S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 890–893 (2018) УДК 514.772.35
DOI 10.17377/semi.2018.15.076 MSC 53C

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ В ТЕОРИИ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

И.Х. САБИТОВ

Abstract. We show that for negatively curved surfaces one can have the following phenomenon: there exist two non-congruent isometric surfaces with a common open set.

Keywords: isometry, surfaces with negative curvature, common open domains.

1. Введение и формулировка результата. В работе [1] в $ 2 среди поставленных задач приводится вопрос о возможности локальной изометрической реализации данной метрики двумя поверхностямм с их совпадением по некоторой общей открытой области, и в Замечании 6 в той же работе утверждается, что для поверхностей положительной кривизны это невозможно, а далее в Замечании 7 пишется, что такая ситуация в случае отрицательной кривизны возможна. Доказательство для случая положительной кривизны аргументируется ссылкой на общие свойства решений эллиптических уравнений, а для случая отрицательной кривизны как намек на доказательство упоминается установленная в [4] возможность неединственности решения рассмотренных там задач для уравнений гиперболического типа. Но если аргументацию для положительной кривизны в случае рассмотрения эллиптических уравнений, возникающих в теории изгибаний, легко можно конкретизировать, например, ссылкой на установленную в [3] невозможность существования счетного множества точек конгруентности (с внутренней точкой сгущения), в которых изометричные поверхности имеют одинаковые средние кривизны с одновременным совпадением главных направлений, то в случае отрицательной кривизны ссылка на работу [4] оказалась требующей конкретизации, так как в ней нет

Sabitov, I.Kh., On a problem in the bendings theory of negatively curved surfaces.

Поступила 3 мая 2018 г., опубликована 17 августа 2018 г.

прямого нужного утверждения именно для уравнений теории изгибаний[1]. Кроме того, оказалось, что этот вопрос пересекается с установленной еще в 19 веке в работе [5] теоремой о невозможности нетривиального изометрического преобразования поверхности с сохранением на ней данной кривой, если эта кривая не является асимптотической (в доказательстве неявно предполагается, что все происходит в аналитическом классе гладкости). Итак, целью нашей работы является доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Для любых $n \geq 2, 0 \leq \alpha \leq 1$, существуют метрики отрицательной кривизны гладкости $C^{n,\alpha}$, такие, что для них есть две неконгруентные изометрические реализации в R^3 в виде поверхностей той же гладкости $C^{n,\alpha}$, имеющих общую открытую область.*

2. Доказательство теоремы. Пусть поверхность $S_0 : z = f(x, y) = xy$ определена над кругом $D : x^2 + y^2 \leq R^2$. Поле ее бесконечно малых (б.м.) изгибаний $\{\xi(x, y), \eta(x, y), \zeta(x, y)\}$ определяется решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \xi_x + p\zeta_x &= 0, \\ \xi_y + \eta_x + p\zeta_y + q\zeta_x &= 0 \\ \eta_y + q\zeta_y &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $p = f_x = y, q = f_y = x$, и компонента $\zeta(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$t\zeta_{xx} - 2s\zeta xy + r\zeta_{yy} = 0 \tag{2}$$

с $r = f_{xx} = 0, s = f_{xy} = 2, t = fyy = 0$. Рассмотрим решение $\zeta(x, y) = 0, x < 0, \zeta(x, y) = x^\lambda, x \geq 0$ уравнения (2) в D при $\lambda \geq 2$. По этой компоненте ζ из системы (1) найдем компоненты $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$:

$$\xi(x, y) = 0, x \leq 0, \xi(x, y) = -yx^\lambda, x \geq 0;$$
$$\eta(x, y) = 0, x \leq 0, \eta(x, y) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}x^{1+\lambda}, x \geq 0.$$

Рассмотрим теперь поверхности S_1 и S_2 соответственно с уравнениями

$$X_1 = x + \varepsilon\xi(x, y), Y_1 = y + \varepsilon\eta(x, y), Z_1 = xy + \varepsilon\zeta(x, y)$$
$$X_2 = x - \varepsilon\xi(x, y), Y_2 = y - \varepsilon\eta(x, y), Z_2 = xy - \varepsilon\zeta(x, y)$$

Эти поверхности являются изометрическими реализациями одной и той же метрики, заданной в круге формой

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$$

где $E(x, y) = 1 + y^2, F(x, y) = xy, G(x, y) = 1 + x^2$ при $x \leq 0$ и $E = 1 + y^2 + \varepsilon^2[\lambda^2(1 + y^2)x^{2\lambda-2} + (1-\lambda)^2x^{2\lambda}], F = xy + \varepsilon^2\lambda yx^{2\lambda-1}, G = 1 + x^2 + \varepsilon^2x^{2\lambda}$ при $x \geq 0$. Очевидно, при достаточно малом ε эта метрика имеет отрицательную кривизну и она изометрически реализована двумя поверхностями S_1 и S_2 с общей областью над полукругом $x \leq 0$. Если параметр λ выбран больше, чем $n + \alpha$, тогда построенные метрики и поверхности заведомо имеют гладкость даже больше, чем $C^{n,\alpha}$. Теорема доказана.

3. Замечания и дополнения. Дополним наши рассмотрения некоторыми уточнениями и нерешенными вопросами.

---

[1]Мы имеем в виду, что были обращения к автору с просьбой объяснить, как можно применить результаты работы [4] для обоснования приведенного в [1] в Замечании 7 утверждения.

Замечание 1. *Если мы в качестве компоненты $\zeta(x,y)$ выберем функцию $\exp^{-\frac{1}{x^2}}, x > 0$, и $\zeta(x,y) = 0$ при $x \leq 0$, тогда получим такую же теорему в классе гладкости C^∞. А в аналитическом классе гладкости теорема, конечно, неверна.*

Возможность распространения теоремы на любую поверхность отрицательной кривизны путем специального изменения метрики с использованием ее б.м. изгибаний в одной полуокрестности асимптотической линии доказывается просто, для чего достаточно рассмотреть поверхность в асимптотических координатах и по одну сторону от выбранной дуги L асимптотической линии считать, что б.м. изгибание поверхности дано как нулевое поле, а по другую оно нетривиальное с достаточно гладким примыканием к нулевому полю вдоль дуги L. Мы не приводим здесь доказательство этого общего утверждения[2], так как нашей принципиальной целью было построение примера возможности раздвоения изометрического погружения. Но если метрика отрицательной кривизны в окрестности данной внутренней точки области ее задания зафиксирована, то вопрос о возможности ее реализации двумя поверхностями таким образом, чтобы они совпадали в одной "половине"окрестности и различались в другой ее "половине"(конечно, с линией достаточно гладкого сопряжения в пространстве вдоль общей асимптотической кривой) остается открытым.

Замечание 2. *Обобщение и уточнение теоремы Jellett'а в случае поверхностей отрицательной кривизны должно выглядеть, на наш взгляд, следующим образом:*

1) Обобщение *состоит в ослаблении условия аналитичности до естественной гладкости класса C^2 или C^3.*

2) Необходимость ее уточнения *вызывается тем, что если была закреплена неасимтотическая кривая L, то хотя в ее достаточно малой окрестности поверхность с данной метрикой единственна, но на ней могут появиться (если есть участки с неположительной кривизной) асиммптотические линии, проходящие через рассматриваемую точку M_0, и через каждую из которых поверхность может быть продолжена изометрически по крайней мере двумя способами.*

Получается, что к точке M_0 могут примыкать еще поверхности, которые в областях, сколь угодно близких к M_0, имеют ту же метрику, что и исходная поверхность. Эта ситуация показывает нетривиальность вопроса о возможности изометрического "раздвоения"поверхности вдоль ее асимптотической линии при заранее заданной метрики на раздваиваемой части, причем раздвоение теоретически может происходить как в сторону "от"кривой L, так и в ее сторону. Поэтому следует ожидать, что должен быть верен аналог ситуации с б.м. изгибаниями, описанной в книге [6], гл.5, $ 3, п.4, а именно, если на поверхности зафиксирована неасимтотическая дуга L, и через ее концы A и B проведены асимптотические линии разных семейств, пересекающиеся в некоторой точке C, то при достаточной малости дуги L в пределах треугольника ABC поверхность с данной метрикой единственна.

[2] В случаях поверхности вида $z = xy + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ с достаточно малыми коэффициентами a, b, c, d построение нужного поля б.м.изгибания проводится явными формулами.

Замечание 3. *В случае нулевой кривизны продолжение изометрического погружения возможно бесчисленным множеством способов, например, для цилиндрической поверхности достаточно построить семейство направляющих плоских линий с общей дугой. Но вопрос о возможности построения трех изометричных поверхностей с общей областью является открытым.*

References

[1] I.Kh. Sabitov, *Lokal'naya teoriya izgibaniy poverkhnostey*, VINITI, Seriya Itogi nauki i tekhniki. Sovremennyye problemy matematiki. Fundamental'nyye napravleniya, **48**: Geometriya-3, (1989), 196–270. MR1039820

[2] Ph. Hartman, L. Nirenberg, *On spherical image maps whose Jacobians do not change sign*, Amer.J. Math., **81**:4 (1959), 901–920. MR0126812

[3] V.T. Fomenko, *Izgibaniye poverkhnostey s sokhraneniyem tochek kongruentnosti*, Matem. sbornik, **66**:1 (1965), 127–141. MR0172188

[4] Ph. Hartman, A. Wintner, *On hyperbolic partial differential equations*, Amer.J. Math., **74**:4 (1952), 834–876. MR0051413

[5] J. Jellett, *On the properties of inextensible surfaces*, Trans. Royal Irish Academy, **22** (1849), 343–377.

[6] I.N. Vekua, *Obobshchennyye analiticheskiye funktsii*, M.: Fizmatgiz, 1959. MR0108572

Idzhad Kh. Sabitov
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory
119991, Moscow, Russia
E-mail address: isabitov@mail.ru