S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 906–926 (2018) УДК 517.518

DOI 10.17377/semi.2018.15.078 MSC 31B15

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕФЕКТА ЛИПШИЦЕВА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

А.И. ПАРФЁНОВ

Abstract. We introduce the notion of defect of a Lipschitz cylindrical condenser. It is the difference between the capacity of the condenser and its Ahlfors integral. We calculate the defect approximately for condensers over arbitrary open sets. For a condenser over an inner uniform domain the quantity obtained is comparable to the sum of the squares of the seminorms of the plates in a weighted homogeneous Slobodetskii space. This uses the characterization of inner uniform domains by the following property: every inner metric ball is a centered John domain.

Keywords: Ahlfors integral, capacity, condenser, defect, inner uniform domain, Lipschitz domain.

Введение

Хорошо известно, что поведение конформного отображения $f(z)$ при стремлении z к фиксированной точке границы области определения можно изучать с помощью конформного модуля четырехсторонников. Ради определенности будем говорить о конформном отображении

$$f : \Omega \to \{0 < \operatorname{Im} w < 1\}$$

и конформном модуле $M_{(x_1,x_2)}$ четырехсторонников, высекаемых из односвязной области Ω подходящими поперечными разрезами ϑ_{x_1} и ϑ_{x_2}, лежащими на прямых $\{\operatorname{Re} z = x_1\}$ и $\{\operatorname{Re} z = x_2\}$. Отображение f переводит определяемую

Parfenov, A.I., Approximate calculation of the defect of a Lipschitz cylindrical condenser.

Работа поддержана Советом по грантам Президента Российской Федерации (грант НШ-5913.2018.1).

Поступила 6 июля 2018 г., опубликована 17 августа 2018 г.

разрезами ϑ_x с $x \to +\infty$ бесконечную граничную точку в достижимую граничную точку $w = +\infty$. При некоторых условиях [19, § 3] свойства

$$\lim_{z \in \vartheta_{x_1}\,:\,x_1 \to +\infty} \bigl\{\operatorname{Re} f(z) - M_{(x_0,x_1)}\bigr\} \in \mathbb{R}, \tag{1a}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sup_{z_1, z_2 \in \vartheta_x} \bigl|\operatorname{Re} f(z_1) - \operatorname{Re} f(z_2)\bigr| = 0, \tag{1b}$$

$$\lim_{x_3 > x_2 > x_1 \to +\infty} \bigl|M_{(x_1,x_3)} - M_{(x_1,x_2)} - M_{(x_2,x_3)}\bigr| = 0 \tag{1c}$$

равносильны. Значит, поведение $\operatorname{Re} f$ можно изучать с помощью конформного модуля. Свойства (1) верны, например, если f имеет угловую производную, или f изогонально, или $\operatorname{Re} f$ сравнима с интегралом Альфорса, т.е.

$$\lim_{z \in \vartheta_{x_1}\,:\,x_1 \to +\infty} \left\{\operatorname{Re} f(z) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\operatorname{diam} \vartheta_x}\right\} \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Модуль четырехсторонника является функционалом области и может изучаться с пертурбативной точки зрения. Оценки погрешности формул первого порядка и выражения для второй вариации (гессиана) функционалов области иногда содержат квадрат полунормы возмущения в однородном пространстве Соболева — Слободецкого $\dot{H}^{1/2} = b_2^{1/2}$ [17, § 9]. Настоящая статья посвящена получению результата такого рода для p-емкости n-мерного липшицева цилиндрического конденсатора. Интеграл Альфорса $\int_\Xi \theta^{1-p}\, d\xi$ играет роль первого приближения для емкости. При $p = n = 2$ получаем приближенную формулу для модуля липшицева четырехсторонника. Применение этого частного случая к асимптотике конформных отображений отложено до отдельной публикации, где планируется, в частности, найти явные критерии в терминах области Ω для выполнения свойств (1) и (2).

Статья состоит из введения и пяти параграфов. В § 1 изучается функция Юнга $f_p(s)$, сравнимая с s^2 при малых значениях s и с s^p при бóльших. В § 2 доказана приближенная формула

$$U = \operatorname{Cap}(\omega_0, \omega_1, p) - \int_\Xi \frac{d\xi}{\{\omega_1 - \omega_0\}^{p-1}} \approx V(\omega_0) + V(\omega_1)$$

для *дефекта* U цилиндрического конденсатора с локально липшицевыми обкладками $\omega_0, \omega_1 : \Xi \to \mathbb{R}$, т.е. для разности между его емкостью и его интегралом Альфорса. Величина $V(u)$ определяется с помощью функции $f_p(s)$ и идей из теории интерполяции банаховых пространств, что позволяет оперировать вдоль вертикальных отрезков и избавиться от любых ограничений на регулярность открытого множества Ξ. Мы также формулируем тривиальное следствие о первой вариации емкости.

В § 3 внутренние равномерные области евклидова пространства охарактеризованы условием, что произвольный шар относительно внутренней метрики является центрированной областью Джона. В § 4 сформулировано неравенство Пуанкаре с выпуклой функцией над центрированной областью Джона. В § 5 величина $V(u)$ для внутренней равномерной области Ξ приближенно найдена в явном виде, так что дефект U оказывается сравним с весовым аналогом суммы квадратов $\|\omega_0\|^2_{b_2^{1/2}} + \|\omega_1\|^2_{b_2^{1/2}}$.

Соглашения. Буквой c с возможным индексом мы обозначаем различные положительные постоянные, перечисляя в скобках все числовые параметры, от которых эти постоянные зависят. Символ $C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ означает множество всех локально липшицевых вещественных функций в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Для $u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ градиент $\nabla u = (D_i u)_{i=1}^d$ определен почти всюду (п.в.) по теореме Радемахера. Диаметр $\operatorname{diam} E$ множества $E \subset \mathbb{R}^d$ и расстояние $\operatorname{dist}(x, E)$ от $x \in \mathbb{R}^d$ до E определяются по отношению к евклидовой метрике $|x-y|$, а $\overline{E}$ — замыкание множества E. Пусть $f(x-)$ и $f(x+)$ — левый и правый пределы функции f в точке x, $L^p(\Omega)$ — пространства Лебега, а mes — мера Лебега.

1. Функция f_p

Для $1 < p < \infty$ обозначим

$$f(s) = f_p(s) = (1+s^2)^{p/2} - 1, \quad s \geqslant 0.$$

Эта функция строго возрастает и строго выпукла.

Лемма 1. *Пусть $p_0 = \min\{p, 2\}$ и $p_1 = \max\{p, 2\}$. Для $s \geqslant 0$ и $s' \geqslant 0$*

$$f(as) \leqslant a^{p_0} f(s), \quad 0 \leqslant a \leqslant 1, \tag{3}$$

$$f(bs) \leqslant b^{p_1} f(s), \quad 1 \leqslant b < \infty, \tag{4}$$

$$f(s) + f(s') \leqslant f(s+s') \leqslant 2^{p_1-1}\bigl\{f(s) + f(s')\bigr\}. \tag{5}$$

Доказательство. Оценка (3) следует из равенства $f(a0) = a^{p_0} f(0)$ и легко проверяемого неравенства $df(as)/ds \leqslant a^{p_0} f'(s)$. Оценка (4) выводится так же. Отсюда при $s + s' > 0$

$$f(s) + f(s') \leqslant \left(\frac{s}{s+s'}\right)^{p_0} f(s+s') + \left(\frac{s'}{s+s'}\right)^{p_0} f(s+s') \leqslant f(s+s'),$$

$$f(s+s') \leqslant 2^{p_1} f\left(\frac{s+s'}{2}\right) \leqslant 2^{p_1-1}\bigl\{f(s) + f(s')\bigr\}.$$

Лемма 1 доказана. □

Рассмотрим более сложные свойства функции f.

Лемма 2. *Если $r \in \mathbb{R}$ и $s \geqslant 0$, то*

$$\begin{aligned} c(p) f\bigl(|r-1| + s\bigr) \leqslant F(r,s) &= (r^2+s^2)^{p/2} - 1 - p(r-1) \\ &\leqslant c(p) f\bigl(|r-1| + s\bigr). \end{aligned} \tag{6}$$

Если $0 < \theta < \infty$, $g \in L^p(0,\theta)$, $\int_0^\theta g(\tau)\,d\tau = 1$ и $h \in L^p(0,\theta)$, то

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\theta f\left(\frac{\theta}{t}\int_0^t \left|g - \frac{1}{\theta}\right| d\tau + \frac{\theta}{t}\int_0^t |h|\,d\tau\right) dt \\ &\leqslant c(p)\left\{\theta^p \int_0^\theta (g^2+h^2)^{p/2}\,dt - \theta\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Если $|r-1| \geqslant s$, то

$$\begin{aligned} f\bigl(|r-1|+s\bigr) &\leqslant f\bigl(2|r-1|\bigr) \leqslant 2^{p_1} f\bigl(|r-1|\bigr) \leqslant c_1(p) F(r,0) \leqslant c_1 F(r,s) \\ &\leqslant c_1 F\bigl(r, |r-1|\bigr) \leqslant c_2(p) f\bigl(|r-1|\bigr) \leqslant c_2 f\bigl(|r-1|+s\bigr). \end{aligned}$$

Третья и шестая оценки следуют из того, что функции $f\bigl(|r-1|\bigr)$, $F(r,0)$ и

$$F\bigl(r, |r-1|\bigr) = \bigl\{1 + 2(r-1) + 2(r-1)^2\bigr\}^{p/2} - 1 - p(r-1)$$

положительны на $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ и имеют одинаковые степенные порядки при $r\to 1$ и при $r\to\infty$. Если же $q=(p-2)/2$ и $|r-1|<s$, то

$$\begin{gathered}
r^2+s^2<(1+s)^2+s^2\leqslant 2+3s^2<3(1+s^2),\\
1<|r|+s<(|r|+s)^2\leqslant 2r^2+2s^2 \quad\Rightarrow\quad 1+s^2<3(r^2+s^2),
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
f'\bigl(|r-1|+s\bigr)&<f'(2s)\leqslant c_3(p)f'(s)=c_3ps(1+s^2)^q,\\
c_3^{-1}3^{-|q|}f'\bigl(|r-1|+s\bigr)&<ps(r^2+s^2)^q=\partial F(r,s)/\partial s\\
&\leqslant 3^{|q|}f'(s)\leqslant 3^{|q|}f'\bigl(|r-1|+s\bigr).
\end{aligned}$$

Отсюда для любых r и s получаем неравенства (6) в форме

$$\min\{c_1^{-1},c_3^{-1}3^{-|q|}\}f\bigl(|r-1|+s\bigr)\leqslant F(r,s)\leqslant\max\{c_1^{-1}c_2,3^{|q|}\}f\bigl(|r-1|+s\bigr).$$

Переход к функциям $g_1(s)=\theta g(\theta s)$ и $h_1(s)=\theta h(\theta s)$ показывает, что оценку (7) достаточно проверить при $\theta=1$. В силу неравенства Иенсена и неравенств (3), (4) и (6) выводим, что

$$\begin{aligned}
f\left(\int_0^t\frac{|g-1|+|h|}{t}\,d\tau\right)&=f\left(\int_0^t\frac{2|g(\tau)-1|+2|h(\tau)|}{\sqrt{t/\tau}}\frac{d\tau}{2\sqrt{\tau t}}\right)\\
&\leqslant\int_0^t f\left(\frac{2|g(\tau)-1|+2|h(\tau)|}{\sqrt{t/\tau}}\right)\frac{d\tau}{2\sqrt{\tau t}}\\
&\leqslant t^{-\frac{p_0+1}{2}}2^{p_1-1}\int_0^t\tau^{\frac{p_0-1}{2}}f\bigl(|g(\tau)-1|+|h(\tau)|\bigr)\,d\tau,\\
E\big|_{\theta=1}&\leqslant c(p)\int_0^1 f\bigl(|g-1|+|h|\bigr)\,d\tau\\
&\leqslant c_4(p)\int_0^1\bigl\{(g^2+|h|^2)^{p/2}-1-p(g-1)\bigr\}\,d\tau\\
&=c_4\left\{\int_0^1(g^2+h^2)^{p/2}\,d\tau-1\right\}.
\end{aligned}$$

Оценка (7) и лемма 2 доказаны. □

2. Теорема о дефекте цилиндрического конденсатора

Пусть даны целое число $n\geqslant 2$, непустое открытое множество $\Xi\subset\mathbb{R}^{n-1}$, функции $\omega_0,\omega_1\in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Xi)$ и числа $1<p<\infty$ и $K\geqslant 0$ такие, что

$$\begin{gathered}
\theta=\omega_1-\omega_0>0\quad\&\quad\int_\Xi\theta^{1-p}\,d\xi<\infty,\\
\operatorname*{ess\,sup}_\Xi|\nabla\omega_0|\leqslant K\quad\&\quad\operatorname*{ess\,sup}_\Xi|\nabla\omega_1|\leqslant K.
\end{gathered}$$

Сопоставим открытому множеству

$$\Omega=\bigl\{x=(x',x_n)\in\Xi\times\mathbb{R}\colon\omega_0(x')<x_n<\omega_1(x')\bigr\}$$

емкость и дефект соответствующего цилиндрического конденсатора:

$$\begin{gathered}
\mathrm{Cap}(\omega_0,\omega_1,p)=\inf_{u\in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\colon(\forall\xi)\ u(\xi,\omega_0(\xi)+)=0\ \&\ u(\xi,\omega_1(\xi)-)=1}\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx,\\
U=\mathrm{Cap}(\omega_0,\omega_1,p)-\int_\Xi\theta^{1-p}\,d\xi.
\end{gathered}$$

Положим также

$$\Xi_t = \{\xi \in \Xi \colon \theta(\xi) > t\},$$
$$Q_t(\omega_i, \zeta) = f_p\bigl(t^{-1}|\omega_i - \zeta| + |\nabla\zeta|\bigr) \quad \text{при} \quad \zeta \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Xi_t),$$
$$V(\omega_i) = \int_0^{\sup\theta} \left(\inf_\zeta \int_{\Xi_t} Q_t(\omega_i, \zeta)\theta^{-p}\, d\xi \right) dt.$$

Величина $V(\omega_i)$ похожа на норму пространства, полученного по K-методу вещественной интерполяции [22, 2.4.1] из основанных на функции f_p пространств Орлича и Орлича — Соболева, однако ее определение обходится без введения и нормирования этих пространств.

Теорема 1. *Имеют место неравенства* $V(\omega_i) < \infty$ *и*

$$c(p,K)\{V(\omega_0) + V(\omega_1)\} \leqslant U \leqslant c(p,K)\{V(\omega_0) + V(\omega_1)\}. \tag{8}$$

Доказательство. Свойство $V(\omega_i) < \infty$ получается из неравенств

$$Q_t(\omega_i, \omega_i) = f_p\bigl(|\nabla\omega_i|\bigr) \leqslant f_p(K),$$
$$V(\omega_i) \leqslant f_p(K) \int_0^{\sup\theta} \left(\int_{\Xi_t} \theta^{-p}\, d\xi \right) dt = f_p(K) \int_\Xi \theta^{1-p}\, d\xi < \infty.$$

Докажем сначала левую оценку в (8). Пусть $u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, причем

$$(\forall\xi) \quad u(\xi, \omega_0(\xi)+) = 0 \quad \& \quad u(\xi, \omega_1(\xi)-) = 1. \tag{9}$$

Для $0 < t < \sup\theta$ рассмотрим следующие функции на множестве Ξ_t:

$$\alpha_t(\xi) = \int_{t/6}^{t/2} u\bigl(\xi, \omega_0(\xi) + \tau\bigr)\, d\tau,$$
$$\beta_t(\xi) = \int_{t/6}^{t/2} u\bigl(\xi, \omega_1(\xi) - \tau\bigr)\, d\tau,$$
$$\gamma_t = (t - 3\theta)\alpha_t + t\beta_t,$$
$$\zeta_t = \frac{3\theta}{(3\theta - 2t)t}\gamma_t + \omega_0,$$
$$G_t(\xi) = \int_0^{t/2} \left\{ \left| D_n u\bigl(\xi, \omega_0(\xi) + \tau\bigr) - \frac{1}{\theta(\xi)} \right| + \left| D_n u\bigl(\xi, \omega_1(\xi) - \tau\bigr) - \frac{1}{\theta(\xi)} \right| \right\} d\tau,$$
$$H_t(\xi) = \int_{t/6}^{t/2} \left\{ \left| \nabla_{x'} u\bigl(\xi, \omega_0(\xi) + \tau\bigr) \right| + \left| \nabla_{x'} u\bigl(\xi, \omega_1(\xi) - \tau\bigr) \right| \right\} d\tau.$$

Здесь $\nabla_{x'} u = (D_1 u, \ldots, D_{n-1} u)$. Очевидно, что $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t, \zeta_t \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Xi_t)$. Может случиться, что $G_t(\xi) = +\infty$ или что H_t определена лишь почти всюду.

Допустим, что

$$|\gamma_t| \leqslant \theta t G_t \quad (\text{в } \Xi_t), \tag{10a}$$
$$\Gamma_t = \left| \nabla\gamma_t + \frac{3\theta - 2t}{3\theta} t \nabla\omega_0 \right| \leqslant \theta\{5KG_t + 3H_t\} \quad (\text{п.в. в } \Xi_t). \tag{10b}$$

Тогда ввиду $\theta > t$

$$|\omega_0 - \zeta_t| \leqslant 3|\gamma_t|/t \leqslant 3\theta G_t,$$

$$\nabla\zeta_t = \gamma_t \nabla\left(\frac{1}{t} + \frac{2}{3\theta - 2t}\right) + \frac{3\theta}{(3\theta-2t)t}\nabla\gamma_t + \nabla\omega_0,$$

$$|\nabla\zeta_t| \leqslant |\gamma_t|\frac{6|\nabla\omega_0 - \nabla\omega_1|}{t^2} + \frac{3}{t}\Gamma_t \leqslant \frac{\theta}{t}\{27KG_t + 9H_t\},$$

$$Q_t(\omega_0,\zeta_t) \leqslant f_p\left(\max\{3+27K, 9\}\frac{\theta G_t + \theta H_t}{t}\right)$$

$$\overset{(4)}{\leqslant} c_1(p,K) f_p\left(\frac{\theta G_t + \theta H_t}{t}\right), \quad f_p(+\infty) := +\infty.$$

Отсюда по теореме Фубини и оценкам (5) и (7)

$$\begin{aligned} V(\omega_0) &\leqslant \int_0^{\sup\theta}\int_{\Xi_t} Q_t(\omega_0,\zeta_t)\theta^{-p}\,d\xi\,dt \\ &\leqslant c_1\int_\Xi \theta^{-p}\,d\xi \int_0^{\theta(\xi)} f_p\left(\frac{\theta(\xi)G_t(\xi) + \theta(\xi)H_t(\xi)}{t}\right)dt \\ &\leqslant c_2(p,K)\int_\Xi \theta^{-p}\,d\xi\left\{\theta^p(\xi)\int_{\omega_0(\xi)}^{\omega_1(\xi)}\bigl|\nabla u(\xi,t)\bigr|^p\,dt - \theta(\xi)\right\} \\ &= c_2\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Xi \theta^{1-p}\,d\xi\right\}. \end{aligned}$$

Взятие $\inf_u$ и рассмотрение множества

$$\bigl\{x\in\Xi\times\mathbb{R}\colon\ -\omega_1(x') < x_n < -\omega_0(x')\bigr\}$$

вместо множества Ω доказывает левую оценку в (8).

Проверим неравенства (10). Несложно убедиться, что

$$u\bigl(\xi,\omega_0(\xi)+\tau\bigr) - \frac{\tau}{\theta(\xi)} \overset{(9)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^\tau\left[D_n u\bigl(\xi,\omega_0(\xi)+\sigma\bigr) - \frac{1}{\theta(\xi)}\right]d\sigma,$$

$$\left|u(\cdot,\omega_0+\tau) - \frac{\tau}{\theta}\right| + \left|u(\cdot,\omega_1-\tau) - 1 + \frac{\tau}{\theta}\right| \leqslant G_t \quad (0<\tau<t/2),$$

$$\int_{t/6}^{t/2}\frac{\tau\,d\tau}{\theta} = \frac{t^2}{9\theta} \quad \& \quad \int_{t/6}^{t/2}\left(1-\frac{\tau}{\theta}\right)d\tau = \frac{t}{3}\left(1-\frac{t}{3\theta}\right),$$

$$\left|\alpha_t - \frac{t^2}{9\theta}\right| + \left|\beta_t - \frac{t}{3}\left(1-\frac{t}{3\theta}\right)\right| \leqslant \frac{tG_t}{3},$$

$$|\gamma_t| = \left|(t-3\theta)\left(\alpha_t - \frac{t^2}{9\theta}\right) + t\left(\beta_t - \frac{t}{3}\left(1-\frac{t}{3\theta}\right)\right)\right| \leqslant 3\theta\frac{tG_t}{3} = \theta t G_t,$$

$$\nabla\gamma_t = \alpha_t\{3\nabla\omega_0 - 3\nabla\omega_1\} + (t-3\theta)\nabla\alpha_t + t\nabla\beta_t,$$

$$\left|\left(\alpha_t - \frac{t^2}{9\theta}\right)\{3\nabla\omega_0 - 3\nabla\omega_1\}\right| \leqslant \frac{tG_t}{3}6K = 2KtG_t,$$

$$\Gamma_t \leqslant 2KtG_t + \left|\frac{t^2}{3\theta}\{\nabla\omega_0 - \nabla\omega_1\} + (t-3\theta)\nabla\alpha_t + t\nabla\beta_t + \frac{3\theta-2t}{3\theta}t\nabla\omega_0\right|,$$

$$\Gamma_t \leqslant 2KtG_t + \left|(t-3\theta)\left(\nabla\alpha_t - \frac{t}{3\theta}\nabla\omega_0\right)\right| + t\left|\nabla\beta_t - \frac{t}{3\theta}\nabla\omega_1\right|,$$

$$\nabla\alpha_t = \int_{t/6}^{t/2}\bigl\{D_n u(\cdot,\omega_0+\tau)\nabla\omega_0 + \nabla_{x'}u(\cdot,\omega_0+\tau)\bigr\}\,d\tau,$$

$$\Gamma_t \leqslant 2KtG_t + 3\theta\{KG_t + H_t\} \leqslant \theta\{5KG_t + 3H_t\}.$$

Неравенства (10) и тем самым левая оценка в (8) доказаны.

Приступим к выводу правой оценки в (8). Возьмем любое $u \in C^{0,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ со свойством (9). Обозначим $\Theta(x) = \theta(x')$. С учетом правого неравенства в (6) имеем

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx = \int_\Xi \theta^{-p}\, d\xi \int_{\omega_0(\xi)}^{\omega_1(\xi)} \bigl|\theta(\xi)\nabla u(\xi,t)\bigr|^p\, dt,$$

$$|\Theta\nabla u|^p \leqslant 1 + p\{\Theta D_n u - 1\} + c_3(p) f_p\bigl(|\Theta D_n u - 1| + \Theta|\nabla_{x'} u|\bigr) \quad (\text{п.в. в } \Omega),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\omega_0(\xi)+\varepsilon}^{\omega_1(\xi)-\varepsilon} \Bigl\{1 + p\bigl\{\theta(\xi) D_n u(\xi,t) - 1\bigr\}\Bigr\}\, dt = \theta(\xi) + p\theta(\xi) - p\theta(\xi),$$

$$U \leqslant c_3 \int_\Omega f_p\bigl(|\Theta D_n u - 1| + \Theta|\nabla_{x'} u|\bigr)\Theta^{-p}\, dx. \tag{11}$$

Для целого числа k со свойством $2^k < \sup\theta$ найдем функцию $\zeta_k \in C^{0,1}_{\text{loc}}(\Xi_{2^k})$ такую, что

$$\int_{\Xi_{2^k}} Q_{2^k}(\omega_0, \zeta_k)\theta^{-p}\, d\xi \leqslant \frac{3}{2} \inf_\zeta \int_{\Xi_{2^k}} Q_{2^k}(\omega_0, \zeta)\theta^{-p}\, d\xi.$$

(При занулении правой части берем $\zeta_k = \omega_0\bigr|_{\Xi_{2^k}}$, так как функция $\omega_0\bigr|_{\Xi_{2^k}}$ локально постоянна по неравенству Пуанкаре.) Зададим функцию $\varphi_k \in C^{0,1}_{\text{loc}}(\Xi_{2^k})$ формулой

$$\varphi_k = \max\bigl\{\omega_0 - 2^{k-1}, \min\{\zeta_k, \omega_0 + 2^{k-1}\}\bigr\}.$$

Очевидно, что

$$|\omega_0 - \varphi_k| \leqslant 2^{k-1}. \tag{12}$$

Для почти всех $\xi \in \Xi_{2^k}$ со свойством $\varphi_k(\xi) \neq \zeta_k(\xi)$ с учетом (4) получаем

$$\begin{aligned} 2^{-k}\bigl|\omega_0(\xi) - \varphi_k(\xi)\bigr| + \bigl|\nabla\varphi_k(\xi)\bigr| &= (1/2) + \bigl|\nabla\omega_0(\xi)\bigr| \\ &\leqslant (1/2) + K \leqslant (1+2K)2^{-k}\bigl|\omega_0(\xi) - \zeta_k(\xi)\bigr|, \end{aligned}$$

$$Q_{2^k}(\omega_0, \varphi_k)\bigr|_\xi \leqslant c_4(p,K) Q_{2^k}(\omega_0, \zeta_k)\bigr|_\xi.$$

На дополнительном в Ξ_{2^k} множестве эта оценка тоже верна почти всюду ввиду равенства $\nabla\varphi_k = \nabla\zeta_k$. Рассматривая $t \in [2^{k-1}, 2^k)$ и интегрируя по t, имеем

$$\int_{\Xi_{2^k}} Q_{2^k}(\omega_0, \varphi_k)\theta^{-p}\, d\xi \leqslant \frac{3c_4}{2} \inf_{\zeta \in C^{0,1}_{\text{loc}}(\Xi_t)} \int_{\Xi_t} Q_t(\omega_0, \zeta)\theta^{-p}\, d\xi,$$

$$\sum_{k:\, 2^k < \sup\theta} 2^k \int_{\Xi_{2^k}} Q_{2^k}(\omega_0, \varphi_k)\theta^{-p}\, d\xi \leqslant 3c_4 V(\omega_0). \tag{13}$$

Аналогично строятся функции $\psi_k \in C^{0,1}_{\text{loc}}(\Xi_{2^k})$ со свойствами

$$|\omega_1 - \psi_k| \leqslant 2^{k-1}, \tag{14}$$

$$\sum_{k:\, 2^k < \sup\theta} 2^k \int_{\Xi_{2^k}} Q_{2^k}(\omega_1, \psi_k)\theta^{-p}\, d\xi \leqslant 3c_4 V(\omega_1). \tag{15}$$

Построим разбиение единицы в Ω и функцию $u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Пусть $x \in \Omega$. Положим

$$\Phi_k = \varphi_k + 2^{k+1} \quad \text{на} \quad \Xi_{2^k},$$
$$\Psi_k = \psi_k - 2^{k+1} \quad \text{на} \quad \Xi_{2^k},$$
$$\Lambda_k(x) = \begin{cases} \max\Bigl\{0, \min\Bigl\{\frac{x_n-\Phi_{k-1}(x')}{\Phi_k(x')-\Phi_{k-1}(x')}, \frac{\Psi_{k-1}(x')-x_n}{\Psi_{k-1}(x')-\Psi_k(x')}, 1\Bigr\}\Bigr\}, & x' \in \Xi_{2^k}, \\ 0, & x' \in \Xi \setminus \Xi_{2^k}, \end{cases}$$
$$\Lambda_{k+1} \equiv 0 \quad \text{в особом случае} \quad 2^{k+1} \geqslant \sup\theta,$$
$$\lambda_k = \Lambda_k - \Lambda_{k+1},$$
$$I_k = \bigl\{x \in \Omega\colon x' \in \Xi_{2^k} \text{ и } \Phi_k(x') < x_n < \Psi_k(x')\bigr\}.$$

Из (12) и (14) следует, что

$$\begin{gathered} \Phi_k - \Phi_{k-1} = \varphi_k - \varphi_{k-1} + 2^k \geqslant -2^{k-1} - 2^{k-2} + 2^k = 2^{k-2} \quad \text{на} \quad \Xi_{2^k}, \\ \Psi_{k-1} - \Psi_k \geqslant 2^{k-2} \quad \text{на} \quad \Xi_{2^k}, \end{gathered} \tag{16}$$

поэтому формула для Λ_k корректна. Если $\Lambda_k(x) > 0$, то $x \in I_{k-1}$ и

$$\begin{aligned} \theta(x') = \omega_1(x') - \omega_0(x') &\geqslant \psi_{k-1}(x') - 2^{k-2} - \varphi_{k-1}(x') - 2^{k-2} \\ &= \Psi_{k-1}(x') - \Phi_{k-1}(x') + 2^{k+1} - 2^{k-1} > 3 \cdot 2^{k-1}. \end{aligned}$$

Поэтому $\Lambda_k, \lambda_k \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Если $\theta(x') > 3 \cdot 2^{k-1}$, то в силу (12) и (14)

$$\psi_k(x') - \varphi_k(x') \geqslant \theta(x') - 2^{k-1} - 2^{k-1} > \theta(x')/3 > 2^{k-1}.$$

Можно резюмировать, что

$$\begin{aligned} \lambda_k(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda_k(x) > 0 \quad &\Rightarrow \quad x \in I_{k-1} \quad \Rightarrow \quad x' \in \Xi_{3\cdot 2^{k-1}} \\ &\Rightarrow \quad \psi_k(x') - \varphi_k(x') > \theta(x')/3 > 2^{k-1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда понятно, что формулы

$$u_k(x) = \frac{x_n - \varphi_k(x')}{\psi_k(x') - \varphi_k(x')} \quad \text{при} \quad x \in I_{k-1},$$
$$u(x) = \sum_{k\colon \lambda_k(x)>0} \lambda_k(x) u_k(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega,$$

корректны и, ввиду (12) и (14), доставляют функцию $u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ со свойствами (9) и (11).

Оценим правую часть в (11). Для любого целого j со свойством $2^j < \sup\theta$ имеем $I_j \subset I_{j-1}$ ввиду (16). Если при этом $2^{j+1} \geqslant \sup\theta$, то $I_j = \varnothing$ по (17). Поэтому множества $I_{j-1} \setminus I_j$ образуют разбиение множества Ω. По теореме Радемахера встречаемые ниже локально липшицевы функции дифференцируемы в точке x' или x (аргументы не пишем) для п.в. $x \in I_{j-1} \setminus I_j$. Обозначим

$$\delta_k = 2^{-k} \max\bigl\{|\omega_0 - \varphi_k|, |\omega_1 - \psi_k|\bigr\}, \quad \Delta_k = \max\bigl\{|\nabla\varphi_k|, |\nabla\psi_k|\bigr\}.$$

Оценим сначала $|\Theta D_n u - 1|$. На основании соотношений

$$\nabla\Lambda_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in I_{k-1} \setminus I_k \quad \Rightarrow \quad k = j, \tag{18a}$$
$$\lambda_k > 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda_k > 0 \ \&\ \Lambda_{k+1} < 1 \quad \Rightarrow \quad k \in \{j-1, j\}, \tag{18b}$$

(16), (12), (14), $x \in I_{j-1}$, (17) и свойств выпуклых комбинаций получаем

$$\begin{aligned}
D_n u &= (D_n\Lambda_j)(u_j - u_{j-1}) + \sum_{k\in\{j-1,j\}} \lambda_k D_n u_k,\\
\Theta D_n u - 1 &= (\Theta D_n \Lambda_j)(u_j - u_{j-1}) + \sum_{k\in\{j-1,j\}} \lambda_k [\Theta D_n u_k - 1],\\
|D_n\Lambda_j| &\leqslant 2^{2-j},\\
u_j - u_{j-1} &= \frac{x_n - \varphi_j}{\psi_j - \varphi_j} - \frac{x_n - \varphi_{j-1}}{\psi_{j-1} - \varphi_{j-1}}\\
&= \frac{\varphi_{j-1} - \varphi_j}{\psi_{j-1} - \varphi_{j-1}} \frac{\psi_j - x_n}{\psi_j - \varphi_j} + \frac{\psi_{j-1} - \psi_j}{\psi_{j-1} - \varphi_{j-1}} \frac{x_n - \varphi_j}{\psi_j - \varphi_j},\\
\psi_{j-1} - \varphi_{j-1} &\geqslant \theta - 2^{j-2} - 2^{j-2} > 2\theta/3 > 2^j,\\
\varphi_j &< \Phi_{j-1} < x_n < \Psi_{j-1} < \psi_j,\\
|u_j - u_{j-1}| &\leqslant \frac{\max\bigl\{|\varphi_{j-1} - \varphi_j|, |\psi_{j-1} - \psi_j|\bigr\}}{2\theta/3} \leqslant \frac{3}{2\theta}\bigl\{2^{j-1}\delta_{j-1} + 2^j\delta_j\bigr\},\\
|\Theta D_n u_k - 1| &= \left|\frac{\omega_1 - \omega_0 - \psi_k + \varphi_k}{\psi_k - \varphi_k}\right| \leqslant \frac{2^{k+1}\delta_k}{\psi_k - \varphi_k} \leqslant \begin{cases} \delta_{j-1} & \text{при} \quad k = j-1,\\ 4\delta_j & \text{при} \quad k = j,\end{cases}\\
|\Theta D_n u - 1| &\leqslant 4\delta_{j-1} + 10\delta_j.
\end{aligned}$$

Оценим теперь $\Theta|\nabla_{x'} u|$. В силу соотношений (18), $x \in I_{j-1} \setminus I_j$, свойств выпуклых комбинаций и оценок (16), (12) и (14) имеем

$$\begin{aligned}
\nabla_{x'} u &= (\nabla_{x'}\Lambda_j)(u_j - u_{j-1}) + \sum_{k\in\{j-1,j\}} \lambda_k \nabla_{x'} u_k,\\
\nabla_{x'} \frac{x_n - \Phi_{j-1}}{\Phi_j - \Phi_{j-1}} &= \frac{-\nabla\Phi_{j-1}}{\Phi_j - \Phi_{j-1}} + \frac{x_n - \Phi_{j-1}}{\Phi_j - \Phi_{j-1}} \frac{\nabla\Phi_{j-1} - \nabla\Phi_j}{\Phi_j - \Phi_{j-1}}\\
&= \frac{-\nabla\varphi_{j-1}}{\Phi_j - \Phi_{j-1}} \frac{\Phi_j - x_n}{\Phi_j - \Phi_{j-1}} + \frac{-\nabla\varphi_j}{\Phi_j - \Phi_{j-1}} \frac{x_n - \Phi_{j-1}}{\Phi_j - \Phi_{j-1}},\\
|\nabla_{x'}\Lambda_j| &\leqslant \max\bigl\{|\nabla\varphi_{j-1}|, |\nabla\varphi_j|, |\nabla\psi_{j-1}|, |\nabla\psi_j|\bigr\} 2^{2-j}\\
&= 2^{2-j} \max\{\Delta_{j-1}, \Delta_j\},\\
|u_j - u_{j-1}| &\leqslant \frac{3}{2\theta}\bigl\{2^{j-1}\delta_{j-1} + 2^j\delta_j\bigr\} \leqslant \frac{3}{2\theta}\{2^{j-2} + 2^{j-1}\} = \frac{9}{8\theta}2^j,\\
\nabla_{x'} u_k &= \frac{-\nabla\varphi_k}{\psi_k - \varphi_k} + (x_n - \varphi_k)\frac{\nabla\varphi_k - \nabla\psi_k}{(\psi_k - \varphi_k)^2}\\
&= \frac{-\nabla\varphi_k}{\psi_k - \varphi_k} \frac{\psi_k - x_n}{\psi_k - \varphi_k} + \frac{-\nabla\psi_k}{\psi_k - \varphi_k} \frac{x_n - \varphi_k}{\psi_k - \varphi_k},\\
|\nabla_{x'} u_k| &\leqslant \frac{\Delta_k}{\psi_k - \varphi_k} \leqslant \begin{cases} 3\Delta_{j-1}/(2\theta) & \text{при} \quad k = j-1,\\ 3\Delta_j/\theta & \text{при} \quad k = j,\end{cases}\\
\Theta|\nabla_{x'} u| &\leqslant 6\Delta_{j-1} + 8\Delta_j.
\end{aligned}$$

Из полученных оценок и леммы 1 следует, что при п.в. $x \in I_{j-1} \setminus I_j$

$$f_p\bigl(|\Theta D_n u - 1| + \Theta|\nabla_{x'} u|\bigr)\Big|_x \leqslant c_5(p) \sum_{k\in\{j-1,j\}} \Bigl\{Q_{2^k}(\omega_0, \varphi_k)\Big|_{x'} + Q_{2^k}(\omega_1, \psi_k)\Big|_{x'}\Bigr\}.$$

Для данного x' линейная мера множества точек $x \in I_{j-1} \setminus I_j$ мажорируется числом

$$\Phi_j - \Phi_{j-1} + \Psi_{j-1} - \Psi_j = \varphi_j - \varphi_{j-1} + \psi_{j-1} - \psi_j + 2^{j+1} < 2^{j+2},$$

откуда по теореме Фубини и соотношениям (11), (13), (15) и (17)

$$\begin{aligned} U &\leqslant c_3 \sum_{j:\ 2^j < \sup\theta} \int_{I_{j-1}\setminus I_j} f_p\bigl(|\Theta D_n u - 1| + \Theta|\nabla_{x'} u|\bigr)\Theta^{-p}\,dx \\ &\leqslant c_3 c_5 \sum_{j,k:\ j-1\leqslant k\leqslant j} 2^{j+2} \int_{\Xi_{3\cdot 2^{j-1}}} \bigl\{Q_{2^k}(\omega_0,\varphi_k) + Q_{2^k}(\omega_1,\psi_k)\bigr\}\theta^{-p}\,d\xi \\ &\leqslant 12 c_3 c_5 \sum_{k:\ 2^k < \sup\theta} 2^k \int_{\Xi_{2^k}} \bigl\{Q_{2^k}(\omega_0,\varphi_k) + Q_{2^k}(\omega_1,\psi_k)\bigr\}\theta^{-p}\,d\xi \\ &\leqslant 36 c_3 c_4 c_5 \bigl\{V(\omega_0) + V(\omega_1)\bigr\}. \end{aligned}$$

Правая оценка в (8) и теорема 1 доказаны. □

Отметим отдаленное сходство второй половины доказательства теоремы 1 с работами [3, 4], где среди прочего установлена сравнимость емкостей некоторых конденсаторов и множеств с соответствующими дискретными емкостями. О дискретной теории потенциала см. книги [1, 14, 21].

Следствие 1. *Если* $\operatorname{mes}\Xi < \infty$ *и* $-\infty < h_0 < h_1 < \infty$, *а функции* $\Omega_i \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Xi)$ *ограничены и имеют существенно ограниченные градиенты, то*

$$\frac{d}{d\alpha}\operatorname{Cap}(h_0 + \alpha\Omega_0, h_1 + \alpha\Omega_1, p)\Big|_{\alpha=0} = \frac{p-1}{(h_1-h_0)^p}\int_\Xi (\Omega_0 - \Omega_1)\,d\xi. \tag{19}$$

Доказательство. В силу (3)

$$Q_t(h_i + \alpha\Omega_i, h_i + \alpha\Omega_i) = f_p\bigl(|\alpha\nabla\Omega_i|\bigr) \leqslant \mathrm{const}\cdot|\alpha|^{p_0} \quad \text{при} \quad -1 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Отсюда по теореме 1 производная в (19) равна такой же производной интеграла Альфорса, соответствующего функциям $\omega_i = h_i + \alpha\Omega_i$. □

О других результатах по вычислению первой вариации емкости см. работы [2, 7, 8, 9, 13] и указанную в них библиографию.

3. Локализация внутренних равномерных областей

Пусть дана непустая область $U \subset \mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1. *Путь в* U *— это непрерывное отображение* $\gamma : [a,b] \to U$ *для некоторых* $-\infty < a \leqslant b < \infty$.

Назовем U *центрированной областью Джона с параметром* $\mu \geqslant 1$, *если существует* $x_0 \in U$ *такое, что для любого* $y \in U$ *найдется путь* $\gamma : [0,1] \to U$ *со свойствами*

$$\begin{gathered} \gamma(0) = x_0, \quad \gamma(1) = y, \\ \rho_U(z) \equiv \operatorname{dist}(z, \partial U) \geqslant |z-y|/\mu \ \text{для всех}\ z \in \gamma\bigl([0,1]\bigr). \end{gathered} \tag{20}$$

Назовем U *областью Джона с параметром* $\mu \geqslant 1$, *если*

$$\begin{gathered} \text{для любых точек}\ x, y \in U\ \text{найдется путь}\ \gamma : [0,1] \to U \\ \text{со свойствами} \quad \gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y, \\ \rho_U(z) \geqslant \min\bigl\{|x-z|, |z-y|\bigr\}/\mu\ \text{для всех}\ z \in \gamma\bigl([0,1]\bigr). \end{gathered} \tag{21}$$

Введем длину пути $\gamma : [a,b] \to U$ *и внутреннюю метрику в* U:

$$\ell(\gamma) = \sup_{k\in\mathbb{N}\ \&\ a=t_0\leqslant t_1\leqslant\dots\leqslant t_{k-1}\leqslant t_k=b} \sum_{j=1}^{k} |\gamma(t_{j-1}) - \gamma(t_j)|,$$

$$\rho_U(x,y) = \inf\bigl\{\ell(\gamma)\colon \gamma \text{ — путь } [a,b]\to U \text{ с } \gamma(a)=x \text{ и } \gamma(b)=y\bigr\}.$$

Назовем U *равномерной областью с параметрами* $\mu \geqslant 1$ *и* $\nu \geqslant 1$, *если*

$$\text{выполнено (21), причем } \operatorname{diam}\gamma\bigl([0,1]\bigr) \leqslant \nu|x-y|, \tag{22}$$

и внутренней равномерной областью с параметрами $\mu \geqslant 1$ *и* $\nu \geqslant 1$, *если*

$$\text{выполнено (21), причем } \operatorname{diam}\gamma\bigl([0,1]\bigr) \leqslant \nu\rho_U(x,y). \tag{23}$$

В литературе известны другие определения введенных классов областей, где евклидовы расстояния $|x-z|$ и $|z-y|$ заменяются на диаметры частей $[x,z]$ и $[z,y]$ пути γ, на их длины или на расстояния $\rho_U(x,z)$ и $\rho_U(z,y)$, а диаметр $\operatorname{diam}\gamma\bigl([0,1]\bigr)$ заменяется на длину $\ell(\gamma)$. Например, различные варианты определений (20), (21) и (22) обсуждаются в [23]. Мы предпочли простейшие определения. Очевидно, что (22) $\Rightarrow$ (23) $\Rightarrow$ (21).

Определения (20), (22) и (23) восходят к работам [12, 15, 5] соответственно. В [15, 5] равномерные и внутренние равномерные области характеризуются их локальным сравнением с центрированными областями Джона. В [5] также приведена библиография по такой *геометрической локализации*.

Для вывода одного аналога теоремы 5.3 из [5] нам потребуются две леммы. Первая из них относится к разбиению Уитни и проверяется непосредственно.

Лемма 3. *Введем семейство всех двоичных кубов в* $\mathbb{R}^n$ *формулой*

$$\mathcal{D} = \bigl\{I\colon I = [0,2^k)^n + 2^k K \text{ для некоторых } k\in\mathbb{Z} \text{ и } K\in\mathbb{Z}^n\bigr\}.$$

Для открытого множества $U \subsetneq \mathbb{R}^n$ *пусть*

$$\mathcal{E} = \Bigl\{I\in\mathcal{D}\colon I\subset U \text{ и } \operatorname{diam} I \leqslant \operatorname{dist}(I,\partial U) := \inf_{x\in I}\operatorname{dist}(x,\partial U)\Bigr\},$$

$$\mathcal{F} = \bigl\{I\in\mathcal{E}\colon \text{если } I\subset J\in\mathcal{E}, \text{ то } I=J\bigr\}.$$

Тогда семейство $\mathcal{F}$ *образует разбиение множества* U *и*

$$(\forall I\in\mathcal{F})\quad \operatorname{dist}(I,\partial U) < 3\operatorname{diam} I. \tag{24}$$

Вторую лемму легко обобщить на случай конечного набора точек $\{x,y,\dots\}$ и линейно связного компакта в U вместо $\gamma\bigl([0,1]\bigr)$.

Лемма 4. *Пусть путь* $\gamma : [0,1]\to U$ *и число* $\mu\geqslant 1$ *таковы, что*

$$(\exists x,y\in\mathbb{R}^n)\ \bigl(\forall z\in\gamma\bigl([0,1]\bigr)\bigr)\quad \rho_U(z) \geqslant \min\bigl\{|x-z|,|z-y|\bigr\}/\mu. \tag{25}$$

Тогда с постоянной $N = c(n,\mu)\geqslant 1$ *имеем*

$$\operatorname{diam}_U\gamma\bigl([0,1]\bigr) := \sup_{X,Y\in\gamma([0,1])}\rho_U(X,Y) \leqslant N\operatorname{diam}\gamma\bigl([0,1]\bigr). \tag{26}$$

Доказательство. Сужение пути γ на отрезки $[a,b]\subset[0,1]$ показывает, что вместо (26) достаточно доказать оценку $\rho_U\bigl(\gamma(0),\gamma(1)\bigr) \leqslant N\operatorname{diam}\gamma\bigl([0,1]\bigr)$. Случай $U=\mathbb{R}^n$ тривиален, поэтому считаем, что $U\neq\mathbb{R}^n$.

Найдем семейства $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ по лемме 3. Компакт $\gamma\bigl([0,1]\bigr)$ пересекается с конечным числом кубов $\overline{I}$ ($I\in\mathcal{F}$). Для $t_0=0$ существует куб $I_0\in\mathcal{F}$ такой, что $\gamma(t_0)\in\overline{I_0}$. Положим $t_1 = \max\gamma^{-1}\bigl(\overline{I_0}\bigr)$ ($\geqslant t_0$). Если $t_1<1$, то найдется такой куб

$I_1 \in \mathcal{F}$, что $I_1 \neq I_0$ и $\gamma(t_1) \in \overline{I_1}$, так что можно задать $t_2 = \max \gamma^{-1}\big(\overline{I_1}\big)$ $(\geqslant t_1)$. Продолжая таким образом, построим попарно различные кубы $I_0, \dots, I_k \in \mathcal{F}$ $(k \geqslant 0)$ и точки $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_{k+1} = 1$ со свойствами

$$\gamma(t_0) \in \overline{I_0}, \qquad \gamma(t_{k+1}) \in \overline{I_k}, \qquad \gamma(t_j) \in \overline{I_{j-1}} \cap \overline{I_j} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Если $\operatorname{diam} \gamma\big([0,1]\big) < \operatorname{diam} I_j$ для некоторого индекса j, то

$$(\forall t) \quad \operatorname{dist}\big(\gamma(t), I_j\big) \leqslant |\gamma(t) - \gamma(t_j)| \leqslant \operatorname{diam} \gamma\big([0,1]\big) < \operatorname{diam} I_j \leqslant \operatorname{dist}(I_j, \partial U),$$

откуда $\rho_U\big(\gamma(0), \gamma(1)\big) = |\gamma(0) - \gamma(1)| \leqslant \operatorname{diam} \gamma\big([0,1]\big)$.

Наоборот, пусть $M = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \operatorname{diam} I_j \leqslant \operatorname{diam} \gamma\big([0,1]\big)$. Применяя (24), (25), ломаную с вершинами $\gamma(t_j)$ и попарную дизъюнктность кубов I_j, имеем

$$(\forall j \leqslant k) \quad \rho_U(\gamma(t_j)) \leqslant \operatorname{diam} I_j + \operatorname{dist}(I_j, \partial U) < 4 \operatorname{diam} I_j,$$
$$I_j \subset \big\{z \in \mathbb{R}^n \colon \min\big\{|x-z|, |z-y|\big\} < (4\mu + 1) \operatorname{diam} I_j\big\},$$
$$\rho_U\big(\gamma(0), \gamma(1)\big) \leqslant \sum_{j=0}^{k} \operatorname{diam} I_j \leqslant NM \leqslant N \operatorname{diam} \gamma\big([0,1]\big),$$

где $N = c(n, \mu) \geqslant 1$. Оценка (26) и лемма 4 доказаны. $\square$

Установим вышеупомянутый аналог теоремы 5.3 из [5], которая относится к случаю $n = 2$ и другому понятию локализации.

Теорема 2. *Для области $U \subset \mathbb{R}^n$ равносильны следующие условия.*

(i) Существует $\mu_1 \geqslant 1$ такое, что для любых $y_0 \in U$ и $0 < r < \infty$ шар

$$B_U(y_0, r) = \big\{x \in U \colon \rho_U(x, y_0) < r\big\} \tag{27}$$

— центрированная область Джона с параметром μ_1.

(ii) U является внутренней равномерной областью с некоторыми параметрами $\mu \geqslant 1$ и $\nu \geqslant 1$.

При этом можно взять $\mu = \mu_1$ и любое $\nu > 1$ в импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) и $\mu_1 = c(n, \mu, \nu)$ в импликации (ii) $\Rightarrow$ (i).

Доказательство. Пусть верно (i). Возьмем $\varepsilon > 0$. Для любых различных точек $x, y \in U$ построим, используя определение внутренней метрики, точку $y_0 \in U$ со свойством

$$\max\big\{\rho_U(x, y_0), \rho_U(y_0, y)\big\} < r = (0.5 + \varepsilon)\rho_U(x, y).$$

Точки x и y принадлежат центрированной области Джона $B = B_U(y_0, r)$ с «центром» x_0. Построим соответствующие пути γ_x и γ_y по определению 1 и положим

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_x(1 - 2t) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \gamma_y(2t - 1) & \text{при} \quad 1/2 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Ясно, что γ — путь в B и в U с $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$. Если $z \in \gamma\big([0, 1/2]\big)$, то

$$\rho_U(z) \geqslant \rho_B(z) \geqslant |x - z|/\mu_1 \geqslant \min\big\{|x-z|, |z-y|\big\}/\mu_1.$$

Отсюда видно, что верно (21) с $\mu = \mu_1$. При этом $\operatorname{diam} \gamma\big([0,1]\big) \leqslant \operatorname{diam} B \leqslant 2r = (1 + 2\varepsilon)\rho_U(x, y)$. Ввиду (23) мы доказали утверждение (ii) с параметрами $\mu = \mu_1$ и $\nu = 1 + 2\varepsilon$.

Обратно, пусть имеет место (ii). Пусть $N \geqslant 1$ — постоянная из леммы 4. Обозначим

$$\mu_0 = 20\mu\nu^2 N^3 \quad \& \quad \mu_1 = 41\mu^2\nu^2 N^3.$$

Рассмотрим произвольный шар $B = B_U(y_0, r)$. Предположим, что

$$(\exists x_0 \in U)\ (\forall y \in B)\ (\exists X_0, X_1, \dots \in U) \tag{28a}$$

$$X_0 = x_0, \tag{28b}$$

$$\lim_{j\to\infty} |X_j - y| = 0, \tag{28c}$$

$$(\forall j) \quad \rho_U(X_j) \geqslant |X_j - y|/\mu_0, \tag{28d}$$

$$(\forall j) \quad \mathfrak{B}_j = \rho_U(y_0, X_{j+1}) + 1.04\nu N \rho_U(X_j, X_{j+1}) + |X_{j+1} - y|/\mu_1 < r. \tag{28e}$$

Эти условия — дискретный аналог свойства (20). Применяя (23), построим соединяющий точки X_j и X_{j+1} путь $\alpha_j : [0,1] \to U$ и положим

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_j\big((j+1)(j+2)t - j(j+2)\big) & \text{при} \quad t \in \Big[\frac{j}{j+1}, \frac{j+1}{j+2}\Big) \ \text{ и } j \geqslant 0, \\ y & \text{при} \quad t = 1. \end{cases}$$

Если показать, что α — путь в B со свойством $\rho_B(\alpha(t)) \geqslant |\alpha(t) - y|/\mu_1$, то тем самым будет установлено утверждение (i).

Ввиду (23), (28c) и открытости множества U имеем

$$\operatorname{diam} \alpha_j\big([0,1]\big) \leqslant \nu \rho_U(X_j, X_{j+1}) \leqslant \nu\rho_U(X_j, y) + \nu\rho_U(X_{j+1}, y) \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Поэтому отображение $\alpha : [0,1] \to U$ непрерывно. В силу (23) и (26)

$$A_j = \operatorname{diam}_U \alpha_j\big([0,1]\big) \leqslant \nu N \rho_U(X_j, X_{j+1}).$$

Для любого $z \in \alpha_j\big([0,1]\big)$ по (28e) имеем

$$\rho_U(y_0, z) + \frac{|z-y|}{\mu_1} \leqslant \rho_U(y_0, X_{j+1}) + A_j + \frac{A_j + |X_{j+1} - y|}{\mu_1} \leqslant \mathfrak{B}_j < r. \tag{29}$$

Отсюда $z \in B$, так что α — путь в B.

Пусть $z \in B$. Если $\rho_B(z) \geqslant \rho_U(z)$, то тривиальным образом

$$\rho_B(z) \geqslant \min\big\{\rho_U(z), r - \rho_U(y_0, z)\big\}.$$

При $\rho_B(z) < \rho_U(z)$ это неравенство тоже справедливо. В самом деле, найдется $Z \in \partial B$ такое, что $\rho_B(z) = |z - Z| < \rho_U(z)$, откуда $Z \in U \setminus B$ и потому

$$r \leqslant \rho_U(y_0, Z) \leqslant \rho_U(y_0, z) + \rho_U(z, Z) = \rho_U(y_0, z) + |z - Z| = \rho_U(y_0, z) + \rho_B(z).$$

Как следствие, для $z \in \alpha_j\big([0,1]\big)$ с учетом (23), (28d) и (29) имеем

$$\begin{aligned}
\rho_U(z) &\geqslant \min\big\{|X_j - z|, |z - X_{j+1}|\big\}/\mu, \\
\rho_U(z) &\geqslant \rho_U(X_j) - |X_j - z| \\
&\geqslant \mu_0^{-1}|X_j - y| - |X_j - z| \\
&\geqslant \mu_0^{-1}|z - y| - (1 + \mu_0^{-1})|X_j - z|, \\
\rho_U(z) &\geqslant \mu_0^{-1}|z - y| - (1 + \mu_0^{-1}) \min\big\{|X_j - z|, |z - X_{j+1}|\big\}, \\
\rho_U(z) &\geqslant \min_{s\geqslant 0} \max\left\{\frac{s}{\mu}, \frac{|z-y| - (\mu_0 + 1)s}{\mu_0}\right\} = \frac{|z-y|}{\mu_0 + \mu_0\mu + \mu} \\
&\geqslant |z - y|/\mu_1, \\
\rho_B(z) &\geqslant \min\big\{\rho_U(z), r - \rho_U(y_0, z)\big\} \geqslant |z - y|/\mu_1.
\end{aligned}$$

Мы доказали утверждение (i).

Проверим, что выполнено (28). Возьмем $x \in B$,

$$2|x - y_0| > D = \sup_{z \in B} |z - y_0|.$$

Применяя (23), найдем соединяющий точки x и y_0 путь β_0. Обозначим

$$\xi = 8\nu N^2 \quad \& \quad \eta = 4\nu^2 N^2,$$
$$T = \max\bigl\{t \in [0,1] \colon |\beta_0(t) - y_0| \geqslant C = |x - y_0|/\xi\bigr\},$$
$$x_0 = \beta_0(T).$$

Очевидно, что $|x_0 - y_0| = C$ и $\operatorname{diam} \beta_0\bigl([T,1]\bigr) \leqslant 2C$.

Возьмем любое $y \in B$. Положим $X_0 = x_0$. Тогда верно (28b) и

$$|X_0 - y| \leqslant |x_0 - y_0| + |y - y_0| \leqslant C + D < C + 2|x - y_0| = (1 + 2\xi)C,$$
$$\rho_U(X_0) = \rho_U(x_0) \geqslant \frac{\min\bigl\{|x - x_0|, |x_0 - y_0|\bigr\}}{\mu} = \frac{C}{\mu} \geqslant \frac{|X_0 - y|}{\mu_0},$$

что суть (28d) для $j = 0$. Кроме того, по лемме 4 и включению $x \in B$

$$\rho_U(X_0, y_0) \leqslant N \cdot 2C = 2N|x - y_0|/\xi < 2Nr/\xi = r/(4\nu N).$$

Найдем путь $\beta : [0,1] \to U$ такой, что

$$\beta(0) = y_0, \quad \beta(1) = y, \quad \ell(\beta) < r.$$

Зададим точки $Y_j = \beta(t_j)$ условиями $t_0 = 0$ и

$$t_{j+1} = \max\Bigl\{t \in [t_j, 1] \colon \rho_U\bigl(Y_j, \beta(t)\bigr) = |\beta(t) - y|/\eta\Bigr\}, \quad j \geqslant 0.$$

Тогда $Y_0 = y_0$ и

$$C_j = \rho_U(Y_j, Y_{j+1}) = |Y_{j+1} - y|/\eta \leqslant \ell\bigl(\beta\big|_{[t_j, t_{j+1}]}\bigr) \xrightarrow{j \to \infty} 0.$$

По (23) и (26) найдем соединяющий точки Y_j и Y_{j+1} путь γ_j такой, что

$$C_j \leqslant \Gamma_j = \operatorname{diam}_U \gamma_j\bigl([0,1]\bigr) \leqslant N \operatorname{diam} \gamma_j\bigl([0,1]\bigr) \leqslant \nu N C_j.$$

Рассуждая от противного, найдем точку $X_{j+1} \in \gamma_j\bigl([0,1]\bigr)$ со свойством

$$\min\bigl\{|Y_j - X_{j+1}|, |X_{j+1} - Y_{j+1}|\bigr\} \geqslant \frac{1}{4} \operatorname{diam} \gamma_j\bigl([0,1]\bigr).$$

Часть (28a) утверждения (28) можно считать проверенной.

Очевидно, что

$$|X_{j+1} - y| \leqslant |Y_{j+1} - y| + \operatorname{diam} \gamma_j\bigl([0,1]\bigr) \leqslant |Y_{j+1} - y| + \nu C_j = (\eta + \nu) C_j,$$
$$\rho_U(X_{j+1}) \geqslant \frac{\operatorname{diam} \gamma_j([0,1])}{4\mu} \geqslant \frac{C_j}{4\mu N} \geqslant \frac{|X_{j+1} - y|}{4\mu N(\eta + \nu)} \geqslant \frac{|X_{j+1} - y|}{\mu_0},$$

что дает (28c) и (28d). Нам осталось проверить (28e). При $j = 0$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_0 &= \rho_U(y_0, X_1) + 1.04\nu N \rho_U(X_0, X_1) + |X_1 - y|/\mu_1 \\
&\leqslant \Gamma_0 + 1.04\nu N \rho_U(X_0, X_1) + \frac{|y - y_0| + \operatorname{diam} \gamma_0([0,1])}{\mu_1} \\
&\leqslant \nu N C_0 + 1.04\nu N \bigl\{\rho_U(X_0, y_0) + \nu N C_0\bigr\} + \frac{r + \nu C_0}{\mu_1}, \\
\eta C_0 &= |Y_1 - y| \leqslant |y - y_0| + \rho_U(Y_0, Y_1) < r + C_0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&C_0 < r/(3\nu^2 N^2),\\
&\frac{\mathfrak{B}_0}{r} < \frac{1}{3} + 1.04\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right\} + \frac{1+(1/3)}{41} = \frac{5981}{6150} < 1.
\end{aligned}
$$

При $j \geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
\rho_U(y_0, X_{j+1}) &\leqslant \rho_U(y_0, Y_{j+1}) + \Gamma_j \leqslant \rho_U(y_0, Y_{j+1}) + \nu N C_j,\\
\rho_U(X_j, X_{j+1}) &\leqslant \Gamma_{j-1} + \Gamma_j \leqslant \nu N\{C_{j-1} + C_j\},\\
\eta C_{j-1} &= |Y_j - y| \leqslant |Y_{j+1} - y| + \rho_U(Y_j, Y_{j+1}) = (\eta+1)C_j,\\
\rho_U(X_j, X_{j+1}) &\leqslant 9\nu N C_j/4,\\
|X_{j+1} - y| &\leqslant (\eta+\nu)C_j,\\
\mathfrak{B}_j &\leqslant \rho_U(y_0, Y_{j+1}) + \left\{\nu N + 1.04\nu N\frac{9\nu N}{4} + \frac{\eta+\nu}{\mu_1}\right\}C_j\\
&\leqslant \rho_U(y_0, Y_{j+1}) + \left\{1 + 2.34 + \frac{5}{41}\right\}\nu^2 N^2 C_j\\
&\leqslant \rho_U(y_0, Y_{j+1}) + |Y_{j+1} - y| \leqslant \ell(\beta) < r.
\end{aligned}
$$

Утверждение (28), а с ним и теорема 2, доказаны. □

В § 5 нам понадобится следующая

Лемма 5. *Если U — область Джона в $\mathbb{R}^n$ с параметром μ и имеет место условие* $0 < r < \operatorname{diam}_U U$, *то*

$$
(\forall x \in U) \quad \operatorname{mes} B_U(x, r) \geqslant c(n,\mu) r^n. \tag{30}
$$

Доказательство. Для $x \in U$ найдется $y \in U$ такое, что $\rho_U(x,y) > r/2$, так как в противном случае $U = \{y \in U\colon \rho_U(x,y) \leqslant r/2\}$ и потому $\operatorname{diam}_U U \leqslant r$. Построим путь γ по определению (21) и для постоянной $N \geqslant 1$ из (26) положим $z = \gamma(\min S)$ и $z^* = \gamma(\min S^*)$, где

$$
\begin{aligned}
S &= \{t \in [0,1]\colon |x - \gamma(t)| \geqslant r/(12N)\},\\
S^* &= \{t \in [0,1]\colon |x - \gamma(t)| \geqslant r/(4N)\}.
\end{aligned}
$$

Непустота этих множеств и оценки $\rho_U(x,z) \leqslant r/6$ и $\rho_U(x,z^*) \leqslant r/2$ вытекают из леммы 4. Если $|x - z| < |z - y|$, то по (21)

$$
\rho_U(z) \geqslant |x - z|/\mu = r/(12\mu N).
$$

В противном случае

$$
\begin{aligned}
|z^* - y| \geqslant |x - z^*| - |x - z| - |z - y| &\geqslant \frac{r}{4N} - \frac{r}{12N} - \frac{r}{12N} = \frac{r}{12N},\\
\rho_U(z^*) \geqslant \min\{r/(4N), r/(12N)\}/\mu &= r/(12\mu N).
\end{aligned}
$$

Значит, шар $B_U(x,r)$ содержит по меньшей мере один из евклидовых шаров $B(z, r/(12\mu N))$ и $B(z^*, r/(12\mu N))$, что доказывает (30). □

4. Неравенство Пуанкаре

Пусть функция $A : [0,\infty) \to [0,\infty)$ не убывает, выпукла и найдется $a \geqslant 1$ такое, что $A(2s) \leqslant aA(s)$ для всех s. Установим один «A-вариант» неравенства Пуанкаре. О близких результатах см. библиографию в [16, гл. 5 и 6].

Лемма 6. *Пусть* $B \subsetneq \mathbb{R}^n$ — *центрированная область Джона с параметром* μ. *Тогда* $0 < \operatorname{diam} B < \infty$ *и имеет место оценка*

$$\inf_{\gamma\in\mathbb{R}} \int_B A\left(\frac{|u-\gamma|}{\operatorname{diam} B}\right) dx \leqslant C \int_B A\big(|\nabla u|\big)\, dx, \quad u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(B), \tag{31}$$

с постоянной $C = c(n, a, \mu)$.

Доказательство. Свойство $0 < \operatorname{diam} B < \infty$ следует из (20) с $z = x_0$.

Формула (14) из [11] утверждает, что

$$(\forall u)\ (\exists \gamma \in \mathbb{R})\ (\forall x \in B) \quad |u(x) - \gamma| \leqslant c(n,\mu) \int_B \frac{|\nabla u(y)|\, dy}{|x-y|^{n-1}}.$$

(Более общий результат для набора дифференциальных операторов вместо ∇ получен ранее в [18] при определении центрированной области Джона через спрямляемые кривые.) Очевидно, что

$$(\forall x \in B) \quad c(n,\mu) \operatorname{diam} B \leqslant \int_B \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \leqslant c_1(n) \operatorname{diam} B.$$

Отсюда по неравенству Иенсена и теореме Фубини

$$A\left(\frac{|u(x)-\gamma|}{\operatorname{diam} B}\right) \leqslant c_2(n,a,\mu) \int_B \frac{A\big(|\nabla u(y)|\big)\, dy}{|x-y|^{n-1} \operatorname{diam} B},$$

$$\int_B A\left(\frac{|u-\gamma|}{\operatorname{diam} B}\right) dx \leqslant c_2 \int_B A\big(|\nabla u|\big)\, dy \int_B \frac{dx}{|x-y|^{n-1} \operatorname{diam} B}$$
$$\leqslant c_1 c_2 \int_B A\big(|\nabla u|\big)\, dy.$$

Лемма 6 доказана. □

Из теоремы 2 и леммы 6 сразу получается

Теорема 3. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$ — *внутренняя равномерная область с параметрами* μ *и* ν. *Тогда в любом шаре* $B = B_U(y_0, r)$ *(см.* (27)*) верно неравенство Пуанкаре* (31) *с постоянной* $C = c(n, a, \mu, \nu)$.

Сходный результат содержится в теореме 3.12 из [10], доказанной для общих *пространств Дирихле гарнаковского типа*, но при $A(s) = s^2$.

5. Теорема о дефекте конденсатора над внутренней равномерной областью

Пусть опять функция $A : [0, \infty) \to [0, \infty)$ не убывает, выпукла и

$$(\exists a \geqslant 1)\ (\forall s \geqslant 0) \quad A(2s) \leqslant a A(s). \tag{32}$$

Рассмотрим «A-обобщение» величины $V(u)$ из § 2. Для открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ и непрерывных функций $\theta > 0$ и $w > 0$ в U положим

$$U_t = \big\{x \in U : \theta(x) > t\big\},$$

$$V(u) = \int_0^{\sup \theta} \left(\inf_{v \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(U_t)} \int_{U_t} A\big(t^{-1}|u - v| + |\nabla v|\big) w\, dx \right) dt.$$

Уже отмечалось, что $V(u)$ похоже на норму вещественного интерполяционного пространства. Известные интерполяционные результаты ([6, 6.4] или [22, 2.4.2]) и общая идея $b_2^{1/2}$-контроля границы области подсказывают, что величина $V(u)$

может быть сравнима с аналогом выражения $\|u\|^2_{b_2^{1/2}}$. Мы изучим вспомогательное выражение $W_\alpha(u)$ такого рода и более удобное выражение $X_\beta(u)$.

Пусть U — область, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ в семействе шаров
$$\{B_U(x, 2^{k-1})\colon x \in U_{\alpha 2^k}\}$$
по лемме Цорна или более конструктивным образом выберем максимальное подсемейство попарно непересекающихся шаров
$$\{B_U(x, 2^{k-1})\colon x \in \mathcal{C}_k\}. \tag{33}$$
Положим
$$\mathcal{B}_k = \{B_U(x, 2^{k+1})\colon x \in \mathcal{C}_k\},$$
$$W_\alpha(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \sum_{B \in \mathcal{B}_k} \inf_{\gamma \in \mathbb{R}} \int_B A\big(2^{-k}|u-\gamma|\big) w\,dx, \tag{34}$$
$$X_\beta(u) = \int_{x,y \in U\colon \theta(x) > \beta\rho_U(x,y)} A\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\rho_U(x,y)}\right) \frac{w(x)\,dx\,dy}{\rho_U^{n-1}(x,y)}.$$

Лемма 7. *Предположим, что*
$$(\exists \lambda > 1)\ (\exists \Lambda \geqslant 1)\ (\forall s, s'\colon 0 \leqslant s < s' < \infty) \quad A(s) \leqslant (s/s')^\lambda \Lambda A(s'), \tag{35}$$
$$U \text{ — внутренняя равномерная область с параметрами } \mu \text{ и } \nu, \tag{36}$$
$$\theta \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(U) \quad \& \quad \operatorname{ess\,sup} |\nabla\theta| \leqslant M < \infty. \tag{37}$$
Тогда для любой функции $u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(U)$
$$V(u) \leqslant c(n, a, \alpha, \mu) W_\alpha(u), \tag{38}$$
$$\alpha \geqslant 2M + 4\beta \quad \Rightarrow \quad W_\alpha(u) \leqslant c(n, a, \lambda, \Lambda, \mu) X_\beta(u). \tag{39}$$
Если же выполнены предположения (36), (37) *и*
$$(\exists N \geqslant 1)\ (\forall k)\ (\forall B \in \mathcal{B}_k)\ (\forall x, y \in B) \quad w(x) \leqslant N w(y), \tag{40}$$
то
$$\beta \geqslant 2\alpha \quad \Rightarrow \quad X_\beta(u) \leqslant c(n, a, N) W_\alpha(u), \tag{41}$$
$$\alpha > 2M \quad \Rightarrow \quad W_\alpha(u) \leqslant c(n, a, \alpha, \mu, \nu, M, N) V(u). \tag{42}$$

Доказательство. Пусть имеет место (36). Если множество $\mathcal{C}_k$ содержит пару точек $X \neq Y$, то из условия $B_U(X, 2^{k-1}) \cap B_U(Y, 2^{k-1}) = \varnothing$ легко получить, что $\operatorname{diam}_U U \geqslant \rho_U(X, Y) \geqslant 2^k$, так что к шарам семейства (33) применима лемма 5. Отсюда с использованием меры Лебега выводим
$$y \in B_U(x, 2^{k+1}) \quad \Rightarrow \quad B_U(x, 2^{k-1}) \subset B(y, 5 \cdot 2^{k-1}) \quad \text{(евклидов шар)},$$
$$(\forall k)\ (\forall y \in U) \quad \sum_{B \in \mathcal{B}_k} \chi_B(y) \leqslant c_1(n, \mu), \tag{43}$$
где χ_B — характеристическая функция множества B. Оценка (43) тривиальна, если множество $\mathcal{C}_k$ пусто или содержит лишь одну точку.

Для $B = B_U(x, 2^{k+1}) \in \mathcal{B}_k$ положим
$$\Phi_B(y) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \rho_U(x,y) < 2^k, \\ 2 - 2^{-k}\rho_U(x,y) & \text{при} \quad 2^k \leqslant \rho_U(x,y) < 2^{k+1}, \\ 0 & \text{при} \quad \rho_U(x,y) \geqslant 2^{k+1}, \end{cases}$$

$$\varphi_B = \frac{\Phi_B}{\sum_{B'\in\mathcal{B}_k}\Phi_{B'}}.$$

По причине максимальности семейства (33) шары $B_U(x,2^k)$ с $x\in\mathcal{C}_k$ образуют покрытие множества $U_{\alpha 2^k}$, откуда

$$\sum_{B'\in\mathcal{B}_k}\Phi_{B'}\Big|_{U_{\alpha 2^k}} \geqslant 1 \quad \& \quad \operatorname*{ess\,sup}_{U_{\alpha 2^k}}|\nabla\varphi_B| \leqslant c_1 2^{-k}.$$

Если $W_\alpha(u)<\infty$, то точные нижние грани в (34) достигаются на некоторых числах γ_B ввиду непрерывности функции A и теоремы Фату, поэтому можно ввести функции

$$v_k = \sum_{B\in\mathcal{B}_k}\gamma_B\varphi_B \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(U_{\alpha 2^k}).$$

При $t\in[\alpha 2^k,\alpha 2^{k+1})$ имеем $U_t\subset U_{\alpha 2^k}$, откуда почти всюду в U_t

$$\begin{aligned} t^{-1}|u-v_k|+|\nabla v_k| &\leqslant \alpha^{-1}2^{-k}\sum_{B\in\mathcal{B}_k}|u-\gamma_B|\varphi_B+\sum_{B\in\mathcal{B}_k}|u-\gamma_B||\nabla\varphi_B| \\ &\leqslant (\alpha^{-1}+c_1)2^{-k}\sum_{B\in\mathcal{B}_k}|u-\gamma_B|\chi_B, \end{aligned}$$

$$\int_{U_t}A\big(t^{-1}|u-v_k|+|\nabla v_k|\big)w\,dx \leqslant c(n,a,\alpha,\mu)\sum_{B\in\mathcal{B}_k}\int_B A\big(2^{-k}|u-\gamma_B|\big)w\,dx.$$

Интегрирование по t и суммирование по k доказывают (38).

Пусть верны условия (35)–(37) и $\alpha\geqslant 2M+4\beta$. Рассмотрим шар $B\in\mathcal{B}_k$. Если $u\big|_B\in L^1(B)$, то для среднего $u_B=\frac{\int_B u\,dy}{\operatorname{mes}B}$ по неравенству Иенсена

$$\begin{aligned} \inf_{\gamma\in\mathbb{R}}\int_B A\big(2^{-k}|u-\gamma|\big)w\,dx &\leqslant \int_B A\big(2^{-k}|u-u_B|\big)w\,dx \\ &\leqslant \int_{x,y\in B}A\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{2^k}\right)\frac{w(x)\,dx\,dy}{\operatorname{mes}B}. \end{aligned}$$

Полученная оценка верна и при $A\equiv 0$. Если $A\not\equiv 0$ и $u\big|_B\notin L^1(B)$, то для всех $x\in B$ интеграл по y расходится ввиду (35), так что полученная оценка верна во всех случаях. Пусть $x,y\in B=B_U(z,2^{k+1})$ и $x\neq y$. В силу (30) и (43)

$$\operatorname{mes}B\geqslant \operatorname{mes}B_U\big(z,\rho_U(x,y)/2\big)\geqslant c_2(n,\mu)\rho_U^n(x,y),$$

$$\sum_{B\in\mathcal{B}_k:\ x,y\in B}\frac{1}{\operatorname{mes}B}\leqslant c_1c_2^{-1}\rho_U^{-n}(x,y).$$

Кроме того, по (37), (32) и (35)

$$\rho_U(x,y)<2^{k+2},$$

$$\theta(x)\geqslant\theta(z)-M\rho_U(x,z)>\alpha 2^k-M2^{k+1}\geqslant\beta 2^{k+2}>\beta\rho_U(x,y),$$

$$2^kA\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{2^k}\right)\leqslant c(a,\lambda,\Lambda)\rho_U(x,y)\left(\frac{\rho_U(x,y)}{2^k}\right)^{\lambda-1}A\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\rho_U(x,y)}\right).$$

Сопоставляя выведенные соотношения и суммируя по k с учетом условия $\lambda>1$, получаем утверждение (39).

Пусть верно (40) и $\beta \geqslant 2\alpha$. Для различных точек $x, y \in U$ с $\theta(x) > \beta\rho_U(x,y)$ найдем k такое, что $2^{k-1} \leqslant \rho_U(x,y) < 2^k$. Тогда

$$\theta(x) > 2\alpha\rho_U(x,y) \geqslant \alpha 2^k,$$

т.е. $x \in U_{\alpha 2^k}$, поэтому существует $z \in \mathcal{C}_k$ со свойством $x \in B_U(z, 2^k)$. Значит,

$$x, y \in B = B_U(z, 2^{k+1}) \in \mathcal{B}_k.$$

Допустим, что $W_\alpha(u) < \infty$. Находя опять числа γ_B и применяя (40), имеем

$$A\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\rho_U(x,y)}\right) \leqslant \frac{a^2}{2}\Big\{A\big(2^{-k}|u(x)-\gamma_B|\big) + A\big(2^{-k}|u(y)-\gamma_B|\big)\Big\},$$

$$\frac{w(x)}{\rho_U^{n-1}(x,y)} \leqslant 2^{(k-1)(1-n)} \min\big\{w(x), Nw(y)\big\}.$$

Теорема Фубини и оценка $\operatorname{mes} B \leqslant c(n)2^{kn}$ доказывают (41).

Наконец, пусть верны условия (36), (37), (40) и $\alpha > 2M$. Рассмотрим

$$B \in \mathcal{B}_k \quad \& \quad (\alpha - 2M)2^{k-1} \leqslant t < (\alpha-2M)2^k \quad \& \quad v \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(U_t).$$

Если $x \in B = B_U(z, 2^{k+1})$, то $\theta(x) > \alpha 2^k - M2^{k+1} > t$ по (37), откуда $B \subset U_t$. На основе оценки $\operatorname{diam} B \leqslant 2^{k+2}$, теоремы 3 и свойств (40) и (43) имеем

$$\inf_\gamma \int_B A\big(2^{-k}|v-\gamma|\big)\,dx \leqslant c_3(n,a,\mu,\nu)\int_B A\big(|\nabla v|\big)\,dx,$$

$$\inf_\gamma \int_B A\big(2^{-k}|u-\gamma|\big)w\,dx \leqslant \left(\sup_B w\right)\frac{a}{2}\int_B \Big\{A\big(2^{-k}|u-v|\big) + c_3 A\big(|\nabla v|\big)\Big\}\,dx$$

$$\leqslant c_4(n,a,\alpha,\mu,\nu,M,N)\int_B A\big(t^{-1}|u-v| + |\nabla v|\big)w\,dx,$$

$$\sum_{B\in\mathcal{B}_k}\inf_\gamma \int_B A\big(2^{-k}|u-\gamma|\big)w\,dx \leqslant c_1c_4 \inf_{v\in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(U_t)}\int_{U_t} A\big(t^{-1}|u-v| + |\nabla v|\big)w\,dx.$$

Интегрируя по t и суммируя по k, получаем (42). □

Докажем главный результат статьи. Величину (45) можно считать весовым аналогом суммы квадратов $\|\omega_0\|^2_{b_2^{1/2}} + \|\omega_1\|^2_{b_2^{1/2}}$ ввиду [22, (5.2.3/7)].

Теорема 4. *Пусть n, Ξ, ω_0, ω_1, p, K, θ и дефект U такие, как в начале § 2, причем Ξ является внутренней равномерной областью с параметрами μ и ν. Возьмем $\beta > 8K$. Тогда*

$$c(n,p,K,\mu,\nu,\beta)X_\beta(\omega_0,\omega_1) \leqslant U \leqslant c(n,p,K,\mu,\beta)X_\beta(\omega_0,\omega_1), \tag{44}$$

$$X_\beta(\omega_0,\omega_1) = \int_{x,y\in\Xi:\ \theta(x)>\beta\rho_\Xi(x,y)} \frac{|\omega_0(x)-\omega_0(y)|^2 + |\omega_1(x)-\omega_1(y)|^2}{\theta^p(x)\rho_\Xi^n(x,y)}\,dx\,dy. \tag{45}$$

Доказательство. Рассмотрим предположения настоящего параграфа с

$$(A, U, \theta, w) = (f_p, \Xi, \theta, \theta^{-p}).$$

Величина $V(u)$ превращается в величину $V(u)$ из § 2, для которой верно (8). Ввиду (3) и (4) условия (32) и (35)–(37) имеют место с постоянными

$$(a, \lambda, \Lambda, \mu, \nu, M) = (2^{p_1}, p_0, 1, \mu, \nu, 2K).$$

Оценки (38) и (39) для $\alpha = 4K + 4\beta$ дают, что

$$V(\omega_i) \leqslant c(n,p,K,\mu,\beta)X_\beta(\omega_i).$$

Построим семейства $\mathcal{B}_k$ по значению $\alpha = \beta/2$. Для $x, y \in B_U(z, 2^{k+1}) \in \mathcal{B}_k$

$$\theta(x) > \theta(z) - M2^{k+1} > \alpha 2^k - M2^{k+1} = (\beta - 8K)2^{k-1},$$

$$\theta(y) < \theta(x) + M2^{k+2} = \theta(x) + 16K2^{k-1} < \frac{\beta + 8K}{\beta - 8K}\theta(x)$$

ввиду (37), поэтому условие (40) выполняется при $N = (\beta + 8K)^p(\beta - 8K)^{-p}$. Оценки (41) и (42) показывают, что

$$X_\beta(\omega_i) \leqslant c(n, p, K, \mu, \nu, \beta)V(\omega_i).$$

Неравенства (8) и полученные оценки влекут, что

$$c(n, p, K, \mu, \beta)U \leqslant X_\beta(\omega_0) + X_\beta(\omega_1) \leqslant c(n, p, K, \mu, \nu, \beta)U.$$

При $x, y \in \Xi$ имеем $|\omega_i(x) - \omega_i(y)| \leqslant K\rho_\Xi(x, y)$, откуда

$$c_1(p, K)\frac{|\omega_i(x) - \omega_i(y)|^2}{\rho_\Xi^2(x, y)} \leqslant f_p\left(\frac{|\omega_i(x) - \omega_i(y)|}{\rho_\Xi(x, y)}\right) \leqslant c_2(p, K)\frac{|\omega_i(x) - \omega_i(y)|^2}{\rho_\Xi^2(x, y)},$$

$$c_1 X_\beta(\omega_0, \omega_1) \leqslant X_\beta(\omega_0) + X_\beta(\omega_1) \leqslant c_2 X_\beta(\omega_0, \omega_1).$$

Это доказывает (44) и теорему 4. □

В конструкции липшицева цилиндрического конденсатора выделенное вертикальное направление используется для определения и пластин, и поля Ω конденсатора. Автор затрудняется указать литературу, где такие конденсаторы использовались бы при $n \geqslant 3$. При $n = 2$ они тесно связаны с конформными отображениями, откуда и позаимствован термин *интеграл Альфорса*. Как уже отмечалось, этой связи планируется посвятить отдельную публикацию. Здесь лишь анонсируем, что для полос вида

$$\Omega = \left\{x + iy \colon x_0 < x < +\infty \ \&\ \omega_0(x) < y < \omega_1(x)\right\}$$

с K-липшицевыми функциями $\omega_i : (x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ равносильность свойств (1) и теорема 4 показывают равносильность свойства (2) и условия

$$X_\beta(\omega_0, \omega_1)\big|_{p=n=2\ \&\ \beta>8K} < \infty.$$

Это значительно более явный критерий, чем критерий из [20].

References

[1] V. Anandam, *Harmonic Functions and Potentials on Finite or Infinite Networks*, Springer, Heidelberg, 2011. MR2816628

[2] G.D. Anderson, *Derivatives of the conformal capacity of extremal rings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., **10** (1985), 29–46. MR0802465

[3] N. Arcozzi, *Capacity of shrinking condensers in the plane*, J. Funct. Anal., **263** (2012), 3102–3116. MR2973335

[4] N. Arcozzi, R. Rochberg, E.T. Sawyer, B.D. Wick, *Potential theory on trees, graphs and Ahlfors-regular metric spaces*, Potential Anal., **41** (2014), 317–366. MR3232028

[5] Z. Balogh, A. Volberg, *Geometric localization, uniformly John property and separated semihyperbolic dynamics*, Ark. Mat., **34** (1996), 21–49. MR1396621

[6] Yu.A. Brudnyi, S.G. Krein, E.M. Semenov, *Interpolation of linear operators* (Russian), Itogi Nauki Tekh., Ser. Mat. Anal., **24** (1986), 3–163. MR0887950

[7] A. Colesanti, K. Nyström, P. Salani, J. Xiao, D. Yang, G. Zhang, *The Hadamard variational formula and the Minkowski problem for p-capacity*, Adv. Math., **285** (2015), 1511–1588. MR3406534

[8] A.R. Elcrat, K.G. Miller, *Variational formulas on Lipschitz domains*, Trans. Amer. Math. Soc., **347** (1995), 2669–2678. MR1285987

[9] I. Fragalà, F. Gazzola, M. Pierre, *On an isoperimetric inequality for capacity conjectured by Pólya and Szegö*, J. Differ. Equations, **250** (2011), 1500–1520. MR2737215
[10] P. Gyrya, L. Saloff-Coste, *Neumann and Dirichlet Heat Kernels in Inner Uniform Domains*, Astérisque, Société Mathématique de France, Paris, **336** (2011). MR2807275
[11] P. Hajłasz, *Sobolev inequalities, truncation method, and John domains*, Papers on analysis: a volume dedicated to Olli Martio on the occasion of his 60th birthday. Eds. J. Heinonen et al., Univ. Jyväskylä, Jyväskylä, **83** (2001), 109–126. MR1886617
[12] F. John, *Rotation and strain*, Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 391–413. MR0138225
[13] R. Laugesen, *Extremal problems involving logarithmic and Green capacity*, Duke Math. J., **70** (1993), 445–480. MR1219819
[14] R.D. Lyons, Y. Peres, *Probability on Trees and Networks*, Cambridge University Press, New York, 2016. MR3616205
[15] O. Martio, J. Sarvas, *Injectivity theorems in plane and space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., **4** (1978/79), 383–401. MR0565886
[16] V.G. Maz'ya, *Sobolev Spaces. With Applications to Elliptic Partial Differential Equations*, Springer, Berlin, 2011. MR2777530
[17] A.I. Parfenov, *Series in a Lipschitz perturbation of the boundary for solving the Dirichlet problem*, Sib. Adv. Math., **27** (2017), 274–304. MR3676099
[18] Yu.G. Reshetnyak, *Integral representations of differentiable functions in domains with non-smooth boundary* (Russian), Sib. Math. J., **21** (1980), 108–116. MR0601195
[19] B. Rodin, S.E. Warschawski, *Extremal length and the boundary behavior of conformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., **2** (1976), 467–500. MR0466516
[20] B. Rodin, S.E. Warschawski, *A necessary and sufficient condition for the asymptotic version of Ahlfors' distortion property*, Trans. Amer. Math. Soc., **276** (1983), 281–288. MR0684508
[21] P.M. Soardi, *Potential Theory on Infinite Networks*, Springer, Berlin, 1994. MR1324344
[22] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983. MR0781540
[23] J. Väisälä, *Uniform domains*, Tôhoku Math. J., **40** (1988), 101–118. MR0927080

Anton Igorevich Parfenov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: parfenov@math.nsc.ru