S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 92–105 (2018) УДК 512.554.5

DOI 10.17377/semi.2018.15.011 MSC 17A70, 17D15

СИНГУЛЯРНЫЕ 6-МЕРНЫЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ

С.В. ПЧЕЛИНЦЕВ, О.В. ШАШКОВ

Abstract. A simple right alternative superalgebra is called *singular* if its even part is an algebra with zero multiplication. The first example of a 5-dimensional (this is the smallest possible dimension) singular superalgebra was given by J.P. da Silva, L.S.I. Murakami and I.P. Shestakov in 2016. In the previous paper we classified singular 5-dimensional superalgebras.

It is proved that there are no 6-dimensional singular superalgebras.

Keywords: simple right alternative superalgebra, singular superalgebra.

Введение

Проблема классификации простых алгебр является одной из центральных в структурной теории колец. В 1954 году А.А. Алберт [1] доказал, что всякая простая конечномерная правоальтернативная алгебра альтернативна. Замечательные результаты о бесконечномерных простых правоальтернативных алгебрах принадлежат И.М. Михееву [2] и В.Г. Скосырскому [3]: в [2] приведен пример простой правоальтернативной алгебры с тождеством $x^3 = 0$; в [3] доказано, что простая унитальная правоальтернативная алгебра альтернативна.

Задача описания простых конечномерных правоальтернативных супералгебр была сформулирована И.П. Шестаковым в Днестровской тетради [4].

Всюду далее, если не оговорено противное, термин «супералгебра» означает конечномерную правоальтернативную $\mathbb{Z}_2$-градуированную алгебру над полем Φ характеристики $\neq 2$. Первые примеры простых супералгебр $B_{4|4}$ и $B_{2|3}$ были указаны в [5], где $B_{4|4} = \Phi_2 \oplus M$ — супералгебра с четной частью Φ_2 (алгебра

Pchelintsev, S.V., Shashkov, O.V., Singular 6-dimensional superalgebras.

Первый автор поддержан РФФИ (грант 16-01-00756).

Второй автор поддержан РФФИ (грант 16-01-00756) и грантом FAPESP (Brazil), номер 2017/04702–5.

Поступила 17 декабря 2017 г., опубликована 8 февраля 2018 г.

матриц 2-го порядка), $B_{2|3} = V_2 \oplus M$ — супералгебра с 2-мерной четной частью V_2 с нулевым умножением.

Заметим, что супералгебра $B_{4|4}$ унитальна, т.е. имеет единицу. Унитальные супералгебры изучались в работах [6]–[11]. В частности, в них были классифицированы простые конечномерные правоальтернативные супералгебры, в которых четная часть ассоциативна и коммутативна (характеристика 0), а также простые супералгебры, являющиеся ассоциативными бимодулями над четной частью.

Простую правоальтернативную супералгебру назовем *сингулярной*, если её четная часть имеет нулевое умножение. В работе [12] были классифицированы сингулярные 5-мерные супералгебры; оказалось, что они являются супералгебрами вида $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$. Кроме того, над алгебраически замкнутым полем все они изоморфны супералгебре $B_{2|3}$. Там же был поставлен вопрос о существовании сингулярных супералгебр размерности большей 5.

Данная работа состоит из 4-х параграфов. §1 носит предварительный характер. В §2 доказано, что не существует сингулярных супералгебр $B = A \oplus M$, для которых $d_A = \dim A \geq 3$, $d_M = \dim M = 3$. Более точно, предположив существование такой супералгебры $B = A \oplus M$, сначала доказывается, что $d_A = 3$. Далее, удается выбрать в A и M базисы a, b, c и x_1, x_2, x_3 соответственно и «восстановить» её таблицу умножения:

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = 0, & x_3a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, \\ x_1b = 0, & x_2b = 0, & x_3b = x_2, \\ cx_1 = -\alpha x_2, & cx_2 = \beta x_1 - \alpha x_3, & cx_3 = -\beta x_2, \\ x_1c = \alpha x_2, & x_2c = 0, & x_3c = \beta x_2. \end{cases}$$

Легко понять, что одномерное пространство $\Phi(\alpha a - \beta b + c)$ является идеалом в B, что невозможно. Тем самым, справедлива

Теорема 1. *Пусть $B = A \oplus M$ — сингулярная супералгебра. Тогда либо B изоморфна супералгебре $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$, либо $\dim M \geq 4$.*

§3 и §4 посвящены доказательству следующего результата

Теорема 2. *Не существует сингулярных супералгебр размерности 6.*

В силу теоремы 1 можно считать, что сингулярная супералгебра $B = A \oplus M$ имеет 2-мерную четную часть и 4-мерную нечетную часть.

Сначала в §3 доказано, что не существует 6-мерных сингулярных супералгебр, в которых существует такой $a \in A$, что для оператора левого умножения L_a выполнено $L_a^3 \neq 0$. Наиболее трудный случай $d_A = 2$, $d_M = 4$ и для любого $a \in A$ выполнено $L_a^3 = 0$ рассматривается в §4.

1. Обозначения, тождества и замечания

1.1. **Обозначения.** Пусть $B = A \oplus M$ — супералгебра, т.е. $\mathbb{Z}_2$ — градуированная алгебра с четной частью A и нечетной — M, такими что $A^2 + M^2 \subseteq A$, а $AM + MA \subseteq M$. Пусть $|p|$ обозначает *четность* элемента p, т.е. $|p| = 0 \Leftrightarrow p \in A$, $|p| = 1 \Leftrightarrow p \in M$; $A \cup M$ — множество однородных элементов. Идеал I супералгебры $B = A \oplus M$ называется *градуированным*, если $I = (I \cap A) \oplus (I \cap M)$.

Супералгебра $B = A \oplus M$ называется *простой*, если $B^2 \neq 0$ и B не содержит собственных градуированных идеалов.

Как обычно, если $p, q, r \in B$, то

$[p, q] = pq - qp$ – коммутатор элементов p, q;

$p \circ q = pq + qp$ – их йорданово произведение;

$(p, q, r) = (pq)r - p(qr)$ – ассоциатор элементов p, q, r.

Супералгебра называется *правоальтернативной*, если для любых однородных элементов p, q, r верно равенство:

$$(p, q, r) + (-1)^{|q||r|}(p, r, q) = 0. \tag{1}$$

Простая правоальтернативная супералгебра $B = A \oplus M$, четная часть которой имеет нулевое умножение, т.е. $A^2 = 0$, называется *сингулярной.*

Всюду ниже $B = A \oplus M$ — сингулярная супералгебра над полем Φ характеристики $\neq 2$. Положим $d_A = \dim A$, $d_M = \dim M$; пару чисел (d_A, d_M) назовем *d-типом* супералгебры $B = A \oplus M$.

Если не оговорено противное, то указанные ниже латинские буквы, возможно с индексами, обозначают однородные элементы:

$$a, b, c \in A, \qquad x, y, z, t, u, v \in M, \qquad p, q, r, s \in A \cup M.$$

Обозначим через $\mathrm{span}(X)$ подпространство, порожденное множеством X. Далее, если одно из двух множеств $X, Y \subseteq B$ является подпространством, то положим:

$$XY = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i | x_i \in X, y_i \in Y, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad X * Y = XY + YX.$$

1.2. **Основные тождества.** Напомним основные тождества, выполняющиеся в правоальтернативных супералгебрах. Тождество (1) равносильно следующим двум условным тождествам для чётного a и нечётных x, y:

$$(pa)q + (pq)a = p(a \circ q), \tag{2}$$

$$(px)y - (py)x = p[x, y]. \tag{3}$$

1.3. **Известные результаты.** Нам потребуются следующие 4 леммы. Отметим, что лемма 2 принадлежит Алберту, а остальные доказаны в [12]. Как обычно, L_a и R_a — операторы левого и правого умножения на элемент a.

Лемма 1. *Справедливы следующие свойства:*

$$а)\ M^2 = A; \qquad б)\ M = A * M.$$

Лемма 2. *Если $a^2 = 0$, то $T_1 \ldots T_4 = 0$, где $T_i \in \{L_a, R_a\}$ $(i = \overline{1, 4})$.*

Лемма 3. *Случай $L_a^3 = 0$ для любого $a \in A$ невозможен.*

Лемма 4. *Справедливы неравенства: $d_A \geq 2$, $d_M \geq 3$.*

Из леммы 4 вытекает, что для доказательства теоремы 1 достаточно рассмотреть случай $d_M = 3$.

2. Супералгебры с 3-мерной нечетной частью

В этом параграфе предполагается, что $d_M = 3$.

2.1. **Структура A-бимодуля M.** В работе [12] было доказано, что в предположении 3-мерности нечетной части существуют элементы $a, b \in A$ и базис x_1, x_2, x_3 в M такие, что выполнены равенства системы

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = 0, \quad x_3a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, \quad bx_3 = -x_2, \\ x_1b = 0, & x_2b = 0, \quad x_3b = x_2, \end{cases}$$

которая совпадает с системой (17) из работы [12]. Заметим, что a, b линейно независимы. Допустим, что $c \notin \mathrm{span}(a, b)$. Следуя [12], вычислим действия операторов R_c, L_c на базис x_1, x_2, x_3. Положим

$$\begin{cases} cx_1 = \mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3, \\ cx_2 = \xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3, \\ cx_3 = \nu_1x_1 + \nu_2x_2 + \nu_3x_3. \end{cases}$$

Поскольку $(cx_1)a = c(x_1 \circ a) = 0$, то $0 = (cx_1)a = \mu_1x_1a + \mu_2x_2a + \mu_3x_3a = -\mu_1x_2$, откуда $\mu_1 = 0$ и $cx_1 = \mu_2x_2 + \mu_3x_3$. Аналогично, $(cx_1)b = c(x_1 \circ b) = 0$ и $0 = \mu_2x_2b + \mu_3x_3b = \mu_3x_2$, откуда $\mu_3 = 0$ и, стало быть, $cx_1 = \mu x_2$ и

$$\begin{cases} cx_1 = \mu x_2, \\ cx_2 = \xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3, \\ cx_3 = \nu_1x_1 + \nu_2x_2 + \nu_3x_3. \end{cases}$$

Далее, поскольку

$$(cx_2)a = c(x_2 \circ a) = cx_3, \qquad (cx_2)b = c(x_2 \circ b) = cx_1,$$

то

$$cx_3 = (cx_2)a = \xi_1x_1a = -\xi_1x_2, \qquad cx_1 = (cx_2)b = \xi_3x_3b = \xi_3x_2,$$

следовательно, $\xi_3 = \mu$ и в новых обозначениях имеет место система

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = 0, & x_3a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, \\ x_1b = 0, & x_2b = 0, & x_3b = x_2, \\ cx_1 = \mu x_2, & cx_2 = \xi x_1 + \eta x_2 + \mu x_3, & cx_3 = -\xi x_2. \end{cases}$$

Используя эту систему равенств, вычислим произведения

$$\begin{cases} x_1c = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3, \\ x_2c = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3, \\ x_3c = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3. \end{cases}$$

Поскольку

$$(x_1c)a = -(x_1a)c = x_2c, \qquad (x_1c)a = \alpha_1x_1a = -\alpha_1x_2,$$

то $x_2c = -\alpha_1x_2$ и по правой альтернативности (т.к. для оператора правого умножения R_c выполняется $R_c^2 = 0$) $\alpha_1 = 0$, а также $x_2c = 0$, т.е.

$$x_1c = \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3, \qquad x_2c = 0, \qquad x_3c = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3.$$

Учитывая, что

$$(x_1c)b = -(x_1b)c = 0, \qquad 0 = \alpha_2x_2b + \alpha_3x_3b = \alpha_3x_2,$$

получаем $\alpha_3 = 0$ и

$$x_1c = \alpha_2x_2, \qquad x_2c = 0, \qquad x_3c = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3.$$

Наконец,

$$0=(x_3c)c=\gamma_1x_1c+\gamma_2x_2c+\gamma_3x_3c=\gamma_1\alpha_2x_2+\gamma_3(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\gamma_3x_3)=$$
$$=\gamma_1\gamma_3x_1+(\gamma_1\alpha_2+\gamma_2\gamma_3)x_2+\gamma_3^2x_3,$$

значит, $\gamma_3=0$, $\gamma_1\alpha_2=0$, т.е.

$$x_1c=\alpha_2x_2,\qquad x_2c=0,\qquad x_3c=\gamma_1x_1+\gamma_2x_2,\qquad \gamma_1\alpha_2=0.$$

Тем самым, полагая $\alpha=\alpha_2$, имеем

$$\begin{cases} ax_1=x_2, & ax_2=x_3, & ax_3=0,\\ x_1a=-x_2, & x_2a=0, & x_3a=0,\\ bx_1=0, & bx_2=x_1, & bx_3=-x_2,\\ x_1b=0, & x_2b=0, & x_3b=x_2,\\ cx_1=\mu x_2, & cx_2=\xi x_1+\eta x_2+\mu x_3, & cx_3=-\xi x_2,\\ x_1c=\alpha x_2, & x_2c=0, & x_3c=\gamma_1x_1+\gamma_2x_2, \quad \gamma_1\alpha=0. \end{cases}$$

Число параметров в системе можно уменьшить. Сравнивая выражения

$$c(x_2\circ c)=(cx_2)c=\xi x_1c+\eta x_2c+\mu x_3c=\xi\alpha x_2+\mu(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)=$$
$$=\mu\gamma_1x_1+(\xi\alpha+\mu\gamma_2)x_2,$$
$$c(x_2\circ c)=c(\xi x_1+\eta x_2+\mu x_3)=\xi cx_1+\eta cx_2+\mu cx_3=$$
$$=\xi\mu x_2+\eta(\xi x_1+\eta x_2+\mu x_3)-\mu\xi x_2=\eta\xi x_1+\eta^2x_2+\mu\eta x_3,$$

получаем

$$\mu\gamma_1=\eta\xi,\qquad \xi\alpha+\mu\gamma_2=\eta^2,\qquad \mu\eta=0.$$

Учитывая, что $\gamma_1\alpha=0$, имеем

$$\gamma_1\alpha=0,\qquad 0=\mu\gamma_1\alpha=\eta\xi\alpha,\qquad \eta\xi\alpha+\eta\mu\gamma_2=\eta^3,\qquad \mu\eta=0,$$

значит, $\eta^3=0$ и $\eta=0$. Итак,

$$\begin{cases} ax_1=x_2, & ax_2=x_3, & ax_3=0,\\ x_1a=-x_2, & x_2a=0, & x_3a=0,\\ bx_1=0, & bx_2=x_1, & bx_3=-x_2,\\ x_1b=0, & x_2b=0, & x_3b=x_2,\\ cx_1=\mu x_2, & cx_2=\xi x_1+\mu x_3, & cx_3=-\xi x_2,\\ x_1c=\alpha x_2, & x_2c=0, & x_3c=\gamma_1x_1+\gamma_2x_2,\\ \gamma_1\alpha=0, & \mu\gamma_1=0, & \xi\alpha+\mu\gamma_2=0. \end{cases}$$

Далее, поскольку

$$b(x_2\circ c)=(bx_2)c=x_1c=\alpha x_2,$$

$$b(x_2\circ c)=b(cx_2)=\xi bx_1+\mu bx_3=-\mu x_2,$$

то $\mu=-\alpha$ и справедлива система равенств

$$\begin{cases} ax_1=x_2, & ax_2=x_3, & ax_3=0,\\ x_1a=-x_2, & x_2a=0, & x_3a=0,\\ bx_1=0, & bx_2=x_1, & bx_3=-x_2,\\ x_1b=0, & x_2b=0, & x_3b=x_2,\\ cx_1=-\alpha x_2, & cx_2=\xi x_1-\alpha x_3, & cx_3=-\xi x_2,\\ x_1c=\alpha x_2, & x_2c=0, & x_3c=\gamma_1x_1+\gamma_2x_2,\\ \gamma_1\alpha=0, & (\xi-\gamma_2)\alpha=0. & \end{cases}$$

Наконец, сравнивая выражения

$$a(x_2 \circ c) = (ax_2)c = x_3c = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2, \qquad a(x_2 \circ c) = a(cx_2) = \xi a x_1 = \xi x_2,$$

получаем $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \xi$. Считая $\beta = \xi$, получаем таблицу умножения четных на нечетные элементы (в любом порядке), зависящую от двух параметров:

$$\left\{\begin{array}{lll} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = 0, & x_3a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, \\ x_1b = 0, & x_2b = 0, & x_3b = x_2, \\ cx_1 = -\alpha x_2, & cx_2 = \beta x_1 - \alpha x_3, & cx_3 = -\beta x_2, \\ x_1c = \alpha x_2, & x_2c = 0, & x_3c = \beta x_2. \end{array}\right. \tag{4}$$

2.2. **Доказательство теоремы 1.** Вычислим сначала следующие 6 произведений x_ix_j нечетных элементов:

(1) $x_2x_1 = -(x_1a)x_1 = -x_1(a \circ x_1) = 0$,
(2) $x_2x_3 = x_2(a \circ x_2) = (x_2a)x_2 + x_2^2a = 0$,
(3) $x_1x_3 = x_1(a \circ x_2) = (x_1a)x_2 = -x_2^2$,
(4) $x_2^2 = (ax_1)x_2 = (ax_2)x_1 = x_3x_1$,
(5) $x_1^2 = x_1(b \circ x_2) = (x_1b)x_2 = 0$,
(6) $x_3^2 = x_3(a \circ x_2) = (x_3a)x_2 = 0$.

Полагая $p = x_1x_2$, $q = x_1x_3$ и $r = x_3x_2$, получаем таблицу умножения нечетных элементов:

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	p	q
x_2	0	$-q$	0
x_3	$-q$	r	0

Если $d_M = 3$, то $A = M^2$ по лемме 1, следовательно $d_A \leq 3$. Докажем от противного, что $d_A \neq 3$. Напомним, что элементы a, b, c, участвующие в (4) — линейно независимы. Рассмотрим вектор $p = \alpha a - \beta b + c$. Прямое вычисление показывает, что $p * B = 0$. Так как $p \neq 0$, то Φp — одномерный идеал в B, что невозможно.

3. Супералгебры, в которых существует такой $a \in A$, что выполнено $L_a^3 \neq 0$

В этом и следующем параграфах предполагается, что $d_A = 2$ и $d_M = 4$. Именно этот случай необходимо рассмотреть для доказательства теоремы 2. Допустим, что $L_a^3 \neq 0$ для некоторого $a \in A$. Тогда оператор L_a обладает жордановым базисом $x_1, \ldots, x_4$ в M таким, что

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = x_4, \quad ax_4 = 0.$$

3.1. **Действие оператора R_a в базисе $x_1, \ldots, x_4$.** Положим

$$x_ia = \sum_k \lambda_i^{(k)} x_k.$$

В силу (2) верно равенство

$$a \cdot ax_i = ax_i \cdot a - a \cdot x_ia,$$

значит, считая, что $x_5 = x_6 = 0$, имеем,

$$x_{i+2} = x_{i+1}a - a\sum_k \lambda_i^{(k)} x_k = \sum_k \lambda_{i+1}^{(k)} x_k - \sum_k \lambda_i^{(k)} x_{k+1} =$$

$$\lambda_{i+1}^{(1)} x_1 + (\lambda_{i+1}^{(2)} - \lambda_i^{(1)})x_2 + (\lambda_{i+1}^{(3)} - \lambda_i^{(2)})x_3 + (\lambda_{i+1}^{(4)} - \lambda_i^{(3)})x_4.$$

Отсюда следует, что $\lambda_{i+1}^{(1)} = 0$, т.е. $\lambda_2^{(1)} = \lambda_3^{(1)} = \lambda_4^{(1)} = 0$.

Далее,

$$\lambda_{i+1}^{(2)} - \lambda_i^{(1)} = 0, \qquad \lambda_{i+1}^{(3)} - \lambda_i^{(2)} = \delta_{i+2,3}, \qquad \lambda_{i+1}^{(4)} - \lambda_i^{(3)} = \delta_{i+2,4},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Из равенства $\lambda_{i+1}^{(2)} - \lambda_i^{(1)} = 0$ заключаем, что

$$\lambda_3^{(2)} = \lambda_2^{(1)} = 0, \quad \lambda_4^{(2)} = \lambda_3^{(1)} = 0.$$

Наконец, из равенства $\lambda_{i+1}^{(3)} - \lambda_i^{(2)} = \delta_{i+2,3}$ получаем, что

$$\lambda_4^{(3)} = \lambda_3^{(2)} + \delta_{53} = 0.$$

Таким образом, доказано, что если $i > j$, то $\lambda_i^{(j)} = 0$. Итак, мы доказали, что матрица оператора R_a в базисе $x_1, \dots, x_4$ является треугольной.

Так как нильпотентный оператор имеет только нулевые собственные значения, то $\lambda_i^{(i)} = 0$. Поэтому, если $i \geq j$, то $\lambda_i^{(j)} = 0$.

Пусть $\gamma = \lambda_1^{(2)}$. Тогда

$$\lambda_2^{(3)} = \lambda_1^{(2)} + \delta_{33} = \gamma + 1,$$

$$\lambda_3^{(4)} = \lambda_2^{(3)} + \delta_{44} = \gamma + 2.$$

Итак, доказано, что

$$\begin{cases} x_1 a = \gamma x_2 + \lambda_{13} x_3 + \lambda_{14} x_4, \\ x_2 a = \quad (\gamma+1) x_3 + \lambda_{24} x_4, \\ x_3 a = \qquad\qquad (\gamma+2) x_4, \qquad x_4 a = 0. \end{cases}$$

Поскольку

$$0 = x_2 a \cdot a = ((\gamma+1)x_3 + \lambda_{i4} x_4)a = (\gamma+1)(\gamma+2)x_4,$$

то

$$(\gamma+1)(\gamma+2) = 0. \tag{5}$$

Далее,

$$0 = x_1 a \cdot a = (\gamma x_2 + \lambda_{13} x_3 + \lambda_{14} x_4)a = \gamma x_2 a + \lambda_{13} x_3 a =$$
$$= \gamma((\gamma+1)x_3 + \lambda_{24} x_4) + \lambda_{13}(\gamma+2)x_4,$$

значит,

$$\gamma(\gamma+1) = 0. \tag{6}$$

Из равенств (5) и (6) следует, что $\gamma = -1$, значит,

$$\begin{cases} x_1 a = -x_2 + \lambda_{13} x_3 + \lambda_{14} x_4, \\ x_2 a = \lambda_{24} x_4, x_3 a = x_4, x_4 a = 0. \end{cases}$$

Заметим также, что $\lambda_{24} - \lambda_{13} = \delta_{34}$, т.е. $\lambda_{24} = \lambda_{13}$.

Тем самым, доказана следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть* $L_a^3 \neq 0$. *Тогда если* $x_1, \dots, x_4$ *– жорданов базис в* M *оператора* L_a, *то для подходящих скаляров* ξ, η *выполнены равенства*:

$$\begin{cases} x_1 a = -x_2 + \xi x_3 + \eta x_4, \\ x_2 a = \xi x_4, \\ x_3 a = x_4, x_4 a = 0. \end{cases}$$

3.2. **Пространство** $M' = aM$**.** Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности шагов.

1^0. Ясно, что $M' = \mathrm{span}(x_2, x_3, x_4)$.

Из леммы 5 немедленно вытекают следующие два пункта

2^0. $M * a = M'$.

3^0. Если $za = 0$ для некоторого $z \in M$, то $z \in M'$.

Пусть b – произвольный элемент из A, z – произвольный элемент из M.

4^0. Докажем, что $Ax_4 \in M'$. Так как $bx_4 \cdot a = 0$, то ввиду п. 3^0 верно $bx_4 \in M'$.

5^0. Докажем, что $Ax_3 \in M'$. В силу тождества (2) и леммы 5 имеем

$$bx_2 \cdot a = b(x_2 \circ a) = b(x_3 + \xi x_4) = bx_3 + \xi bx_4.$$

Так как $bx_2 \cdot a, bx_4 \in M'$ в силу пп. 2^0–4^0, то $bx_3 \in M'$.

6^0. Докажем, что $Ax_4 = 0$.

Поскольку $M' \cdot a \subseteq \Phi x_4$ в силу леммы 5, то $bx_3 \cdot a \in \Phi x_4$. С другой стороны, $bx_3 \cdot a = b(x_3 \circ a) = 2bx_4$, поэтому $bx_4 \in \Phi x_4$. Так как собственные значения нильпотентного оператора L_b (см. лемму 2) равны нулю, то $bx_4 = 0$.

7^0. Докажем, что $A * x_4 = 0$.

Поскольку в силу (2) и п. 6^0 верно $a \cdot x_4 b = a(x_4 \circ b) = ax_4 \cdot b + ab \cdot x_4 = 0$, то $x_4 b \in \ker L_a = \Phi x_4$. Из нильпотентности оператора R_b следует, что $x_4 b = 0$, значит, с учетом п. 6^0 получаем требуемое.

8^0. Докажем, что $Mx_4 = 0$.

Во-первых, в силу (3) и п. 6^0 имеем $bz \cdot x_4 = bx_4 \cdot z + b[z, x_4] = 0$, т.е. $AM \cdot x_4 = 0$. Во-вторых, в силу (2) и п. 7^0 имеем $zb \cdot x_4 = -zx_4 \cdot b + z(b \circ x_4) = 0$, т.е. $MA \cdot x_4 = 0$. Значит, в силу леммы 1 получаем $Mx_4 = 0$.

9^0. Докажем, что $AM \subseteq M'$.

Прежде всего, на основании (2) и пп. 7^0, 8^0 имеем

$$x_4 x_3 = x_4 \cdot ax_2 = x_4 \cdot ax_2 + \xi x_4^2 = x_4(a \circ x_2) = x_4 a \cdot x_2 + x_4 x_2 \cdot a = 0,$$

то есть

$$x_4 x_3 = 0. \tag{7}$$

Кроме того, аналогично

$$x_4 x_1 = (x_3 a) x_1 = x_3(a \circ x_1) = x_3(\xi x_3 + \eta x_4) = \xi x_3^2 = \xi a x_2 x_3 = \xi a x_3 x_2 = \xi x_4 x_2,$$

то есть

$$x_4 x_1 = \xi x_4 x_2. \tag{8}$$

Заметим, что в силу (3), п. 7^0 и (7) имеем $x_4 x_2 \cdot x_3 = x_4 x_3 \cdot x_2 + x_4[x_2, x_3] = 0$, то есть

$$x_4 x_2 \cdot x_3 = 0. \tag{9}$$

Поскольку $ax_3 = x_4$, то ненулевой элемент $x_4 x_2$ не может быть пропорционален элементу a. Поэтому возможны два случая:

а) $x_4 x_2 = 0$ или б) $x_4 x_2 = c$ и a, c – базис в A.

На самом деле, первого случая быть не может. Действительно, если $x_4 x_2 = 0$, то $x_4 * M = 0$ в силу (7) и (8). Отсюда и п. 7^0 имеем $\Phi x_4 \triangleleft B$, что невозможно.

Таким образом, в силу (8) и приведенных рассуждений:

$$x_4x_2 = c \quad \text{и} \quad x_4x_1 = \xi c, \quad \text{причем } \{a, c\} - \text{базис в } A. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что $cx_3 = 0$. Заметим, что

$$cx_1 \cdot a = c(x_1 \circ a) = c(\xi x_3 + \eta x_4) = 0,$$
$$cx_2 \cdot a = c(x_2 \circ a) = c(x_3 + \xi x_4) = 0.$$

Отсюда следует, что $cx_1, cx_2 \in M'$, а значит, $AM \subseteq M'$.

10^0. Докажем теперь, что $MA \subseteq M'$.

Аналогично предыдущему $x_3c \cdot a = -x_3a \cdot c = -x_4c = 0$, значит, $x_3A \subseteq M'$ ввиду п. 3^0. Точно также получаем $x_2c \cdot a = -x_2a \cdot c = -\xi x_4c = 0$, т.е. $x_2A \subseteq M'$. Наконец, из нильпотентности оператора R_c следует, что $x_1c \in M'$ и $x_1A \subseteq M'$.

11^0. Из пп. 9^0, 10^0 следует, что $M * A \subseteq M'$. А так как $M = A * M$ по лемме 1, то получаем противоречие.

4. Супералгебры, в которых для любого $a \in A$ выполнено $L_a^3 = 0$

Пусть $x_1, \ldots, x_4$ — жорданов базис оператора L_a такого, что $L_a^2 \neq 0$, т.е.

$$ax_1 = x_2, \qquad ax_2 = x_3, \qquad ax_3 = 0, \qquad ax_4 = 0.$$

Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1^0. Докажем, что жорданов базис $x_1, \ldots, x_4$ можно выбрать так, что

$$\begin{cases} x_1a = \delta x_2 + \xi x_4, \\ x_2a = (\delta+1)x_3, \quad x_3a = 0, \quad x_4a = \zeta x_3. \end{cases}$$

Положим

$$x_ia = \rho_{i1}x_1 + \rho_{i2}x_2 + \rho_{i3}x_3 + \rho_{i4}x_4.$$

Тогда из равенства $a \cdot ax_i = ax_i \cdot a - a \cdot x_ia$ при $i = 1$ имеем

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2a - a(\rho_{11}x_1 + \rho_{12}x_2 + \rho_{13}x_3 + \rho_{14}x_4) = \\ &= \rho_{21}x_1 + \rho_{22}x_2 + \rho_{23}x_3 + \rho_{24}x_4 - \rho_{11}x_2 - \rho_{12}x_3, \end{aligned}$$

отсюда следует, что

$$\rho_{21} = 0, \quad \rho_{11} = \rho_{22}, \quad \rho_{23} = 1 + \rho_{12}, \quad \rho_{24} = 0. \tag{11}$$

При $i = 2$ получаем

$$\begin{aligned} 0 &= x_3a - a(\rho_{21}x_1 + \rho_{22}x_2 + \rho_{23}x_3 + \rho_{24}x_4) = \\ &= \rho_{31}x_1 + \rho_{32}x_2 + \rho_{33}x_3 + \rho_{34}x_4 - \rho_{21}x_2 - \rho_{22}x_3, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\rho_{31} = 0, \quad \rho_{32} = \rho_{21}, \quad \rho_{33} = \rho_{22}, \quad \rho_{34} = 0. \tag{12}$$

Таким образом, из (11) и (12) следует, что $x_3a = \rho_{33}x_3$, а в силу нильпотентности оператора R_a заключаем, что $x_3a = 0$, поэтому

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \rho_{33} = 0.$$

При $i = 4$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= 0 - a(\rho_{41}x_1 + \rho_{42}x_2 + \rho_{43}x_3 + \rho_{44}x_4) = \\ &= -\rho_{41}x_2 - \rho_{42}x_3, \end{aligned}$$

то есть

$$\rho_{41} = \rho_{42} = 0.$$

Таким образом, $x_4a = \rho_{43}x_3 + \rho_{44}x_4$, значит,

$$0 = x_4a \cdot a = \rho_{43}x_3a + \rho_{44}x_4a = \rho_{44}(\rho_{43}x_3 + \rho_{44}x_4),$$

откуда $\rho_{44} = 0$. Итак, получена следующая таблица

$$\begin{cases} x_1a = \rho_{12}x_2 + \rho_{13}x_3 + \rho_{14}x_4, \\ x_2a = (\rho_{12}+1)x_3, \quad x_3a = 0, \quad x_4a = \rho_{43}x_3, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1a = \delta x_2 + \mu x_3 + \xi x_4, \\ x_2a = (\delta+1)x_3, \quad x_3a = 0, \quad x_4a = \zeta x_3. \end{cases}$$

Сделав замену базиса (он является жордановым для оператора L_a)

$$y_1 = x_1 + \lambda x_2, \quad y_2 = x_2 + \lambda x_3, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4,$$

получаем

$$\begin{array}{rcl} y_1a & = & (x_1+\lambda x_2)a = \delta x_2 + \mu x_3 + \xi x_4 + \lambda(\delta+1)x_3 = \\ & = & \delta y_2 - \lambda\delta x_3 + \mu x_3 + \xi x_4 + \lambda(\delta+1)x_3 = \\ & = & \delta y_2 + (\mu+\lambda)y_3 + \xi y_4, \\ y_2a & = & (x_2+\lambda x_3)a = (\delta+1)x_3 = (\delta+1)y_3, \\ y_3a & = & x_3a = 0, \\ y_4a & = & x_4a = \zeta x_3 = \zeta y_3. \end{array}$$

Выбирая $\lambda = -\mu$, получаем, требуемое в п. 1^0 утверждение.

Введем обозначения:

$$M_3 = \mathrm{span}(x_3), \quad M_{2,3} = \mathrm{span}(x_2, x_3), \quad M_{2,3,4} = \mathrm{span}(x_2, x_3, x_4).$$

Пусть b — произвольный четный элемент, тогда в силу (2) имеем соотношение

$$ab \cdot x_i - a \cdot bx_i + ax_i \cdot b - a \cdot x_ib = 0. \tag{13}$$

По предположению $L_c^3 = 0$ для любого элемента $c \in A$, то есть

$$c(c \cdot cx_i) = 0,$$

значит, справедливы и его линеаризации

$$c(c \cdot bx_i) + c(b \cdot cx_i) + b(c \cdot cx_i) = 0, \tag{14}$$

$$c(b \cdot bx_i) + b(c \cdot bx_i) + b(b \cdot cx_i) = 0. \tag{15}$$

2^0. Докажем, что $x_2b, x_3b \in M_{2,3}$.

Из (13) при $i \in \{1, 2\}$ замечаем, что первое слагаемое равно нулю, а второе и четвертое лежат в $M_{2,3}$.

3^0. Докажем, что $MA \subseteq M_{2,3,4}$.

Из соотношения (14) при $i = 4$ получаем $a(a \cdot bx_4) = 0$, значит $a \cdot bx_4 \in M_{3,4}$, откуда следует, что

$$bx_4 \in M_{2,3,4}. \tag{16}$$

Далее, при $i = 1$ из (14) получаем $a(a \cdot bx_1) + a \cdot bx_2 + bx_3 = 0$. Первое слагаемое лежит в M_3, второе в $M_{2,3}$, откуда следует, что

$$bx_3 \in M_{2,3}. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь соотношение (13) при $i = 4$:

$$-a \cdot bx_4 - a \cdot x_4b = 0,$$

Первое слагаемое этого равенства по соотношению (16) лежит в M_3, значит,

$$x_4 b \in M_{2,3,4}. \tag{18}$$

Из п. 2^0 и (18) следует, что $M_{2,3,4}b \subseteq M_{2,3,4}$. Отсюда заключаем, что если $x_1 b \equiv \lambda x_1 \pmod{M_{2,3,4}}$, то ввиду инвариантности $M_{2,3,4}$ относительно R_b получаем $\lambda = 0$ и $x_1 b \in M_{2,3,4}$. Следовательно, получаем $MA \subseteq M_{2,3,4}$.

4^0. Докажем, что $x_4 b \in M_{2,3}$.

Во-первых, ввиду (18) можно записать $x_4 b \equiv \lambda x_4 \pmod{M_{2,3}}$. Во-вторых, в силу п. 2^0 пространство $M_{2,3}$ инвариантно относительно R_b, значит, $\lambda = 0$ и $x_4 b \in M_{2,3}$.

5^0. Докажем, что $bx_2 \notin M_{2,3,4}$ для подходящего $b \in A$.

Пусть, от противного, для всякого вектора $b \in A$ выполнено $bx_2 \in M_{2,3,4}$. Тогда ввиду соотношений (16) и (17) верно $bM_{2,3,4} \subseteq M_{2,3,4}$. Если $bx_1 \equiv \lambda x_1 \pmod{M_{2,3,4}}$, то $bx_1 \in M_{2,3,4}$, следовательно, $AM \subseteq M_{2,3,4}$ и в силу п. 3^0 имеем $M = A * M \subseteq M_{2,3,4}$, что невозможно.

6^0. Докажем, что справедлива следующая система равенств

$$\begin{cases} x_1 a = -x_2 + \xi x_4, \\ x_2 a = x_3 a = 0, \quad x_4 a = \zeta x_3. \end{cases}$$

В силу п. 5^0: $bx_2 \notin M_{2,3,4}$ найдется $b \in A$ такой, что $bx_2 \equiv \mu x_1 \pmod{M_{2,3,4}}$, где $\mu \neq 0$. Выберем так нормировку вектора b, что

$$bx_2 \equiv x_1 \quad (\mathrm{mod}\ M_{2,3,4})). \tag{19}$$

В силу правой альтернативности верно

$$-b \cdot ax_i + bx_i \cdot a - b \cdot x_i a = 0, \tag{20}$$

откуда при $i = 1$ на основании п. 1^0 получаем

$$-bx_2 + bx_1 \cdot a - \delta bx_2 - \xi bx_4 = 0,$$

то есть

$$(1 + \delta)bx_2 = bx_1 \cdot a - \xi bx_4.$$

Из соотношений п. 1^0 и (16) получаем, что $(1 + \delta)bx_2 \in M_{2,3,4}$, а значит, из соотношения (19) следует, что $\delta = -1$ и выполнена система равенств, указанная в п. 6^0.

7^0. Докажем, что $\xi = 0$ в системе из п. 6^0, т.е. справедлива система

$$x_1 a = -x_2, \quad x_2 a = x_3 a = 0, \quad x_4 a = \zeta x_3. \tag{21}$$

Из соотношения (20) при $i = 2$ получаем

$$-bx_3 + bx_2 \cdot a = 0.$$

Далее, из соотношений (17), (19) и п. 6^0, что

$$0 \equiv bx_2 \cdot a \equiv -x_2 + \xi x_4 \pmod{M_{2,3}},$$

т.е. $\xi = 0$ и получаем систему (21).

8^0. Докажем, что $bx_1 \in M_{2,3,4}$.

Из (20) при $i = 1$ и (21) получаем $bx_1 \cdot a = 0$, откуда и следует $bx_1 \in M_{2,3,4}$.

9^0. Докажем, что $bx_3 \equiv -x_2 \pmod{M_3}$.

Аналогично, из (20) при $i = 2$ и (21) следует $-bx_3 + bx_2 \cdot a = 0$. Так как $M_{2,3,4}a \subseteq M_3$, то из соотношения (19) имеем $bx_3 = bx_2 \cdot a \equiv -x_2 \pmod{M_3}$.

10^0. Покажем, что $b \cdot bx_2 \equiv 0 \pmod{M_{2,3}}$.

Из соотношения (15) при $i = 1$ получаем

$$a(b \cdot bx_1) + b(a \cdot bx_1) + b \cdot bx_2 = 0.$$

Поскольку $aM \subseteq M_{2,3}$, то $a(b \cdot bx_1) \in M_{2,3}$. Из п. 8^0 следует, что $a \cdot bx_1 \in M_3$, поэтому ввиду п. 9^0 заключаем, что $b(a \cdot bx_1) \in M_{2,3}$. Значит, верно требуемое сравнение.

11^0. Докажем, что $bx_2 \equiv x_1 \pmod{M_{3,4}}$.

Пользуясь (19), запишем $bx_2 \equiv x_1 + \lambda x_2 \pmod{M_{3,4}}$. Так как по (16) и пп. 8^0, 9^0 верно $b(x_1 + M_{3,4}) \subseteq M_{2,3,4}$, то мы получаем, что $b \cdot bx_2 \equiv \lambda bx_2 \pmod{M_{2,3,4}}$, откуда по (19) заключаем, что $b \cdot bx_2 \equiv \lambda x_1 \pmod{M_{2,3,4}}$. Сравнивая полученное сравнение с п. 10^0, заключаем, что $\lambda = 0$, поэтому $bx_2 \equiv x_1 \pmod{M_{3,4}}$.

12^0. Докажем, что $bx_3 = -x_2$ и $x_2 b \in M_3$.

Рассмотрим соотношение (14) при $i = 1$: $a(a \cdot bx_1) + a \cdot bx_2 + bx_3 = 0$. Первое слагаемое в этом равенстве по п. 8^0 равно нулю; а второе равно x_2 по п. 11^0, поэтому получаем $bx_3 = -x_2$.

Из соотношения (13) при $i = 1$ получаем равенство $-a \cdot bx_1 + x_2 b - a \cdot x_1 b = 0$. По п. 8^0 первое слагаемое лежит в M_3, а по п. 3^0 там же находится и третье слагаемое, значит, второе слагаемое содержится в M_3.

13^0. Докажем, что $x_3 b = x_2$.

Из того же соотношения (13) при $i = 2$ получаем $-a \cdot bx_2 + x_3 b - a \cdot x_2 b = 0$. Первое слагаемое в силу п. 11^0 равно $-x_2$, третье в силу п. 12^0 равно нулю, поэтому $x_3 b = x_2$.

14^0. Докажем, что справедливы равенства

$$x_1 a = -x_2, \qquad x_2 a = x_3 a = x_4 a = 0.$$

В силу п. 4^0 $x_4 b \in M_{2,3}$. Далее, в силу (21) $x_4 b \cdot a = 0$, поэтому $x_4 a \cdot b = 0$. Учитывая (21) и п. 13^0, имеем $0 = x_4 a \cdot b = \zeta x_3 b = \zeta x_2$, т.е. $\zeta = 0$ и система (21) принимает указанный вид.

15^0. Докажем, что $x_2 b = 0$ и $x_4 b = \beta x_2$ для подходящего скаляра β.

Поскольку $x_2 b = -x_1 a \cdot b = x_1 b \cdot a$ и в силу п. 3^0: $x_1 b \in M_{2,3,4}$, то имеем $x_2 b = 0$.

Заметим, что $x_4 b \cdot b = 0$, а так как по п. 4^0: $x_4 b \in M_{2,3}$, то из равенств $x_2 b = 0$ и $x_3 b = x_2$ (см. п. 13^0) заключаем, что $x_4 b \in M_2$, то есть найдется такой скаляр β, что $x_4 b = \beta x_2$.

16^0. Докажем, что $bx_4 \equiv -\beta x_2 \pmod{M_{3,4}}$.

Из равенства (13) при $i = 4$ имеем $-a \cdot bx_4 - a \cdot x_4 b = 0$. В силу (16) положим $bx_4 \equiv \lambda x_2 \pmod{M_{3,4}}$; тогда $a \cdot bx_4 = \lambda x_3$. С другой стороны, по п. 15^0: $a \cdot x_4 b = \beta x_3$, поэтому и $\beta + \lambda = 0$ и верно требуемое.

17^0. Докажем, что справедлива система равенств

$$\begin{cases} x_3 b = -bx_3 = x_2, \\ x_4 b = -bx_4 = \beta x_2. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь соотношение

$$-b \cdot bx_i + bx_i \cdot b - b \cdot x_i b = 0. \tag{22}$$

В силу п. 16^0 можно записать $bx_4 = -\beta x_2 + \lambda x_3 + \mu x_4$. Подставляя это выражение в (22) при $i = 4$ и, используя п. 15^0, получаем

$$-(-\beta bx_2 + \lambda bx_3 + \mu bx_4) + (-\beta x_2 b + \lambda x_3 b + \mu x_4 b) - \beta bx_2 = 0.$$

Приведем подобные члены и еще раз воспользуемся п. 15^0:

$$-\lambda bx_3 - \mu bx_4 + \lambda x_3 b + \mu x_4 b = 0. \tag{23}$$

Заметим, что все слагаемые из (23), кроме второго, содержатся в M_2 ввиду пп. $12^0, 13^0$ и 15^0. Тогда по модулю M_2 имеем сравнение

$$0 \equiv -\mu bx_4 \equiv -\mu(-\beta x_2 + \lambda x_3 + \mu x_4) \equiv -\lambda\mu x_3 - \mu^2 x_4 \pmod{M_2},$$

откуда следует, что $\mu = 0$. Значит, из (23) вытекает $-\lambda bx_3 + \lambda x_3 b = 0$. Отсюда в силу пп. 12^0, и 13^0 следует, что $2\lambda x_2 = 0$, т.е. $\lambda = 0$.

Итак, доказано, что $bx_4 = -\beta x_2$. Объединяя пп. 12^0, 13^0 и 15^0 с последним равенством, получаем требуемое в п. 17^0.

18^0. Докажем, что $bx_1 = -\alpha x_2$ и $x_1 b = \alpha x_2$.

Заметим, что $b(b \cdot bx_3) = 0$, поэтому $b \cdot bx_2 = 0$. Отсюда по п. 11^0: $bx_2 \equiv x_1 \pmod{M_{3,4}}$ заключаем, что $bx_1 \in bM_{3,4} \subseteq M_2$, поэтому $bx_1 = -\alpha x_2$ для некоторого скаляра α.

Рассмотрим соотношение (22) при $i = 2$: $-b \cdot bx_2 + bx_2 \cdot b - b \cdot x_2 b = 0$. Так как $M_{3,4} * b \subseteq M_2$ по п. 17^0, то по п. 11^0 верно $0 \equiv -bx_1 + x_1 b - b \cdot x_2 b \pmod{M_2}$.

Тогда в силу п. 15^0 и доказанного равенства $bx_1 = -\alpha x_2$ заключаем, что $x_1 b \equiv 0 \pmod{M_2}$. Пусть $x_1 b = \lambda x_2$; тогда из соотношения (13) при $i = 1$ получаем $-a \cdot bx_1 + x_2 b - a \cdot \lambda x_2 = 0$. Значит, в силу равенства $bx_1 = -\alpha x_2$ и п. 15^0: $\alpha x_3 - \lambda x_3 = 0$, т.е. $\lambda = \alpha$ и $x_1 b = \alpha x_2$.

19^0. Докажем, что справедлива система

$$\begin{cases} ax_1 = -x_1 a = x_2, \quad ax_2 = x_3, \\ ax_3 = ax_4 = x_2 a = x_3 a = x_4 a = 0, \\ x_1 b = -bx_1 = \alpha x_2, \quad x_2 b = 0, \\ bx_2 = x_1 - (\alpha + \beta\gamma)x_3 + \gamma x_4, \\ x_3 b = -bx_3 = x_2, \quad x_4 b = -bx_4 = \beta x_2. \end{cases}$$

Ввиду п. 11^0 положим $bx_2 = x_1 + \lambda x_3 + \gamma x_4$, тогда в силу п. 12^0 имеем

$$0 = b(b \cdot bx_3) = -b \cdot bx_2 = -b(x_1 + \lambda x_3 + \gamma x_4),$$

откуда в силу пп. 17^0, 18^0 получаем $0 = (\alpha + \lambda + \beta\gamma)x_2$, значит, $\lambda = -(\alpha + \beta\gamma)$ и $bx_2 = x_1 - (\alpha + \beta\gamma)x_3 + \gamma x_4$. Таким образом, получается требуемая таблица умножения.

20^0. Положим $W = \mathrm{span}(x_1 + \gamma x_4, x_2, x_3)$. Тогда из таблицы п. 19^0 имеем $M * A \subseteq W$, что невозможно ввиду леммы 1.

References

[1] A.A. Albert, *The structure of right alternative algebras*, Ann. of Math., **59**:3 (1949), 408–417.

[2] I.M. Mikheev, *On simple right alternative rings*, Algebra i Logika, **16**:6 (1977), 682–710. MR0573072

[3] V.G. Skosyrskii, *Right alternative algebras*, Algebra i Logika, **23**:2 (1984), 185–192. MR0781232

[4] V.T. Filippov, V. K. Kharchenko, I. P. Shestakov, *Dniester notebook: unsolved problems in the theory of rings and modules*, Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN, 1993. Zbl 0868.16001

[5] J.P. Silva, L.S.I. Murakami, I.P. Shestakov, *On right alternative syperalgebras*, Comm. in Algebra, **44**:1 (2016), 240–252. MR3413684

[6] S.V. Pchelintsev, O.V. Shashkov, *Simple finite-dimensional right-alternative superalgebras of Abelian type of characteristic zero*, Izvestiya: Mathematics, **79**:3 (2015), 554–580. MR3397414

[7] S.V. Pchelintsev, O.V. Shashkov, *Simple finite-dimensional right alternative superalgebras with unitary even part over a field of characteristic 0*, Math. Notes, **100**:4 (2016), 589–596. MR3588879

[8] S.V. Pchelintsev, O.V. Shashkov, *Simple right alternative superalgebras of Abelian type whose even part is a field*, Izv. Math., **80**:6 (2016), 1231—1241. MR3588821

[9] S.V. Pchelintsev, O.V. Shashkov, *Simple finite-dimensional right-alternative superalgebras with semisimple strongly associative even part*, Sb. Math., **208**:2 (2017), 223—236. MR3608037

[10] S.V. Pchelintsev, O.V. Shashkov, *Simple finite-dimensional right-alternative unital superalgebras with strongly associative even part*, Sb. Math., **208**:4 (2017), 531—545. MR3629084

[11] S.V. Pchelintsev, O.V. Shashkov, *Simple finite-dimensional right-alternative unital superalgebras with an associative-commutative even part over a field of characteristic zero*, Izv. Math., (in press).

[12] S.V. Pchelintsev, O.V. Shashkov, *Simple right alternative 5-dimensional superalgebras with a trivial even part*, Sib. Math. Journal, **58**:6 (2017), 1387–1400.

Sergey Valentinovich Pchelintsev
Financial University under the Government of the Russian Federation,
Leningradsky pr., 49,
125993, Moscow, Russia,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: pchelinzev@mail.ru

Oleg Vladimirovich Shashkov
Financial University under the Government of the Russian Federation,
Leningradsky pr., 49,
125993, Moscow, Russia
E-mail address: o.v.shashkov@yandex.ru