S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 927–934 (2018) УДК 519.17
DOI 10.17377/semi.2018.15.079 MSC 05C25

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ГРАФОВ: ОБОБЩЕННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

А.А. МАХНЕВ, М.С. НИРОВА

Abstract. Graph Γ_i for a distance-regular graph Γ of diameter 3 can be strongly regular for $i = 2$ or $i = 3$. Finding parameters of Γ_i by the intersection array of graph Γ is a direct problem. Finding intersection array of graph Γ by the parameters of Γ_i is an inverse problem. Earlier direct and inverse problems have been solved by A.A. Makhnev, M.S. Nirova for $i = 3$ and by A.A. Makhnev and D.V. Paduchikh for $i = 2$.

In this work the inverse problem has been solved in cases when graphs Γ_2, Γ_3, $\bar{\Gamma}_2$ or $\bar{\Gamma}_3$ are pseudo-geometric for generalized quadrangle. In particular, graphs Γ_2 and $\bar{\Gamma}_3$ are not to be a pseudo-geometric for generalized quadrangle.

Keywords: distance regular graph, graph Γ with strongly regular graph Γ_i.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, ..., b_{d-1}; c_1, ..., c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не

Makhnev, A.A., Nirova, M.S., Inverse problems of graph theory: generalized quadrangles.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061-П.

Поступила 20 мая 2018 г., опубликована 22 августа 2018 г.

зависит от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Графом Тэйлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s,t)$.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$. В таких графах граница Хофмана для клик равна $s+1$ и каждая вершина вне $(s+1)$-клики L смежна с α вершинами из L.

Прямой задачей в теории дистанционно регулярных графов является нахождение параметров симметричной структуры, отвечающей графу с данным массивом пересечений, по этому массиву. Обратной задачей является восстановление массива пересечений дистанционно регулярного графа по параметрам отвечающей ему симметричной структуры.

Например, в графе Тэйлора, содержащем треугольник, окрестность каждой вершины является сильно регулярным графом с $k = 2\mu$. Обратно, данному сильно регулярному графу Δ с параметрами (v, k, λ, μ) и $k = 2\mu$ отвечает граф Тэйлора с массивом пересечений $\{v, v-k-1, 1; 1, v-k-1, v\}$, в котором окрестность некоторой вершины изоморфна Δ. В этом случае прямая и обратная задачи имеют единственное решение.

Если для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_3 сильно регулярен, то по [2, лемма 3] граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$ Обратно для графа $\bar{\Gamma}_3$, являющегося псевдогеометрическим для $pG_\alpha(l,t)$ граф Γ имеет масиив пересечений $\{l, tc_2, l-\alpha+1; 1, c_2, \alpha\}$.

Если для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_2 сильно регулярен, то по [1, предложение 4.2.17] имеем $c_3(a_3+a_2-a_1) = b_1a_2$ (равносильно $p^1_{22} = p^3_{22}$). Более того, Γ_2 имеет параметры $(v, k_2, p^2_{22}, p^1_{22})$. Обратно

Предложение 1. *Для сильно регулярного графа* Γ_2 *с параметрами* $(v, \kappa, \lambda, \mu)$, *собственными значениями* $\kappa, r, -s$ *и* $x = b_2 + c_2$ *можно представить массив пересечений* Γ *в виде* [3, теорема 2]*:*

(1) $b_0 = (\mu+rs)x/(rs)$, $b_1 = \mu x/(r(s-1)) - s$, $b_2 = x(rs(r+1)(s-1) - \mu x)/(r^2 s(s-1))$, $c_2 = x(\mu x - rs(s-1))/(r^2 s(s-1))$, $c_3 = \mu x/(r(s-1))$, *и для* $u = \sqrt{(\mu x - s(s-1)(x(r+2s) - r(s-1)))^2 - 4s^3x(-r+x)(r+s)(s-1)^2}$ Γ *имеет спектр: значение* $(rs(s-1)(s+x-1) - \mu x - u)/(2rs(s-1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs-r)(u^2(r+1) - u(x(\mu(r+2s-1) - rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2)$, *значение* $(rs(s-1)(s+x-1) - \mu x + u)/(2rs(s-1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs-r)(u^2(r+1) + u(x(\mu(r+2s-1) - rs(r+1)(s-$

$1)) - rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2)$, значение $-\mu x/(rs(s-1))$ кратности $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(s-1)/(\mu(r+s))$;

(2) $b_0 = (\mu+rs)x/(rs)$, $b_1 = \mu x/(s(r+1)) + r$, $b_2 = x(rs(r+1)(s-1) - \mu x)/(rs^2(r+1))$, $c_2 = x(\mu x + rs(r+1))/(rs^2(r+1))$, $c_3 = \mu x/(s(r+1))$, и для $u = \sqrt{(\mu x + r(r+1)(x(2r+s)+s(r+1)))^2 - 4r^3x(r+1)^2(r+s)(s+x)}$ граф Γ имеет спектр: значение $(rs(r+1)(-r+x-1)+\mu x-u)/(2rs(r+1))$ кратности $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(u^2(s-1)+u(x(\mu(2r+s+1)+rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)^2(s-1)))/(2\mu(r+s)u^2)$, значение $(rs(r+1)(-r+x-1)+\mu x+u)/(2rs(r+1))$ кратности $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(u^2(s-1)-u(x(\mu(2r+s+1)+rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)^2(s-1)))/(2\mu(r+s)u^2)$, значение $\mu x/(rs(r+1))$ кратности $(\mu+rs)(\mu+rs-r)(r+1)/(\mu(r+s))$ или

(3) $\{\kappa, \kappa-1, 1; 1, \kappa-1, \kappa\}$.

Заметим, что $\mu(\bar\Gamma_2)x = c_2 + 2b_2 + p^2_{33}$.

В работе решена обратная задача теории графов для графов Γ_2, Γ_3, $\bar\Gamma_2$, $\bar\Gamma_3$, являющихся псевдогеометрическими для обобщенного четырехугольника.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3. Тогда графы Γ_2 и $\bar\Gamma_3$ не являются псевдогеометрическими для обобщенного четырехугольника.*

Пусть дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности. Юришич и Видали доказали, что ([4, предложение 5]) Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$.

Теорема 2. *Пусть Γ_3 является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(l,t)$. Тогда $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{(l-1)t}(lt, l-1)$ и Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{lt, c_2(l-1), t+1; 1, c_2, (l-1)t\}$ (массив Юришича-Видали первого типа для $a = t, p = l-1, c = c_2$).*

Теорема 3. *Пусть $\bar\Gamma_2$ является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(s,r)$. Тогда Γ_2 является псевдогеометрическим графом для $pG_{(s-1)r}(sr, s-1)$ с собственными значениями $\kappa = s^2r, r, -s$ и для $\mu = s(s-1)r$, $x = b_2 + c_2$ выполняется одно из утверждений:*

(1) Γ имеет массив типа (1) и является антиподальным графом с массивом пересечений $\{sr, s(r-1), 1; 1, r-1, sr\}$;

(2) $b_0 = sx$, $b_1 = r(r+1+xs-x)/(r+1)$, $b_2 = x(r+1-x)(s-1)/(s(r+1))$, $c_2 = x(r+1+xs-x)/(s(r+1))$, $c_3 = (s-1)rx/(r+1)$, $(r+1)$ делит $(s-1)x$, s делит $x(r+1-x)$.

Следствие 1. *Пусть $\bar\Gamma_2$ является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(r+2,r)$. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) Γ является антиподальным графом с массивом пересечений $\{(r+2)r, (r+2)(r-1), 1; 1, r-1, (r+2)r\}$;

(2) $b_0 = (r+2)x$, $b_1 = r(x+1)$, $b_2 = x(r+1-x)/(r+2)$, $c_2 = x(x+1)/(r+2)$, $c_3 = rx$, $r+2$ делит $(x+1)x$.

1. Теоремы 1 и 2

В этом параграфе мы докажем теоремы 1 и 2. Сначала приведем два вспомогательных результата.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* 3 *с собственными значениями* $k=\theta_0>\theta_1>\theta_2>\theta_3$. *Тогда* $\theta_1+\theta_2+\theta_3=a_1+a_2+a_3-k$, $\theta_1\theta_2\theta_3=k(b_2-a_3)+a_3c_2$ *и* $(\theta_1+1)(\theta_2+1)(\theta_3+1)=b_1(b_2-a_3-1)$.

Доказательство. Матрица T порядка 3, собственные значения которой совпадают с собственными значениями $\theta_1>\theta_2>\theta_3$ графа Γ имеет вид ([1, стр. 130])

$$T=\left(\begin{array}{ccc} -1 & b_1 & 0 \\ 1 & k-b_1-c_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3-b_2 \end{array}\right).$$

Отсюда $\theta_1+\theta_2+\theta_3=Tr(T)=a_1+a_2+a_3-k$ и $\theta_1\theta_2\theta_3=det(T)=k(b_2-a_3)+a_3c_2$. Наконец, $(\theta_1+1)(\theta_2+1)(\theta_3+1)=det(T+I)=b_1(b_2-a_3-1)$. $\square$

Если $\theta_2=-1$, то по лемме 1.1 имеем $b_2=a_3+1$, $\theta_1+\theta_3=1+a_1+a_2+a_3-k$ и $-\theta_1\theta_3=k+a_3c_2$.

Лемма 1.2. *Если* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *с массивом пересечений* $\{k,b_1,b_2;1,c_2,c_3\}$, *для которого граф* Γ_2 *сильно регулярен, то выполняются следующие утверждения:*

(1) $c_3(a_3+a_2-a_1)=b_1a_2$, $p^1_{22}=a_2k_2/k=b_1a_2/c_2$;

(2) $p^2_{22}=(c_2b_1+a_2(a_2-a_1)+b_2c_3-k)/c_2$, $p^3_{22}=c_3(a_3+a_2-a_1)/c_2$.

Доказательство. По [1, предложение 4.2.17] имеем $c_3(a_3+a_2-a_1)=b_1a_2$. Остальные равенства следуют из [1, лемма 4.1.7]. $\square$

Лемма 1.3. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3, *для которого граф* Γ_3 *сильно регулярен. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_2=a_3+1$, $b_1=rc_2$ *и граф* $\bar\Gamma_3$ *является псевдогеометрическим для* $pG_{c_3}(k,r)$;

(2) *если* Γ *— антиподальный граф и граф* Γ_2 *сильно регулярен, то либо* Γ *— граф Тэйлора без треугольников, либо граф* $\bar\Gamma_2$ *является псевдогеометрическим для* $GQ(r-1,c_2+1)$.

Доказательство. Это теорема 1 из [5]. $\square$

Докажем теорему 1. Если Γ_2 является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(r+1,s-1)$, (то есть, имеет неглавные собственные значения $r,-s$, и параметр μ, равный s), то по [3, следствие 1] граф Γ имеет массив пересечений $\{y(r+1)^2,r(y+1),ry(r+1)(s-y-1)/s;1,ry(r+1)(y+1)/s,ry\}$ для некоторого целого y (это массив типа (2) из предложения 1 при $x=yr(r+1)$).

Имеем $c_2\le c_3$, поэтому $(r+1)(y+1)\le s$. Аналогично, $b_2\le b_1$, поэтому $y(r+1)(s-y-1)\le s(y+1)$ и $s(yr-1)\le y(y+1)(r+1)$. Итак, $(r+1)(y+1)\le s\le y(y+1)(r+1)/(yr-1)$, $yr-1\le y$, поэтому $r=1$, $s\in\{2,3,5\}$, Γ имеет массив пересечений $\{4y,y+1,2y(s-y-1)/s;1,2y(y+1)/s,2y\}$ и $s\neq 2$. В случае

$s = 3$ имеем $y = 1$ и массив $\{4, 2, 2/3; 1, 4/3, 2\}$, противоречие. В случае $s = 5$ имеем массив $\{4y, y+1, 2y(4-y)/5; 1, 2y(y+1)/5, 2y\}$, противоречие.

Если $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(s,t)$, то граф Γ имеет массив пересечений $\{s, tc_2, s; 1, c_2, 1\}$, противоречие.

Теорема 1 доказана.

Если Γ_3 — псевдогеометрический граф для обобщенного четырехугольника $GQ(l,t)$, то $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{(l-1)t}(lt, l-1)$ и по лемме 1.3 граф Γ имеет массив пересечений $\{lt, (l-1)c_2, t+1; 1, c_2, (l-1)t\}$. Теорема 2 доказана.

2. Теорема 3: массивы типа (1)

В этом параграфе предполагается, что граф $\bar\Gamma_2$ является псевдогеометрическим для $GQ(s,r)$ и Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с массивом типа (1) из предложения 1. Тогда Γ_2 является псевдогеометрическим графом для $pG_{(s-1)r}(sr, s-1)$ с собственными значениями $\kappa = s^2r, r, -s$, $\mu = s(s-1)r$ и $x = b_2 + c_2$.

Лемма 2.1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_0 = sx$, $b_1 = sx - s$, $b_2 = x(r+1-x)/r$, $c_2 = x(x-1)/r$ *и* $c_3 = sx$, *в случае* $x = r$ *получим* $b_2 = 1$ *и* Γ *— антиподальный граф;*

(2) $a_1 = s - 1 = \lambda(\bar\Gamma_2)$, *поэтому для любой вершины* $w \in \Gamma$ *подграф* $\bar\Gamma_2(w)$ *является объединением двух связных компонент* $\Gamma(w)$ *и* $\Gamma_3(w)$*;*

(3) $c_2 + 2b_2 + p^2_{33} = r + 1$, *в частности,* $b_2 \le r + 1 - x$.

Доказательство. В формулы $b_0 = (\mu + rs)x/(rs)$, $b_1 = \mu x/(r(s-1)) - s$, $b_2 = x(rs(r+1)(s-1) - \mu x)/(r^2 s(s-1))$, $c_2 = x(\mu x - rs(s-1))/(r^2 s(s-1))$ и $c_3 = \mu x/(r(s-1))$ подставим значение $\mu = s(s-1)r$.

Тогда $b_0 = sx$, $b_1 = sx - s$, $b_2 = x(r+1-x)/r$, $c_2 = x(x-1)/r$ и $c_3 = sx$. Далее, $k_2 = s^2 r$ и $k_3 = s(r+1-x)$. В случае $x = r$ получим $b_2 = 1$ и Γ — антиподальный граф.

Далее, $a_1 = s-1 = \lambda(\bar\Gamma_2)$, поэтому для любой вершины $w \in \Gamma$ подграф $\bar\Gamma_2(w)$ является объединением двух связных компонент $\Gamma(w)$ и $\Gamma_3(w)$.

Для вершины $u \in \Gamma_2(w)$ подграф $\bar\Gamma_2(u) \cap \bar\Gamma_2(w)$ содержит c_2 вершин из $[u] \cap [w]$ по b_2 вершин из $[u] \cap \Gamma_3(w)$, $\Gamma_3(u) \cap [w]$ и p^2_{33} вершин из $\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(w)$, поэтому $c_2 + 2b_2 + p^2_{33} = r + 1$. □

Лемма 2.2. *Для массива типа* (1) *и для* $u = s(s-1)\sqrt{(2s + r(s-1))^2 + 4sx(r-x)(r+s)}$ *граф* Γ *имеет спектр: значение* $(r(s-1) - \sqrt{(2s + r(s-1))^2 + 4sx(r-x)(r+s)})/(2r)$ *кратности* $(\mu + rs)(\mu + rs - r)(u^2(r+1) - u(x(\mu(r+2s-1) - rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2)$, *значение* $(r(s-1) + \sqrt{(2s + r(s-1))^2 + 4sx(r-x)(r+s)})/(2r)$ *кратности* $(\mu + rs)(\mu + rs - r)(u^2(r+1) + u(x(\mu(r+2s-1) - rs(r+1)(s-1)) - rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2)$, *и значение* $-\mu x/(rs(s-1)) = -x$ *кратности* $s^2(rs+1)/(r+s)$.

Доказательство. Собственные значения найдены как собственные значения матрицы L_1 ([1, стр. 129]). Кратности посчитаны по формуле из [1, теорема 4.1.4]. □

Лемма 2.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $(r+s)$ *делит* $(s(s+1)r(r+1), s^2(rs+1))$, *причем* $(s+1, rs+1) = (s+1, r-1)$, $(r+1, rs+1) = (r+1, s-1)$;

(2) $\theta_1+\theta_2 = a_1+a_2-k+x = s-1$, $\theta_1\theta_2 = -sx(r+1-x)/r$ *и* $(\theta_1+1)(\theta_2+1) = -s(x(r+1-x)/r-1)$;

(3) *число* u *целое;*

(4) $s(x-1) = (s-1)r$.

Доказательство. Ввиду леммы 2.1 число $(r+s)$ делит $(s(s+1)r(r+1), s^2(rs+1))$, причем $(s+1, rs+1) = (s+1, r-1)$, $(r+1, rs+1) = (r+1, s-1)$.

По леммам 1.1 и 2.1 имеем $\theta_1+\theta_2 = a_1+a_2-k+x = s-1$, $\theta_1\theta_2 = -sx(r+1-x)/r$ и $(\theta_1+1)(\theta_2+1) = -s(x(r+1-x)/r-1)$.

Если число u нецелое, то приравняв к нулю коэффициент при u в кратностях собственных значений из леммы 2.2, получим $x(2r+2s) = (r+1)(s-1)$ и $r+s$ делит $(r+1)(s-1)-(rs+1) = s-r-2$. Отсюда $s = r+2$, $x = (r+1)/2$, r делит $x(x-1)$, поэтому $r = x = 1$, противоречие.

Ввиду леммы 2.2 и утверждения (2) леммы имеем $(r(s-1)-\sqrt{(2s+r(s-1))^2+4sx(r-x)(r+s)})(r(s-1)+\sqrt{(2s+r(s-1))^2+4sx(r-x)(r+s)})/(4r^2) = -sx(r+1-x)/r$. Отсюда $(r^2(s-1)^2-(2s+r(s-1))^2-4sx(r-x)(r+s))/(4r) = -(s^2+s(s-1)r+sx(r-x)(r+s))/r = -sx(r+1-x)$ и $s(x-1) = (s-1)r$. □

Завершим доказательство теоремы 3 в случае массивов типа (1). По лемме 2.3 имеем $r = sr'$ и $x-1 = (s-1)r'$. Далее, $r = sr'$ делит $x(x-1) = ((s-1)r'+1)(s-1)r'$ и s делит $r'-1$, противоречие с тем, что $r \leq s^2$.

3. Теорема 3: массивы типа (2)

В этом параграфе предполагается, что граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $GQ(s,r)$ и Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с массивом типа (2) из предложения 1. Тогда Γ_2 является псевдогеометрическим графом для $pG_{(s-1)r}(sr, s-1)$ с собственными значениями $\kappa = s^2r, r, -s$, $\mu = s(s-1)r$ и $x = b_2+c_2$.

Лемма 3.1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_0 = sx$, $b_1 = (s-1)rx/(r+1)+r = r(r+1+xs-x)/(r+1)$, $b_2 = x(r+1-x)(s-1)/(s(r+1))$, $c_2 = x(r+1+xs-x)/(s(r+1))$, $c_3 = (s-1)rx/(r+1)$, $(r+1)$ *делит* $(s-1)x$, s *делит* $x(r+1-x)$;

(2) $k_2 = s^2r$, $k_3 = s(r+1-x)$, $a_1 = x(s+r)/(r+1)-r-1$, $a_3 = x(s-(s-1)r/(r+1)) = x(s+r)/(r+1)$, *в частности,* $x \leq r+1-b_2$ *и* $x(s+r) \geq (r+1)^2$.

Доказательство. В формулы $b_0 = (\mu+rs)x/(rs)$, $b_1 = \mu x/(s(r+1))+r$, $b_2 = x(rs(r+1)(s-1)-\mu x)/(rs^2(r+1))$, $c_2 = x(\mu x+rs(r+1))/(rs^2(r+1))$, $c_3 = \mu x/(s(r+1))$, подставим значение $\mu = s(s-1)r$.

Тогда $b_0 = sx$, $b_1 = (s-1)rx/(r+1)+r$, $b_2 = x(r+1-x)(s-1)/(s(r+1))$, $c_2 = x(r+1+xs-x)/(s(r+1))$, $c_3 = (s-1)rx/(r+1)$. Отсюда $(r+1)$ делит $(s-1)x$, s делит $x(r+1-x)$.

Далее, $k_2 = s^2r$, $k_3 = s(r+1-x)$, $a_1 = x(s+r)/(r+1)-r-1$, $a_3 = x(s-(s-1)r/(r+1)) = x(s+r)/(r+1)$. В частности, $x < r+1$, $x(s+r) \geq (r+1)^2$. □

Лемма 3.2. *Для массива типа* (2) *положим* $u = \sqrt{(\mu x + r(r+1)(x(2r+s)+s(r+1)))^2 - 4r^3x(r+1)^2(r+s)(s+x)}$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *имеет следующие собственные значения: значение* $(rs(r+1)(-r+x-1)+\mu x-u)/(2rs(r+1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(u^2(s-1)+u(x(\mu(2r+s+1)+rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)^2(s-1)))/(2\mu(r+s)u^2)$*; значение* $(rs(r+1)(-r+x-1)+\mu x+u)/(2rs(r+1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(u^2(s-1)-u(x(\mu(2r+s+1)+rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)^2(s-1)))/(2\mu(r+s)u^2)$*; значение* $x(s-1)/(r+1)$ *кратности* $s(s+1)r(r+1)/(r+s)$*;*

(2) *число* u *целое.*

Доказательство. Собственные значения найдены как собственные значения матрицы L_1 ([1, стр. 129]). Кратности посчитаны по формуле из [1, теорема 4.1.4].

Если число u нецелое, то избавиться от иррациональности в кратности можно только при $x(3r+s+2)=(r+1)^2$. В этом случае $x(r+s)=(r+1)(r+1-2x)$, противоречие с тем, что по лемме 3.1 число $x(r+s)$ не меньше $(r+1)^2$. □

Из лемм 3.1–3.2 следует теорема 3 в случае массива типа (2).

Докажем следствие 1. Предположим, что $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для обобщенного четырехугольника $GQ(r+2,r)$. Тогда $\mu=(r+2)(r+1)r$. В случае массива пересечений типа (1) по теореме 3 заключение следствия выполняется.

Допустим теперь, что массив пересечений графа Γ имеет тип (2). По лемме 3.1 имеем массив $\{(r+2)x, r(x+1), x(r+1-x)/(r+2); 1, x(x+1)/(r+2), rx\}$, $k_2=(r+2)^2r$, $k_3=(r+2)(r+1-x)$, $r+2$ делит $(x+1)x$. Далее, $a_1=2x-r-1$, $a_3=2x$ и Γ имеет собственное значение $(s-1)x/(r+1)=x$ кратности $r(r+2)(r+3)/2$.

По лемме 1.1 имеем $\theta_2+\theta_3=2x-r-1$ и $\theta_2\theta_3=x(r+1-x)-2x(r+2)+2x^2(x+1)/(r+2)=x(2x(x+1)/(r+2)-(r+3+x))$. Наконец, $(\theta_2+1)(\theta_3+1)=-r(x+1)(x/(r+2)-1)$.

Сделав подстановку $\mu=s$, $x=yr(r+1)$ в формулах из пункта (2) предложения 1, получим массив из заключения следствия.

Следствие 1 доказано.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1989. MR1002568

[2] A. Makhnev, M. Nirova, *On distance-regular Shilla graphs*, Mat. Zametki, **103**:5 (2018), 730–748. MR3795120

[3] A. Makhnev, D. Paduchikh, *Invers problems in graph theory*, Trudy Inst. Math. Mechaniki, **27**:3 (2018), 558–571.

[4] A. Jurisic, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr., **65**:1–2 (2012), 29–47. MR2943642

[5] M. Nirova *On distance-regular graphs* Γ *with strongly regular graphs* Γ_2 *and* Γ_3 , Sibirean Electr. Math. Reports, **15** (2018), 175–185. MR3769887

Alexandr Alexeevich Makhnev
Ural Federal University,
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
str. S. Kovalevskoy, 16,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Marina Sefovna Nirova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
st. Chernyshevsky, 175,
360004, Nalchik, Russia
E-mail address: nirova_m@mail.ru