S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 894–905 (2018) УДК 517.955.8

DOI 10.17377/semi.2018.15.077 MSC 35B40

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Л.Н. БОНДАРЬ

Abstract. In the paper we investigate the asymptotic behavior as $t \to \infty$ of a solution to the Cauchy problem for one Sobolev type system with a right-hande side. The form of the limit vector-function is established and the convergence rate is obtained.

Keywords: Sobolev type system, Sobolev system, asymptotic behavior of solution.

1. Постановка задачи

В работе рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений соболевского типа с правой частью:

$$\begin{cases} \triangle u_t^1 - u_{x_1x_2}^1 - u_{x_2x_2}^2 - u_{x_3x_3}^2 = e^{i\lambda t} f^1(x), \quad t > 0, \ x \in R^3, \\ \triangle u_t^2 + u_{x_1x_1}^1 + u_{x_3x_3}^1 + u_{x_1x_2}^2 = e^{i\lambda t} f^2(x), \\ \triangle u_t^3 - u_{x_2x_3}^1 + u_{x_1x_3}^2 = e^{i\lambda t} f^3(x), \\ u^k|_{t=0} = u_0^k(x), \qquad k = 1, 2, 3, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа по x, $f_0^k(x)$, $u_0^k(x) \in C_0^\infty(R^3)$, $\lambda > 0$ — параметр.

К изучению этой задачи можно свести исследование задачи Коши для системы Соболева [1]

$$\begin{cases} u_t - [u, \omega] + \nabla P = e^{i\lambda t} G(x), \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \omega = (0, 0, 1), \end{cases} \tag{1.2}$$

Bondar, L.N., Asymptotic properties of a solution to the Cauchy problem for one Sobolev type system.

Поступила 17 июля 2018 г., опубликована 17 августа 2018 г.

при соленоидальных начальных данных, где

$$\begin{pmatrix} D^2_{x_2}+D^2_{x_3} & -D^2_{x_1x_2} & -D^2_{x_1x_3} \\ -D^2_{x_1x_2} & D^2_{x_1}+D^2_{x_3} & -D^2_{x_2x_3} \\ -D^2_{x_1x_3} & -D^2_{x_2x_3} & D^2_{x_1}+D^2_{x_2} \end{pmatrix} G(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ f^3(x) \end{pmatrix},$$

применяя теорему об изоморфизме [2] для некоторого класса матричных эллиптических операторов.

Согласно [3] норма весового соболевского пространства $W^1_{p,1}(R^3)$, $1 < p < \infty$, определяется следующим образом

$$\|v(x),\, W^1_{p,1}(R^3)\| = \left\| \frac{v(x)}{1+|x|},\, L_p(R^3) \right\| + \sum_{j=1}^{3} \left\| D_{x_j} v(x),\, L_p(R^3) \right\|.$$

Из работы [2] следует, что задача (1.1) однозначно разрешима в классе:

$$\begin{aligned} &u^k(t,\,x) \in C^1([0,\infty); W^1_{p,1}(R^3)), \quad D^\beta_x u^k(t,\,x) \in C^1([0,\infty); L_p(R^3)), \\ &1 < p < 3/2, \quad |\beta| = 2, \quad k = 1,2,3. \end{aligned} \tag{1.3}$$

А поскольку $u^k_0(x), f^k(x) \in C^\infty_0(R^3)$, то нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} &D^\beta_x u^k(t,\,x) \in C^l([0,\infty); L_p(R^3)), \\ &|\beta| > 2, \quad l \geq 1, \quad 1 < p < 3/2, \quad k = 1,2,3. \end{aligned}$$

Решение задачи Коши (1.1) можно представить в виде суммы двух решений:

$$u(t,x,\lambda) = u_{u_0}(t,x) + u_f(t,x,\lambda), \tag{1.4}$$

где $u_{u_0}(t,x)$ — решение задачи Коши (1.1) при $f(x) = (f^1(x), f^2(x), f^3(x))^T \equiv 0$, $u_f(t,x,\lambda)$ — решение задачи (1.1) при $u_0(x) = (u^1_0(x), u^2_0(x), u^3_0(x))^T \equiv 0$.

Поведение при $t \to \infty$ решения $u_{u_0}(t,x)$ было изучено в [4] в случае соленоидальных начальных данных и в работе [5] в случае, когда $\operatorname{div} u_0(x) \neq 0$.

Наша цель — изучение асимптотического поведения при $t \to \infty$ решения $u_f(t,x,\lambda)$, то есть решения задачи Коши (1.1) при $u_0(x) \equiv 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\lambda > 1$, $u_0(x) \equiv 0$. Предположим, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{div} f(x', x_3)\, dx_3 \equiv 0, \tag{1.5}$$

тогда решение задачи Коши (1.1) *представимо в виде*

$$u(t,x,\lambda) = e^{i\lambda t} v(x,\lambda) + \widetilde{u}(t,x,\lambda), \tag{1.6}$$

где $v(x,\lambda)$ — решение эллиптической системы

$$i\lambda \triangle v + \begin{pmatrix} -D^2_{x_1x_2} & -(D^2_{x_2}+D^2_{x_3}) & 0 \\ D^2_{x_1}+D^2_{x_3} & D^2_{x_1x_2} & 0 \\ -D^2_{x_2x_3} & D^2_{x_1x_3} & 0 \end{pmatrix} v = f(x),$$

стремящееся к нулю при $|x| \to \infty$. Для компонент вектор-функции $\widetilde{u}(t,x,\lambda)$ на любом компакте $K \subset R^3$ имеют место оценки

$$\sup_{x\in K} \left| \widetilde{u}^j(t,x,\lambda) \right| \leq \frac{c(K)}{t}, \quad t \gg 1,\; j = 1,2,$$

$$\sup_{x\in K} \left| \widetilde{u}^3(t,x,\lambda) - \omega^3(x,\lambda) \right| \leq \frac{c(K)}{t}, \quad t \gg 1,$$

$$\omega^3(x,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{R^3} e^{ix\xi}\frac{1}{\lambda|\xi|^2}\left[\int\limits_{R^3} e^{-iy'\xi'}\frac{1-e^{-iy_3\xi_3}}{\xi_3}\operatorname{div} f(y)\,dy\right]d\xi, \tag{1.7}$$

где $\xi = (\xi', \xi_3)$, $c(K) > 0$ — *константа, зависящая от* K, f.

Замечание. Результаты об асимптотическом поведении при $t \to \infty$ решения задачи Коши для системы Соболева (1.2) в случае $G(x) \neq 0$, $\operatorname{div} G(x) \equiv 0$, были получены в работе [6].

2. Построение решения задачи Коши

С помощью преобразования Фурье по x нетрудно выписать формулы для решения задачи (1.1) из класса (1.3). При $u_0(x) \equiv 0$ формула решения (1.4) принимает следующий вид

$$u(t,x,\lambda) \equiv u_f(t,x,\lambda), \tag{2.1}$$

$$u_f(t,x,\lambda) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3} e^{ix\xi}\left(\int\limits_0^t Y(t,\xi)Y^{-1}(s,\xi)\frac{e^{i\lambda s}\widehat{f}(\xi)}{|\xi|^2}\,ds\right)d\xi, \quad \lambda > 0,$$

где $Y(t,\xi)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} D_t Y + \dfrac{1}{|\xi|^2}\begin{pmatrix} -\xi_1\xi_2 & -(\xi_2^2+\xi_3^2) & 0 \\ \xi_1^2+\xi_3^2 & \xi_1\xi_2 & 0 \\ -\xi_2\xi_3 & \xi_1\xi_3 & 0 \end{pmatrix} Y = 0, \quad \xi \in R^3\backslash\{0\}, \\ Y|_{t=0} = E. \end{cases}$$

Доказательство теоремы основано на анализе явных формул решения (2.1). При выводе асимптотического представления для решения при $t \to \infty$ мы используем вариант метода стационарной фазы, изложенного в [7, гл. 3].

3. Доказательство теоремы 1

При $\lambda > 1$ решение можно представить в виде

$$u(t,x,\lambda) = e^{i\lambda t}v(x,\lambda) + u_1(t,x,\lambda) + u_2(t,x,\lambda) + u_3(t,x,\lambda) + u_4(t,x,\lambda), \tag{3.1}$$

где

$$v(x,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3}\frac{e^{ix\xi}}{|\xi|^2(\xi_3^2-\lambda^2|\xi|^2)}$$

$$\times\begin{pmatrix} -(i\lambda|\xi|^2+\xi_1\xi_2)\widehat{f}^1(\xi) - (\xi_2^2+\xi_3^2)\widehat{f}^2(\xi) \\ (\xi_1^2+\xi_3^2)\widehat{f}^1(\xi) + (-i\lambda|\xi|^2+\xi_1\xi_2)\widehat{f}^2(\xi) \\ -i\lambda|\xi|^2\widehat{f}^3(\xi) + \dfrac{\xi_3}{\lambda}\widehat{\operatorname{div} f}(\xi) + \xi_3(-\xi_2\widehat{f}^1(\xi)+\xi_1\widehat{f}^2(\xi)) \end{pmatrix} d\xi,$$

$$u_1(t,x,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3}\frac{e^{ix\xi}}{|\xi|(\xi_3^2-\lambda^2|\xi|^2)}\sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)$$

$$\times\begin{pmatrix} \xi_3\left(i\lambda\widehat{f}^2(\xi) - \widehat{f}^1(\xi) + \dfrac{\xi_2}{\lambda|\xi|^2}\widehat{\operatorname{div} f}(\xi)\right) - i\lambda\xi_2\widehat{f}^3(\xi) \\ -\xi_3\left(i\lambda\widehat{f}^1(\xi) + \widehat{f}^2(\xi) + \dfrac{\xi_1}{\lambda|\xi|^2}\widehat{\operatorname{div} f}(\xi)\right) + i\lambda\xi_1\widehat{f}^3(\xi) \\ (i\lambda\xi_2+\xi_1)\widehat{f}^1(\xi) + (\xi_2-i\lambda\xi_1)\widehat{f}^2(\xi) \end{pmatrix} d\xi,$$

$$u_2(t,x,\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3}\frac{e^{ix\xi}}{|\xi|^2(\xi_3^2-\lambda^2|\xi|^2)}\cos\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)$$

$$\times\left(\begin{array}{c}(i\lambda|\xi|^2+\xi_1\xi_2)\widehat{f}^1(\xi)+(\xi_2^2+\xi_3^2)\widehat{f}^2(\xi)\\ -(\xi_1^2+\xi_3^2)\widehat{f}^1(\xi)+(i\lambda|\xi|^2-\xi_1\xi_2)\widehat{f}^2(\xi)\\ i\lambda|\xi|^2\widehat{f}^3(\xi)-\dfrac{\xi_3}{\lambda}\widehat{\operatorname{div}f}(\xi)+\xi_3(\xi_2\widehat{f}^1(\xi)-\xi_1\widehat{f}^2(\xi))\end{array}\right)d\xi,$$

$$u_3(t,x,\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3}e^{ix\xi}\frac{1}{\lambda|\xi|^2\xi_3}\left[\cos\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)-1\right]\left(\begin{array}{c}0\\0\\ \widehat{\operatorname{div}f}(\xi)\end{array}\right)d\xi,$$

$$u_4(t,x,\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3}e^{ix\xi}\frac{1}{\lambda|\xi|^3\xi_3}\sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)\left(\begin{array}{c}-\xi_2\widehat{\operatorname{div}f}(\xi)\\ \xi_1\widehat{\operatorname{div}f}(\xi)\\0\end{array}\right)d\xi.$$

В следующих леммах мы изучим асимптотическое поведение при $t\to\infty$ вектор-функций $u_1(t,x,\lambda)$, $u_2(t,x,\lambda)$, $u_3(t,x,\lambda)$, $u_4(t,x,\lambda)$.

Лемма 1. *Для компонент вектор-функции $u_1(t,x,\lambda)$ на любом компакте $K\subset R^3$ выполнены оценки*

$$\sup_{x\in K}|u_1^j(t,x,\lambda)|\le\frac{c(K)}{t},\quad t\gg1,\quad j=1,2,3,\tag{3.2}$$

где $c(K)$ — константа, зависящая от K, f.

Доказательство. Для всех компонент $u_1(t,x,\lambda)=\left(\begin{array}{c}u_1^1(t,x,\lambda)\\u_1^2(t,x,\lambda)\\u_1^3(t,x,\lambda)\end{array}\right)$ из (3.1) рассуждения аналогичные, для определенности рассмотрим функцию $u_1^1(t,x,\lambda)$. Представим ее в виде суммы нескольких слагаемых:

$$u_1^1(t,x,\lambda)=u_{1,1}^1(t,x,\lambda)+u_{1,2}^1(t,x,\lambda)+u_{1,3}^1(t,x,\lambda),\tag{3.3}$$

где

$$u_{1,1}^1(t,x,\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3}e^{ix\xi}\frac{F[(I+\triangle^2)f^1](\xi)}{1+|\xi|^4}\frac{\xi_3\left(\frac{i\xi_1\xi_2}{\lambda|\xi|^2}-1\right)}{|\xi|(\xi_3^2-\lambda^2|\xi|^2)}\sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)d\xi,$$

$$u_{1,2}^1(t,x,\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3}e^{ix\xi}\frac{F[(I+\triangle^2)f^2](\xi)}{1+|\xi|^4}\frac{i\xi_3\left(\frac{\xi_2^2}{\lambda|\xi|^2}+\lambda\right)}{|\xi|(\xi_3^2-\lambda^2|\xi|^2)}\sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)d\xi,$$

$$u_{1,3}^1(t,x,\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3}e^{ix\xi}\frac{F[(I+\triangle^2)f^3](\xi)}{1+|\xi|^4}\frac{i\xi_2}{\lambda|\xi|^3}\sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)d\xi,$$

F — оператор Фурье, т.е. $\widehat{\varphi}(\xi)=F[\varphi](\xi)$.

Рассмотрим первое слагаемое из (3.3) и представим в виде

$$u_{1,1}^1(t,x,\lambda)=u_{1,1,1}^1(t,x,\lambda)+u_{1,1,2}^1(t,x,\lambda),\tag{3.4}$$

где

$$u_{1,1,1}^1(t,x,\lambda)=\frac{-1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3}e^{ix\xi}\frac{F[(I+\triangle^2)f^1](\xi)}{1+|\xi|^4}\frac{\xi_3}{|\xi|(\xi_3^2-\lambda^2|\xi|^2)}\sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)d\xi,$$

$$u^1_{1,1,2}(t,x,\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3} e^{ix\xi}\frac{F[(I+\triangle^2)f^1](\xi)}{1+|\xi|^4}\frac{i\xi_1\xi_2\xi_3}{\lambda|\xi|^3(\xi_3^2-\lambda^2|\xi|^2)}\sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)d\xi.$$

Оценим $u^1_{1,1,1}(t,x,\lambda)$ из (3.4). Переходя к сферическим координатам

$$\xi_3=\rho\cos\theta_1,\quad \xi_2=\rho\sin\theta_1\cos\theta_2,\ \xi_1=\rho\sin\theta_1\sin\theta_2, \tag{3.5}$$

и учитывая, что якобиан преобразования имеет вид

$$J=\rho^2\sin\theta_1,$$

получим

$$u^1_{1,1,1}(t,x,\lambda)=\frac{-1}{(2\pi)^3}\int\limits_{R^3}\Phi_1(y)\Big[\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^\pi\frac{1}{1+\rho^4}$$
$$\times e^{i(x-y)\xi(\rho,\,\theta_1,\theta_2)}\frac{\sin(t\cos\theta_1)}{\cos^2\theta_1-\lambda^2}\cos\theta_1\sin\theta_1 d\theta_1\,d\theta_2 d\rho\Big]dy,$$

где

$$\Phi_1(y)=(I+\triangle^2)f^1(y). \tag{3.6}$$

Рассмотрим следующий интеграл при $t\gg 1$

$$J_1=\int\limits_0^\pi e^{i(x-y)\xi'(\rho,\,\theta_1,\theta_2)}\frac{\sin(t\cos\theta_1)}{\cos^2\theta_1-\lambda^2}\cos\theta_1\sin\theta_1\,d\theta_1.$$

Используя тождество

$$\sin(t\cos\theta_1)=\frac{1}{t\sin\theta_1}D_{\theta_1}\cos(t\cos\theta_1) \tag{3.7}$$

и интегрируя по частям, учитывая, что

$$\cos^2\theta_1-\lambda^2\neq 0,\quad \lambda>1,$$

получим

$$J_1=t^{-1}\int\limits_0^\pi e^{i(x-y)\xi(\rho,\,\theta_1,\theta_2)}\frac{1}{\cos^2\theta_1-\lambda^2}\cos\theta_1 D_{\theta_1}(\cos(t\cos\theta_1))\,d\theta_1$$
$$=t^{-1}e^{i(x-y)\xi(\rho,\,\theta_1,\theta_2)}\frac{1}{\cos^2\theta_1-\lambda^2}\cos\theta_1\cos(t\cos\theta_1)\Big|_0^\pi$$
$$-t^{-1}\int\limits_0^\pi\cos(t\cos\theta_1)D_{\theta_1}\left(e^{i(x-y)\xi(\rho,\,\theta_1,\theta_2)}\frac{\cos\theta_1}{\cos^2\theta_1-\lambda^2}\right)d\theta_1.$$

Из этой формулы вытекает оценка

$$\sup_{x\in K}|J_1|\le\frac{c(K)}{t}(1+\rho)(1+|y|),\quad t\gg 1. \tag{3.8}$$

Следовательно,

$$\sup_{x\in K}|u^1_{1,1,1}(t,x,\lambda)|\le\frac{c(K)}{t},\quad t\gg 1. \tag{3.9}$$

Проводя аналогичные рассуждения для $u^1_{1,1,2}(t,x,\lambda)$ из (3.4), $u^1_{1,2}(t,x,\lambda)$, $u^1_{1,3}(t,x,\lambda)$ из (3.3), учитывая (3.9), получим оценку (3.2).

Лемма доказана. □

Проведем оценку для второго слагаемого $u_2(t,x,\lambda)$.

Лемма 2. *Для компонент вектор-функции $u_2(t,x,\lambda)$ на любом компакте $K \subset R^3$ выполнены оценки*

$$\sup_{x\in K} |u_2^j(t,x,\lambda)| \le \frac{c(K)}{t}, \quad t \gg 1, \quad j = 1,2,3, \tag{3.10}$$

где $c(K)$ — константа, зависящая от K, f.

Доказательство. Для определенности рассмотрим первую компоненту вектор-функции $u_2(t,x,\lambda) = \begin{pmatrix} u_2^1(t,x,\lambda) \\ u_2^2(t,x,\lambda) \\ u_2^3(t,x,\lambda) \end{pmatrix}$ из (3.1), для нее проведем все рассуждения. Представим ее в виде двух слагаемых:

$$u_2^1(t,x,\lambda) = u_{2,1}^1(t,x,\lambda) + u_{2,2}^1(t,x,\lambda), \tag{3.11}$$

где

$$u_{2,1}^1(t,x,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{R^3} e^{ix\xi} \frac{F[(I+\triangle^2)f^1](\xi)}{1+|\xi|^4} \frac{i\lambda|\xi|^2 + \xi_1\xi_2}{|\xi|^2(\xi_3^2 - \lambda^2|\xi|^2)} \cos\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right) d\xi,$$

$$u_{2,2}^1(t,x,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{R^3} e^{ix\xi} \frac{F[(I+\triangle^2)f^2](\xi)}{1+|\xi|^4} \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{|\xi|^2(\xi_3^2 - \lambda^2|\xi|^2)} \cos\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right) d\xi.$$

Рассмотрим первое слагаемое из (3.11) и представим в виде

$$u_{2,1}^1(t,x,\lambda) = u_{2,1,1}^1(t,x,\lambda) + u_{2,1,2}^1(t,x,\lambda), \tag{3.12}$$

где

$$u_{2,1,1}^1(t,x,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{R^3} e^{ix\xi} \frac{F[(I+\triangle^2)f^1](\xi)}{1+|\xi|^4} \frac{i\lambda}{\xi_3^2 - \lambda^2|\xi|^2} \cos\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right) d\xi,$$

$$u_{2,1,2}^1(t,x,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{R^3} e^{ix\xi} \frac{F[(I+\triangle^2)f^1](\xi)}{1+|\xi|^4} \frac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2(\xi_3^2 - \lambda^2|\xi|^2)} \cos\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right) d\xi.$$

Проведем оценку для $u_{2,1,1}^1(t,x,\lambda)$ из (3.12). Переходя к сферическим координатам (3.5), получим

$$u_{2,1,1}^1(t,x,\lambda) = \frac{i\lambda}{(2\pi)^3} \int\limits_{R^3} \Phi_1(y) \Big[\int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{1}{1+\rho^4}$$

$$\times e^{i(x-y)\xi(\rho,\,\theta_1,\theta_2)} \frac{\sin(t\cos\theta_1)}{\cos^2\theta_1 - \lambda^2} \sin\theta_1 d\theta_1\, d\theta_2 d\rho\Big] dy, \tag{3.13}$$

где $\Phi_1(y)$ из (3.6).

Рассмотрим следующий интеграл при $t \gg 1$

$$J_2 = \int\limits_0^\pi e^{i(x-y)\xi'(\rho,\,\theta_1,\theta_2)} \frac{\cos(t\cos\theta_1)}{\cos^2\theta_1 - \lambda^2} \sin\theta_1\, d\theta_1.$$

Используя тождество

$$\cos(t\cos\theta_1) = -\frac{1}{t\sin\theta_1} D_{\theta_1} \sin(t\cos\theta_1) \tag{3.14}$$

и интегрируя по частям, учитывая, что

$$\cos^2\theta_1 - \lambda^2 \ne 0, \quad \lambda > 1,$$

получим

$$J_2 = -t^{-1}\int\limits_0^\pi e^{i(x-y)\xi(\rho,\,\theta_1,\theta_2)}\frac{1}{\cos^2\theta_1-\lambda^2}D_{\theta_1}(\sin(t\cos\theta_1))\,d\theta_1$$

$$= -t^{-1}e^{i(x-y)\xi(\rho,\,\theta_1,\theta_2)}\frac{1}{\cos^2\theta_1-\lambda^2}\sin(t\cos\theta_1)\Big|_0^\pi$$

$$+t^{-1}\int\limits_0^\pi \sin(t\cos\theta_1)D_{\theta_1}\left(e^{i(x-y)\xi(\rho,\,\theta_1,\theta_2)}\frac{1}{\cos^2\theta_1-\lambda^2}\right)d\theta_1.$$

Следовательно,

$$\sup_{x\in K}|J_2| \le \frac{c(K)}{t}(1+\rho)(1+|y|), \quad t\gg 1.$$

Учитывая эту оценку, (3.13) и вид J_2, получим

$$\sup_{x\in K}|u^1_{2,1,1}(t,x,\lambda)| \le \frac{c(K)}{t}, \quad t\gg 1.$$

Проводя аналогичные рассуждения для $u^1_{2,1,2}(t,x,\lambda)$ из (3.12), $u^1_{2,2}(t,x,\lambda)$ из (3.11), получим оценку (3.10).

Лемма доказана. □

Проведем оценку для третьего слагаемого $u_3(t,x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3^3(t,x,\lambda)\end{pmatrix}$ из (3.1).

Представим функцию $u_3^3(t,x,\lambda)$ в следующем виде:

$$u_3^3(t,x,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3} e^{ix\xi}\frac{F[(I+\triangle^2)\mathrm{div}\, f](\xi)}{1+|\xi|^4}\frac{1}{\lambda|\xi|^2\xi_3}\cos\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)d\xi$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3} e^{ix\xi}\widehat{\mathrm{div}\, f}(\xi)\frac{1}{\lambda|\xi|^2\xi_3}\,d\xi$$

$$= u^3_{3,1}(t,x,\lambda)+u^3_{3,2}(t,x,\lambda)+u^3_{3,3}(x,\lambda)+\omega^3(x,\lambda), \tag{3.15}$$

где

$$u^3_{3,1}(t,x,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3} e^{ix\xi}\frac{F[(I+\triangle^2)\mathrm{div}\, f](\xi',0)}{1+|\xi|^4}\frac{1}{\lambda|\xi|^2\xi_3}\cos\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)d\xi,$$

$$u^3_{3,2}(t,x,\lambda) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int\limits_{R^3} e^{ix\xi}\frac{1}{\lambda|\xi|^2(1+|\xi|^4)}\cos\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)$$

$$\times\left[\int\limits_{R^3} e^{-iy'\xi'}\left(\int\limits_0^1 e^{-i\alpha y_3\xi_3}\,d\alpha\right)y_3(I+\triangle^2)\mathrm{div}\, f(y)\,dy\right]d\xi,$$

$$u^3_{3,3}(x,\lambda) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{R^3} e^{ix\xi}\widehat{\mathrm{div}\, f}(\xi',0)\frac{1}{\lambda|\xi|^2\xi_3}\,d\xi,$$

функция $\omega^3(x,\lambda)$ определена в (1.7).

Поскольку для вектор-функции f выполнено условие (1.5), следовательно,

$$\widehat{\operatorname{div} f}(\xi', 0) \equiv 0, \quad F[(I+\triangle^2)\operatorname{div} f](\xi', 0) \equiv 0, \quad u^3_{3,1}(t,x,\lambda) \equiv 0, \qquad u^3_{3,3}(x,\lambda) \equiv 0.$$

Учитывая это, имеем

$$u^3_3(t,x,\lambda) \equiv u^3_{3,2}(t,x,\lambda) + \omega^3(x,\lambda). \tag{3.16}$$

В следующей лемме содержится оценка для функции $u^3_{3,2}(t,x,\lambda)$.

Лемма 3. *Для функции $u^3_{3,2}(t,x,\lambda)$ на любом компакте $K \subset R^3$ имеет место оценка*

$$\sup_{x\in K} |u^3_{3,2}(t,x,\lambda)| \le \frac{c(K)}{t}, \quad t \gg 1, \tag{3.17}$$

где $c(K)$ — константа, зависящая от K, f.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u^3_{3,2}(t,x,\lambda)$ из (3.15). Введем обозначение

$$\Phi_2(y) = y_3(I+\triangle^2)\operatorname{div} f(y), \tag{3.18}$$

тогда, переходя к сферическим координатам (3.5), имеем

$$u^3_{3,2}(t,x,\lambda) = \frac{-i}{\lambda(2\pi)^3}\int\limits_{R^3}\Phi_2(y)\Big[\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{1}{1+\rho^4}$$

$$\times e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)}\left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\,d\alpha\right)\cos(t\cos\theta_1)\sin\theta_1 d\theta_1 d\theta_2 d\rho\Big]dy.$$

Рассмотрим следующий интеграл при $t \gg 1$

$$J_3 = \int\limits_0^\pi e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)}\left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\,d\alpha\right)\cos(t\cos\theta_1)\sin\theta_1\,d\theta_1.$$

Учитывая тождество (3.14) и интегрируя по частям, получим оценку

$$\sup_{x\in K}|J_3| \le \frac{c(K)}{t}(1+\rho)(1+|y|), \quad t\gg 1.$$

Следовательно, имеет место (3.17).

Лемма доказана. □

Из (3.16), (3.17) получим следующее утверждение.

Лемма 4. *Для функции $u^3_3(t,x,\lambda)$ на любом компакте $K \subset R^3$ имеет место оценка*

$$\sup_{x\in K}|u^3_3(t,x,\lambda) - \omega^3(x,\lambda)| \le \frac{c(K)}{t}, \quad t\gg 1, \tag{3.19}$$

где функция $\omega^3(x,\lambda)$ определена в (1.7) и $c(K)$ — константа, зависящая от K, f.

Проведем оценку для вектор-функции $u_4(t,x,\lambda) = \begin{pmatrix} u_4^1(t,x,\lambda) \\ u_4^2(t,x,\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$ из (3.1).

Представим функцию $u_4^1(t,x,\lambda)$ в следующем виде:

$$u_4^1(t,x,\lambda) = \frac{-1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{R^3} e^{ix\xi} \frac{F[(I+\triangle^2)\mathrm{div}\, f](\xi)}{1+|\xi|^4} \frac{\xi_2}{\lambda|\xi|^3\xi_3} \sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right) d\xi$$

$$= u_{4,1}^1(t,x,\lambda) + u_{4,2}^1(t,x,\lambda), \tag{3.20}$$

где

$$u_{4,1}^1(t,x,\lambda) = \frac{-1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{R^3} e^{ix\xi} \frac{F[(I+\triangle^2)\mathrm{div}\, f](\xi',0)}{1+|\xi|^4} \frac{\xi_2}{\lambda|\xi|^3\xi_3} \sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right) d\xi,$$

$$u_{4,2}^1(t,x,\lambda) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int\limits_{R^3} e^{ix\xi} \frac{\xi_2}{\lambda|\xi|^3(1+|\xi|^4)} \sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)$$

$$\times \left[\int\limits_{R^3} e^{-iy'\xi'} \left(\int\limits_0^1 e^{-i\alpha y_3\xi_3}\, d\alpha\right) y_3(I+\triangle^2)\mathrm{div}\, f(y)\, dy\right] d\xi.$$

Поскольку для вектор-функции f выполнено условие (1.5), следовательно,

$$F[(I+\triangle^2)\mathrm{div}\, f](\xi',0) \equiv 0, \quad u_{4,1}^1(t,x,\lambda) \equiv 0.$$

Учитывая это, имеем

$$u_4^1(t,x,\lambda) \equiv u_{4,2}^1(t,x,\lambda). \tag{3.21}$$

В следующей лемме содержится оценка для функции $u_4^1(t,x,\lambda)$.

Лемма 5. *Для функции $u_4^1(t,x,\lambda)$ на любом компакте $K \subset R^3$ имеет место оценка*

$$\sup_{x\in K} |u_4^1(t,x,\lambda)| \le \frac{c(K)}{t^{3/2}}, \quad t \gg 1, \tag{3.22}$$

где $c(K)$ — константа, зависящая от K, f.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u_4^1(t,x,\lambda)$ из (3.20),(3.21). Переходя к сферическим координатам (3.5), получим

$$u_4^1(t,x,\lambda) = \frac{i}{\lambda(2\pi)^3} \int\limits_{R^3} \Phi_2(y) \Big[\int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{1}{1+\rho^4} \cos\theta_2$$

$$\times e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)} \left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\, d\alpha\right) \sin(t\cos\theta_1)\sin^2\theta_1 d\theta_1 d\theta_2 d\rho\Big] dy,$$

где функция $\Phi_2(y)$ определена в (3.18).

Рассмотрим следующий интеграл при $t \gg 1$

$$J_4 = \int\limits_0^\pi e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)} \left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\, d\alpha\right) \sin(t\cos\theta_1)\sin^2\theta_1\, d\theta_1.$$

Учитывая тождество (3.7) и интегрируя по частям, получим

$$J_4 = t^{-1}\int\limits_0^\pi e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)}\left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\,d\alpha\right)D_{\theta_1}(\cos(t\cos\theta_1))\sin\theta_1\,d\theta_1.$$

$$= t^{-1}e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)}\left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\,d\alpha\right)\cos(t\cos\theta_1)\sin\theta_1\Big|_0^\pi$$

$$-t^{-1}\int\limits_0^\pi \cos(t\cos\theta_1)D_{\theta_1}\left(e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)}\left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\,d\alpha\right)\sin\theta_1\right)\,d\theta_1.$$

Внеинтегральные слагаемые в этой формуле обращаются в ноль и тогда

$$J_4 = -\frac{1}{t}\int\limits_0^\pi \cos(t\cos\theta_1)D_{\theta_1}\left(e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)}\left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}d\alpha\right)\right)\sin\theta_1 d\theta_1$$

$$= -\frac{1}{t}\int\limits_0^\pi \cos(t\cos\theta_1)e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)}\left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\,d\alpha\right)\cos\theta_1\,d\theta_1$$

$$= J_4^1 + J_4^2. \tag{3.23}$$

Проведем оценки обоих слагаемых J_4^1, J_4^2 отдельно.

Рассмотрим первое слагаемое. Используя тождество (3.14) и интегрируя по частям, получим

$$J_4^1 = \frac{1}{t^2}\int\limits_0^\pi D_{\theta_1}\sin(t\cos\theta_1)D_{\theta_1}\left(e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)}\left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\,d\alpha\right)\right)\,d\theta_1$$

$$= \frac{1}{t^2}\sin(t\cos\theta_1)D_{\theta_1}\left(e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)}\left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\,d\alpha\right)\right)\Big|_0^\pi$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^\pi \sin(t\cos\theta_1)D^2_{\theta_1}\left(e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)}\left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\,d\alpha\right)\right)\,d\theta_1.$$

Из этой формулы вытекает оценка

$$|J_4^1| \le \frac{c(K)}{t^2}(1+\rho^2)(1+|y|^2), \quad t \gg 1. \tag{3.24}$$

Рассмотрим второе слагаемое в (3.23). Представим его в виде трех слагаемых

$$J_4^2 = -\frac{1}{t}\left(\int\limits_0^{t^{-1/2}} + \int\limits_{t^{-1/2}}^{\pi-t^{-1/2}} + \int\limits_{\pi-t^{-1/2}}^{\pi}\right)\cos(t\cos\theta_1)e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)}$$

$$\times\left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\,d\alpha\right)\cos\theta_1\,d\theta_1 = J_4^{2,1} + J_4^{2,2} + J_4^{2,3} \tag{3.25}$$

и оценим их по отдельности.

Очевидно, имеет место следующая оценка

$$|J_4^{2,1} + J_4^{2,3}| \leq \frac{c}{t^{3/2}}, \quad t \gg 1. \tag{3.26}$$

Оценим интеграл $J_4^{2,2}$. Воспользуемся тождеством (3.14) и проинтегрируем по частям, получим

$$J_4^{2,2} = \frac{1}{t^2} \sin(t\cos\theta_1) e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)} \left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\, d\alpha \right) \operatorname{ctg}\theta_1 \Big|_{t^{-1/2}}^{\pi - t^{-1/2}}$$

$$-\frac{1}{t^2} \int\limits_{t^{-1/2}}^{\pi - t^{-1/2}} \sin(t\cos\theta_1) D_{\theta_1} \left(e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)} \left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1} d\alpha \right) \operatorname{ctg}\theta_1 \right) d\theta_1$$

$$= J_4^{2,2,1} + J_4^{2,2,2}. \tag{3.27}$$

В силу того, что при всех достаточно больших t выполнено неравенство

$$|\sin\theta_1| \geq \frac{1}{2t^{1/2}}, \quad \theta_1 \in [t^{-1/2}, \pi - t^{-1/2}],$$

получим

$$|J_4^{2,2,1}| \leq \frac{c}{t^{3/2}}, \quad t \gg 1. \tag{3.28}$$

Оценим второе слагаемое в (3.27), представив его в виде

$$J_4^{2,2,2} = -\frac{1}{t^2} \left(\int\limits_{t^{-1/2}}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi-\delta} + \int\limits_{\pi-\delta}^{\pi - t^{-1/2}} \right) \sin(t\cos\theta_1)$$

$$\times D_{\theta_1} \left(e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\theta_1,\theta_2)} \left(\int\limits_0^1 e^{i(x_3-\alpha y_3)\rho\cos\theta_1}\, d\alpha \right) \operatorname{ctg}\theta_1 \right) d\theta_1$$

$$= J_4^{2,2,2,1} + J_4^{2,2,2,2} + J_4^{2,2,2,3}, \tag{3.29}$$

где $\delta > 0$ — достаточно маленькое фиксированное число такое, что

$$|\sin\theta_1| \geq \frac{\theta_1}{2}, \quad \theta_1 \in [t^{-1/2}, \delta]. \tag{3.30}$$

Учитывая неравенство (3.30), получаем

$$\begin{aligned} |J_4^{2,2,2,1} + J_4^{2,2,2,3}| &\leq \frac{c(K)}{t^{3/2}}(1+\rho)(1+|y|), \\ |J_4^{2,2,2,2}| &\leq \frac{c(K)}{t^2}(1+\rho)(1+|y|), \quad t \gg 1. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Тогда из (3.27)–(3.29), (3.31) вытекает неравенство для интеграла $J_4^{2,2}$

$$\sup_{x\in K} |J_4^{2,2}| \leq \frac{c(K)}{t^{3/2}}(1+\rho)(1+|y|), \quad t \gg 1.$$

Учитывая теперь (3.25), (3.26), получаем

$$|J_4^2| \leq \frac{c(K)}{t^{3/2}}(1+\rho)(1+|y|), \quad t \gg 1.$$

Отсюда в силу (3.23), (3.24) будем иметь

$$\sup_{x\in K} |J_4| \le \frac{c(K)}{t^{3/2}}(1+\rho)(1+|y|), \quad t \gg 1.$$

Следовательно, имеет место (3.22).

Лемма доказана. □

Аналогично доказывается оценка для функции $u_4^2(t,x,\lambda)$ из (3.1).

Лемма 6. *Для функции $u_4^2(t,x,\lambda)$ на любом компакте $K \subset R^3$ имеет место оценка*

$$\sup_{x\in K} |u_4^2(t,x,\lambda)| \le \frac{c(K)}{t^{3/2}}, \quad t \gg 1,$$

где $c(K)$ — константа, зависящая от K, f.

Обозначим через $\widetilde{u}(t,x,\lambda)$ из (1.6) следующее выражение:

$$\widetilde{u}(t,x,\lambda) = u_1(t,x,\lambda) + u_2(t,x,\lambda) + u_3(t,x,\lambda) + u_4(t,x,\lambda).$$

Тогда теорема 1 следует из лемм 1–6, представления (3.1).

Автор выражает благодарность Г. В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

References

[1] Sobolev S. L., *Selected Works. Vol. 1: Equations of Mathematical Physics, Computational Mathematics, and Cubature Formulas.* Edited by G. V. Demidenko and V. Vaskevich. [in Russian], Filial "Geo" Izdat. Sibirsk. Otdel. RAN, Novosibirsk, 2003; English transl. in New York, NY: Springer. xxviii, 2006. MR2265365

[2] Demidenko G. V., *Isomorphic properties of one class of differential operators and their applications*, Sibirsk. Mat. Zh., **42** (2001), 1036–1056; English transl. Siberian Math. J., **42** (2001), 865–883. MR1861632

[3] Demidenko G. V., *Weighted Sobolev spaces and integral operators defined by quasielliptic equations*, Dokl. Acad. Nauk, **334** (1994), 420–423; English transl. in Russian Acad. Sci. Dokl. Math., **49** (1994), 113–118. MR1273672

[4] Maslennikova V. N., *Estimates in L_p and asymptotic behavior of a solution to the Cauchy problem for the Sobolev system as $t \to \infty$*, Trudy Mat. Inst. Steklov, **103** (1968), 117–141. [in Russian] MR0261139

[5] Bondar L.N., *The behavior at infinity of a solution to one Sobolev type system*, Sibirsk. Mat. Zh., **48** (2007), 980-994; English transl. in Siberian Math. J., **48** (2007), 784–797. MR2364620

[6] Maslennikova V. N., Kumar Pal Prodip, *Stabilization and limiting amplitude of the solution of the Cauchy problem for nonhomogeneous Sobolev systems*, Sibirsk. Mat. Zh., **27** (1986), 142–153; English transl. in Siberian Math. J., **27** (1986), 424–433. MR0853893

[7] Uspenskii S. V., Demidenko G. V., and Perepelkin V. G., *Embedding Theorems and Applications to Differential Equations* [in Russian], Novosibirsk: Nauka, 1984. MR0779095

Lina Nikolaevna Bondar
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: b_lina@ngs.ru