов даёт: $c_{11}^2 y' = a(c_{11} + c_{12} y')$. Таким образом, имеем систему:

$$\begin{cases} X = c_{11}x + c_{12}y \\ Y = c_{11}^2 y \\ c_{11}^2 y' = a(c_{11} + c_{12}y') \end{cases}.$$

Выразим из второго уравнения $c_{11} = \pm\sqrt{\frac{Y}{y}}$, а из первого $c_{12} = \frac{X - c_{11}x}{y} = \frac{X \mp \sqrt{\frac{Y}{y}}x}{y}$ и подставим в третье:

$$\frac{Y}{y} \cdot y' = \pm a\sqrt{\frac{Y}{y}} + a\frac{X \mp \sqrt{\frac{Y}{y}}x}{y} \cdot y'(x)$$

Умножим обе части дифференциального уравнения на $y^{\frac{3}{2}}$:

$$Y\sqrt{y}y' = \pm a\sqrt{Y}y + aX\sqrt{y}y' \mp a\sqrt{Y}xy'. \quad \Rightarrow$$

$$(Y - aX)\sqrt{y}y' = \pm a\sqrt{Y}(y - xy'). \tag{6}$$

Случай 1. $Y - aX = 0$. Тогда уравнение (6) принимает вид: $y - xy' = 0$. Его решением является функция $y = Cx$ (C – константа), задающая в A^2 прямую. А это противоречит условию, что линия γ не содержит точек спрямления.

Случай 2. $Y - aX \neq 0$. Тогда уравнение (6) преобразуется к виду:

$$\pm\sqrt{y}y' = \frac{a\sqrt{Y}}{Y - aX}(y - xy').$$

После обозначения $K = \frac{a\sqrt{Y}}{Y - aX}$ (постоянная) и представления производной в виде $y' = \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\pm\sqrt{y}\frac{dy}{dx} = K(y - x\frac{dy}{dx}) \qquad \text{или} \qquad \pm\sqrt{y}\frac{dy}{y^2} = K\frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

В итоге имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\pm y^{-\frac{3}{2}}dy = Kd\left(\frac{x}{y}\right).$$

Интегрируя его, получим:

$$C \mp \frac{2}{\sqrt{y}} = K\frac{x}{y} \qquad \text{или} \qquad Cy - Kx = \pm 2\sqrt{y}.$$

После возведения в квадрат обеих частей равенства: $(Cy - Kx)^2 = 4y$. А это есть уравнение параболы:

$$C^2y^2 - 2CKxy + K^2x^2 - 4y = 0.$$

Здесь C и K – постоянные. Доказали, что η – дуга параболы. Лемма доказана.

Лемма 7. *Линия с аффинно-эквивалентными дугами есть либо прямая, либо парабола, либо их связные части.*

Доказательство. Пусть γ – плоская линия с аффинно-эквивалентными дугами, не содержащаяся в прямой. По лемме 5 она не имеет точек спрямления, а по лемме 6 содержит дугу AB некоторой параболы δ. Пусть X – произвольная точка линии γ, не принадлежащая дуге AB. Пусть для определённости B лежит на γ между A и X. Так как дуги AB и AX аффинно-эквивалентны, то по теореме 5(d) AX является дугой некоторой параболы δ'. Поскольку парабола пятью своими точками определена однозначно, а параболы δ и δ' имеют общую дугу AB, то $\delta = \delta'$. Значит, $X \in \delta$. Таким образом, $\gamma \subset \delta$. Мы показали, что если существует отличная от прямой или её части плоская линия, любые две дуги которой аффинно-эквивалентны, то её надо искать в классе парабол. По теореме 1 парабола действительно обладает требуемым свойством. Лемма 7, а вместе с ней и теорема 2 доказаны полностью.

Автором доказана

Теорема 7. *Единственными гладкими класса C^3 линиями в 3-мерном аффинном пространстве A^3, обладающими свойством аффинной эквивалентности дуг, являются прямые, параболы, кубики $\vec{r} = (t, t^2, t^3)$ и их связные части.*

Доказательство её составит содержание следующей статьи.

References

[1] I.V. Polikanova, *Affine congruence of parabolic arcs* , Collected articles of scientific conference «Lomonosov Readings in Altay: fundamental problems of science and education», Barnaul, 11–14 November, 2014, 344–346.

[2] I.V. Polikanova, *On the curves with a fixed maximum of the intersections with hyperplanes*/Proceedings of the Seventeenth Regional Conference on Mathematics «MAR — 2014», dedicated to the 40th anniversary of the Faculty of Mathematics and Information Technology, Alt. un-ty Press, Barnaul, 2014, 33–34.

[3] I.V. Polikanova, *Some properties of curves with affine congruet arcs*, Proceedings of the Seminar on geometry and mathematical modeling, Alt. un-ty Press, Barnaul, **2** (2016), 55–61.

[4] L.S. Atanasian, V.T. Bazilev, Geometry: in 2 p., P. 1, M.: KNORUS, 2015.

[5] I. Bakelman, A. Verner, B. Kantor, *Introduction to differetial geometry «as a whole»*, M.: «Nauka», 1973. MR0385759

[6] N. Bourbaki, General topology (Topological groups. Numbers and related groups and spaces), M.: «Nauka», 1969. MR0256328

[7] K. Leichtweis, Convex sets, M.: «Nauka», 1985.

Irina Viktorovna Polikanova
Altai State Pedagogical University,
6(1), Soviet st.,
656002, Barnaul, Russia
E-mail address: anirix1@yandex.ru