S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 935–949 (2018) УДК 539.3,517.958

DOI 10.17377/semi.2018.15.080 MSC 35Q74,74G65,74M15

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ ПО ДЛИНЕ ОТСЛОЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О КОНТАКТЕ ПЛАСТИНЫ И БАЛКИ

А.И. ФУРЦЕВ

Abstract. The paper considers a model which describes a contact between an elastic plate and an elastic beam. In this model, there may be a delamination, i. e. the displacements of the plate and the beam may not coincide on a part of beam's midline. The purposes of the research are to prove the differentiability of the energy functional with respect to the delamination's length and to find the explicit formula for the corresponding derivative.

Keywords: contact problem, plate, beam, delamination, unilateral constraints, shape sensitivity analysis, energy release rate, energy functional derivative.

1. Введение

В гражданском строительстве, машиностроении, аэрокосмической технике и других отраслях промышленности на сегодняшний день широко используются композиционные материалы. Композиционные материалы как правило изготовлены из нескольких тел, свойства и поведение которых могут значительно различаться. В частности, композиционный материал может быть составлен из пластин и балок. Тем самым математическое исследование моделей, описывающих контакт пластин и балок, является актуальным.

В данной работе рассматривается задача о равновесии пластины и балки, которые контактируют друг с другом вдоль отрезка прямой линии. Считается,

Furtsev, A.I., Differentiation of energy functional with respect to delamination's length in problem of contact between plate and beam.

Работа поддержана РНФ (грант 17–71–10171).

Поступила 5 мая 2018 г., опубликована 22 августа 2018 г.

что на части отрезка перемещения пластины и балки совпадают, а на оставшейся части отрезка могут не совпадать, что означает наличие отслоения между телами. При моделировании такого контакта возникает ряд существенных особенностей. Одна из особенностей состоит в том, что на искомые перемещения в зоне отслоения налагаются контактные условия вида неравенств, предотвращающие нежелательный эффект взаимного проникновения тел. Как результат, модель в целом является нелинейной, а область контакта тел заранее не известна. Еще одной особенностью является то, что размерность множества возможного контакта на единицу меньше размерности области, в которой ищется решение. В результате задача формулируются в области, имеющей негладкую границу.

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы доказать дифференцируемость функционала энергии по длине отслоения. Заодно в работе получена явная формула для соответствующей производной.

Дадим обзор работ, в которых изучались задачи о контакте пластин и препятствий, характеризующиеся условиями непроникания вида неравенств и заранее неизвестной областью контакта. Задачи о контакте пластин и неподвижных препятствий, в которых пластина описывается бигармоническим оператором, можно найти в [1, 2, 3, 4]. Широкий спектр контактных задач для упругих и упругопластических пластин, оболочек и балок изучался в [5]. Задачи о равновесии упругих пластин, контактирующих с тонкими препятствиями различной структуры (в том числе с балками), рассматривались в [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Неоднократно отмечалось, что при постановке задач о контакте пластин с тонкими препятствиями дифференциальные уравнения требуется задавать в областях с разрезами, на берегах которых налагаются краевые условия вида неравенств и равенств. Указанным свойством также обладают задачи теории трещин с возможным контактом берегов, для ознакомления с которыми читатель может обратиться к [13, 14]. По сравнению с решениями краевых задач, определенных в гладких областях, решения задач теории трещин содержат так называемые сингулярные составляющие, что не дает гладкости решения во всей области.

В отношении самой концепции производной функционала энергии по длине отслоения отметим, что она тесно связана с концепцией производной по форме (см. [15]) и топологической производной (см. [16]). Метод дифференцирования функционалов энергии для моделей теории трещин с нелинейными краевыми условиями на берегах был разработан в работах [17, 18]. В дальнейшем указанный метод был применен для целого ряда моделей, описывающих трещины в упругих телах и пластинах (см. [19, 20, 21, 22, 23, 24]). Наконец, анализ чувствительности интегралов энергии к изменению формы включений различной природы, находящихся в упругих телах при наличии отслоений, проводился в работах [25, 26, 27, 28, 29, 30].

2. Постановка задачи о равновесии

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область, ограниченная гладкой кривой $\partial\Omega$, вектор единичной внешней нормали к которой обозначим через n. С областью Ω соотнесена система декартовых координат x_1, x_2. Будем считать, что $\omega = (0,2) \times \{0\}$, $\gamma = (0,1) \times \{0\}$, причем ω лежит строго внутри области Ω. Введенные в рассмотрение геометрические объекты изображены на рис. 1.

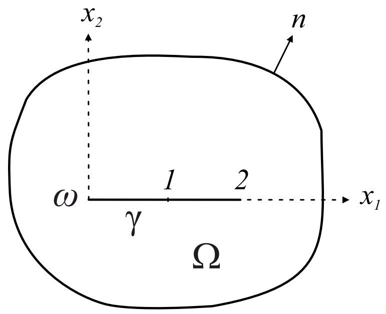

Рис. 1. Геометрия задачи

Задача о равновесии пластины и балки, которая отслаивается от пластины на множестве γ, но остается склеенной на $\omega\backslash\overline{\gamma}$, состоит в следующем. Требуется отыскать функции $v = v(x_1, x_2)$ и $w = w(x_1)$, определяемые в областях Ω и ω соответственно, такие что

$$D\triangle^2 v = f \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \overline{\omega}, \tag{1}$$

$$v = v_{,n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{2}$$

$$[v] = [v_{,2}] = 0 \quad \text{на} \quad \omega, \tag{3}$$

$$[m(v)] = 0, \quad [t(v)] + w_{,1111} = g \quad \text{на} \quad \omega, \tag{4}$$

$$w = w_{,1} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega, \tag{5}$$

$$v - w \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \quad v = w \text{ на} \quad \omega \setminus \overline{\gamma}, \tag{6}$$

$$[t(v)] \geqslant 0, \quad [t(v)](v - w) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{7}$$

где

$$\triangle^2 v = v_{,1111} + 2v_{,1122} + v_{,2222},$$

$$m(v) = D(v_{,22} + \varkappa v_{,11}), \quad t(v) = D(v_{,222} + (2 - \varkappa)v_{,112}),$$

$$v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, \quad v_{,n} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad w_{,1} = \frac{dw}{dx_1}.$$

Здесь заданными считаются

$$f \in C^1(\overline{\Omega}), \quad g \in C^1(\overline{\omega}), \quad D > 0, \quad 1/2 > \varkappa > 0.$$

Через $[\cdot]$ обозначается скачок функции: $[v] = v^+ - v^-$, где v^+ и v^- соответствуют значениям функции v на положительном и отрицательном по отношению к направлению оси x_2 берегах множества ω.

Уравнение (1) представляет собой уравнение равновесия пластины, к которой приложена распределенная нагрузка f. Второе уравнение (4) суть уравнение равновесия балки, на которую действует распределенная нагрузка g. Отметим, что за счет того, что в уравнение (4) входит скачок перерезывающей силы пластины $t(v)$, на множестве ω учитывается взаимодействие пластины и балки. Условия (6), (7) задают характер этого взаимодействия. В частности, условия (6) означают, что на множестве $\omega \setminus \overline{\gamma}$ прогибы пластины и балки совпадают, а на γ прогибы балки не превосходят прогибов пластины. При этом точки множества γ, в которых в первом условии (6) реализуется строгое неравенство, заранее не известны. Заметим, однако, что если в этом условии строгое неравенство все же реализуется, то согласно соотношениям (7) скачок перерезывающей силы пластины $t(v)$ равен нулю. Это означает, что в случае отсутствия контакта пластины и балки их взаимодействие также отсутствует. С другой стороны, если в первом соотношении (7) реализуется строгое неравенство, то из последнего условия получаем равенство прогибов пластины и балки, то есть пластина и балка контактируют.

Сформулируем задачу (1)—(7) в вариационном виде. Для этого введем в рассмотрение пространства Соболева $H_0^2(\Omega)$ и $H_0^2(\omega)$ и определим в этих пространствах функционал энергии

$$\Pi(v,w) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b(v,v) - \int\limits_{\Omega} fv + \frac{1}{2}\int\limits_{\omega} (w_{,11})^2 - \int\limits_{\omega} gw, \tag{8}$$

где

$$b(\varphi,\psi) = D\big(\varphi_{,11}\psi_{,11} + \varphi_{,22}\psi_{,22} + \varkappa\varphi_{,22}\psi_{,11} + \varkappa\varphi_{,11}\psi_{,22} + 2(1-\varkappa)\varphi_{,12}\psi_{,12}\big) \tag{9}$$

представляет собой билинейную, симметричную по $\varphi,\psi \in H_0^2(\Omega)$ форму. Также введем множество допустимых перемещений

$$K_0 = \big\{(v,w) \in H_0^2(\Omega)\times H_0^2(\omega) : \quad v - w \geqslant 0 \text{ на } \gamma,\ v = w \text{ на } \omega\setminus\overline{\gamma}\big\}. \tag{10}$$

Рассмотрим задачу минимизации

$$(v,w) \in K_0 : \quad \Pi(v,w) = \inf_{(\overline{v},\overline{w})\in K_0} \Pi(\overline{v},\overline{w}). \tag{11}$$

Задача минимизации (11) имеет единственное решение. Действительно, благодаря неравенствам Пуанкаре-Фридрихса справедливы оценки

$$\int\limits_{\Omega} b(v,v) \geqslant c_1\|v\|^2_{H_0^2(\Omega)}, \quad \int\limits_{\omega} (w_{,11})^2 \geqslant c_2\|w\|^2_{H_0^2(\omega)},$$

$$v \in H_0^2(\Omega), \quad w \in H_0^2(\omega), \quad c_1, c_2 = const > 0,$$

поэтому подлежащий минимизации в (11) функционал (8) является коэрцитивным. Поскольку функционал (8) обладает также свойством слабой полунепрерывности снизу, а множество K_0 выпукло и замкнуто, то задача (11) имеет решение. Единственность этого решения следует из строгой выпуклости функционала энергии. Утверждение об однозначной разрешимости задачи (11) оформим в виде теоремы.

Теорема 1. *Задача минимизации* (11) *имеет единственное решение.*

Приведем вариационное неравенство, которое эквивалентно задаче минимизации (11). Формулируется оно следующим образом

$$(v,w) \in K_0, \quad \forall(\overline{v},\overline{w}) \in K_0 :$$

$$\int\limits_{\Omega} b(v,\overline{v}-v) - \int\limits_{\Omega} f(\overline{v}-v) + \int\limits_{\omega} w_{,11}(\overline{w}-w)_{,11} - \int\limits_{\omega} g(\overline{w}-w) \geqslant 0. \tag{12}$$

Приведенное вариационное неравенство имеет единственное решение. Данный факт следует из эквивалентности вариационного неравенства и задачи минимизации (11), для которой справедлива теорема 1. В то же время, вариационное неравенство можно считать слабой формулировкой краевой задачи (1)—(7) в том смысле, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Гладкие функции v и w, удовлетворяющие почти всюду соотношениям* (1)—(7), *являются решением вариационного неравенства* (12). *С другой стороны, если решение (v, w) вариационного неравенства таково, что $\triangle^2 v \in L^2(\Omega)$, $w_{,1111} \in L^2(\omega)$, то функции v, w удовлетворяют соотношениям* (1)—(7).

Доказательство. Пусть гладкие функции v и w удовлетворяют соотношениям (1)—(7) в смысле почти всюду на соответствующих множествах. Докажем, что для (v, w) справедливо вариационное неравенство (12). Сначала заметим, что в силу условий (2), (3) и (5), (6) выполняется принадлежность $(v, w) \in K_0$. Выберем элемент $(\overline{v}, \overline{w}) \in K_0$ произвольным. Из уравнений (1) и второго уравнения (4) следует тождество

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} (D\Delta^2 v - f)(\overline{v} - v) + \int\limits_{\omega} ([t(v)] + w_{,1111} - g)(\overline{w} - w) = 0.$$

Преобразуем это тождество с помощью формул Грина

$$(13)\quad D\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \widehat{v}\triangle^2 v = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} b(v, \widehat{v}) + \int\limits_{\omega} [m(v)]\widehat{v}_{,2} - \int\limits_{\omega} [t(v)]\widehat{v}, \quad \int\limits_{\omega} w_{,1111}\widehat{w} = \int\limits_{\omega} w_{,11}\widehat{w}_{,11},$$

$$\widehat{v} \in H_0^2(\Omega), \quad \widehat{w} \in H_0^2(\omega).$$

Учитывая условия (2), (3) и первое условие (4), будем иметь следующее равенство

$$\int\limits_{\Omega} b(v, \overline{v} - v) - \int\limits_{\Omega} f(\overline{v} - v) + \int\limits_{\omega} w_{,11}(\overline{w} - w)_{,11} - \int\limits_{\omega} g(\overline{w} - w)$$

$$= \int\limits_{\omega} [t(v)](\overline{v} - v) - \int\limits_{\omega} [t(v)](\overline{w} - w).$$

Остается показать, что стоящее справа от знака равенства выражение является неотрицательным. Действительно, из условий (7) следует

$$\int\limits_{\omega} [t(v)](\overline{v} - v) - \int\limits_{\omega} [t(v)](\overline{w} - w) = \int\limits_{\omega} [t(v)](\overline{v} - \overline{w}) - \int\limits_{\omega} [t(v)](v - w)$$

$$= \int\limits_{\gamma} [t(v)](\overline{v} - \overline{w}) - \int\limits_{\gamma} [t(v)](v - w) = \int\limits_{\gamma} [t(v)](\overline{v} - \overline{w}) \geqslant 0.$$

Таким образом, справедливость вариационного неравенства (12) доказана.

Теперь пусть (v, w) является решением вариационного неравенства (12). Докажем, что v и w удовлетворяют соотношениям (1)–(7). Для начала заметим, что соотношения (2), (3) и (5), (6) не нуждаются в доказательстве в силу принадлежности $(v, w) \in K_0$. Таким образом, остается доказать соотношения (1), (4) и (7).

Докажем уравнение равновесия (1). Для этого выберем в качестве пробных элементов в вариационном неравенстве (12) функции $(v \pm \varphi, w)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\omega)$. Получаем равенство

$$\int\limits_{\Omega} b(v, \varphi) = \int\limits_{\Omega} f\varphi,$$

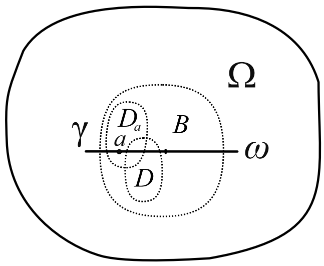

Рис. 2. Окрестности B, D, D_a

означающее, что функция v удовлетворяет уравнению равновесия (1) в смысле распределений.

Докажем соотношения (4). Применим формулы Грина к вариационному неравенству (12) с учетом доказанного уравнения равновесия (1) и краевых условий (2), (3), (5). Приходим к неравенству

$$(14)\ \ \forall(\overline{v},\overline{w})\in K_0:\ -\int\limits_{\omega}[m(v)](\overline{v}-v)_{,2}+\int\limits_{\omega}[t(v)](\overline{v}-v)+\int\limits_{\omega}(w_{,1111}-g)(\overline{w}-w)\geqslant 0.$$

Выберем здесь в качестве тестовых элементов функции $(\overline{v},\overline{w})=(v\pm\phi,w\pm\psi)$, где $\psi\in H^2_0(\omega)$, $\phi\in H^2_0(\Omega)$, $\psi=\phi$ на ω, $\operatorname{supp}\phi\subset\overline{B}$, см. рис. 2. Получаем равенство

$$-\int\limits_{\omega}[m(v)]\phi_{,2}+\int\limits_{\omega}([t(v)]+w_{,1111}-g)\psi=0.$$

Из полученного равенства, поскольку значения $\phi_{,2}$ и ψ на ω выбираются независимо и произвольно, немедленно вытекает справедливость условий (4).

Докажем справедливость соотношений (7). Выберем в (14) в качестве тестового элемент $(\overline{v},\overline{w})=(v+\xi,w)$, где $\xi\in H^2_0(\Omega)$, $\xi\geqslant 0$ на ω, $\operatorname{supp}\xi\subset\overline{D}$, см. рис. 2. Находим неравенство

$$\int\limits_{\omega}[t(v)]\xi\geqslant 0,$$

которое означает справедливость первого условия (7). Теперь докажем второе условие (7). Предположим, что $v-w>0$ в некоторой точке $a\in\gamma$. Подставим в (14) тестовый элемент $(\overline{v},\overline{w})=(v\pm\lambda\eta,w)$, где $\eta\in H^2_0(\Omega)$, $\operatorname{supp}\eta\subset\overline{D}_a$, $\lambda>0$ – малый параметр, D_a – малая окрестность точки a. Тогда приходим к равенству

$$\lambda\int\limits_{\omega}[t(v)]\eta=0.$$

Полученное равенство означает, что если $v-w>0$ в точке $a\in\gamma$, то $[t(v)]=0$ близи a. С другой стороны, полученное равенство также означает, что если $[t(v)]>0$ в a, то $v-w=0$ в a, поскольку, предположив противное, мы приходим к противоречию. Таким образом, второе соотношение (7) доказано. $\square$

3. Анализ возмущенных задач

В изученных ранее задачах (1)–(7) и (11), (12) отслоение происходило на фиксированном множестве $\gamma = (0,1)\times\{0\}$. Теперь рассмотрим задачи, аналогичные изученным, но в которых отслоение происходит на возмущенном множестве $\gamma^\varepsilon = (0,1+\varepsilon)\times\{0\}$, где число $\varepsilon \geqslant 0$ представляет собой малый параметр возмущения.

Введем в рассмотрение координатное преобразование

$$y_1 = x_1 + \varepsilon\theta(x_1,x_2), \quad y_2 = x_2, \quad (x_1,x_2)\in\Omega, \tag{15}$$

где $\theta \in C_0^\infty(\Omega\setminus\partial\omega)$ – заданная функция, равная единице в малой окрестности точки $(1,0)$. Будем считать, что параметр ε мал настолько, что область Ω отображается на себя, множество ω тоже отображается на себя, и якобиан

$$\Big|\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}\Big| = 1+\varepsilon\theta_{,1}, \tag{16}$$

положителен всюду в Ω. Тогда введенное преобразование (15) является взаимно-однозначным. При этом множество γ взаимно-однозначно отображается на возмущенное множество γ^ε.

Поставим теперь задачу о равновесии пластины и балки, в которой отслоение происходит на возмущенном множестве γ^ε. Для этого введем множество допустимых перемещений

$$K^\varepsilon = \big\{(v,w)\in H_0^2(\Omega)\times H_0^2(\omega): \quad v-w\geqslant 0 \text{ на } \gamma^\varepsilon,\ v=w \text{ на } \omega\setminus\overline{\gamma^\varepsilon}\big\} \tag{17}$$

и рассмотрим задачу минимизации

$$(v^\varepsilon,w^\varepsilon)\in K^\varepsilon: \quad \Pi(v^\varepsilon,w^\varepsilon) = \inf_{(\overline{v},\overline{w})\in K^\varepsilon}\Pi(\overline{v},\overline{w}), \tag{18}$$

в которой функционал энергии определяется формулой (8). Рассматриваемой задаче минимизации эквивалентно вариационное неравенство

$$(v^\varepsilon,w^\varepsilon)\in K^\varepsilon, \quad \forall(\overline{v},\overline{w})\in K^\varepsilon:$$

$$\int\limits_\Omega b(v^\varepsilon,\overline{v}-v^\varepsilon) - \int\limits_\Omega f(\overline{v}-v^\varepsilon) + \int\limits_\omega w^\varepsilon_{,11}(\overline{w}-w^\varepsilon)_{,11} - \int\limits_\omega g(\overline{w}-w^\varepsilon)\geqslant 0. \tag{19}$$

Задачи (18) и (19) при фиксированном значении параметра ε имеют единственное решение. Более того, по аналогии с теоремой 2 можно доказать, что указанное решение, являясь достаточно гладким, удовлетворяет всем соотношениям следующей краевой задачи: найти функции $v^\varepsilon = v^\varepsilon(y_1,y_2)$ и $w^\varepsilon = w^\varepsilon(y_1)$, определяемые в областях Ω и ω соответственно, такие что

$$D\triangle^2 v^\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega\setminus\overline{\omega}, \tag{20}$$

$$v^\varepsilon = v^\varepsilon_{,n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{21}$$

$$[v^\varepsilon] = [v^\varepsilon_{,2}] = 0 \quad \text{на} \quad \omega, \tag{22}$$

$$[m(v^\varepsilon)] = 0, \quad [t(v^\varepsilon)] + w^\varepsilon_{,1111} = g \quad \text{на} \quad \omega, \tag{23}$$

$$w^\varepsilon = w^\varepsilon_{,1} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega, \tag{24}$$

$$v^\varepsilon - w^\varepsilon \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \gamma^\varepsilon, \quad v^\varepsilon = w^\varepsilon \quad \text{на} \quad \omega\setminus\overline{\gamma^\varepsilon}, \tag{25}$$

$$[t(v^\varepsilon)]\geqslant 0, \quad [t(v^\varepsilon)](v^\varepsilon - w^\varepsilon) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^\varepsilon. \tag{26}$$

Задача (20)–(26) описывает равновесие пластины и балки, которая отслаивается от пластины на возмущенном множестве γ^ε, но остается склеенной на $\omega\setminus\overline{\gamma^\varepsilon}$.

Целью нижеследующих рассуждений является осуществление предельного перехода $\varepsilon \to +0$ в вариационном неравенстве (19). С этой целью докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Справедливы следующие асимптотические разложения:*

$$\begin{aligned}\int_\Omega b(\varphi,\psi) &= \int_\Omega b(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) + \\ &\varepsilon\int_\Omega \theta_{,1} b(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) + \varepsilon\int_\Omega B(\theta,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) + \varepsilon\int_\Omega B(\theta,\widetilde{\psi},\widetilde{\varphi}) + \int_\Omega R_1(\varepsilon,\theta,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}),\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\int_\omega \eta_{,11}\xi_{,11} &= \int_\omega \widetilde{\eta}_{,11}\widetilde{\xi}_{,11} \\ &+\varepsilon\int_\omega \theta_{,1}\widetilde{\eta}_{,11}\widetilde{\xi}_{,11} + \varepsilon\int_\omega p(\theta,\widetilde{\xi})\widetilde{\eta}_{,11} + \varepsilon\int_\omega p(\theta,\widetilde{\eta})\widetilde{\xi}_{,11} + \int_\omega R_2(\varepsilon,\theta,\widetilde{\eta},\widetilde{\xi}),\end{aligned} \tag{28}$$

$$\int_\Omega f\psi = \int_\Omega f\widetilde{\psi} + \varepsilon\int_\Omega (f\theta)_{,1}\widetilde{\psi} + \int_\Omega R_3(\varepsilon,\theta,f,\widetilde{\psi}), \tag{29}$$

$$\int_\omega g\xi = \int_\omega g\widetilde{\xi} + \varepsilon\int_\omega (g\theta)_{,1}\widetilde{\xi} + \int_\omega R_4(\varepsilon,\theta,g,\widetilde{\xi}). \tag{30}$$

Здесь функции

$$\varphi,\, \psi \in H^2(\Omega), \quad \eta,\, \xi \in H^2(\omega)$$

произвольны. Для них приняты обозначения

$$\widetilde{\psi}(x_1,x_2) = \psi(x_1+\varepsilon\theta(x_1,x_2),x_2), \quad \widetilde{\xi}(x_1) = \xi(x_1+\varepsilon\theta(x_1,0)). \tag{31}$$

Главные члены разложений определяются формулами

$$\begin{aligned}B(\theta,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) = D\big(&p_{11}(\theta,\widetilde{\varphi})\widetilde{\psi}_{,11} + p_{22}(\theta,\widetilde{\varphi})\widetilde{\psi}_{,22} \\ &+\varkappa p_{22}(\theta,\widetilde{\varphi})\widetilde{\psi}_{,11} + \varkappa p_{11}(\theta,\widetilde{\varphi})\widetilde{\psi}_{,22} + 2(1-\varkappa)p_{12}(\theta,\widetilde{\varphi})\widetilde{\psi}_{,12}\big),\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}p_{11}(\theta,\widetilde{\varphi}) &= -2\theta_{,1}\widetilde{\varphi}_{,11} - \theta_{,11}\widetilde{\varphi}_{,1}, \\ p_{22}(\theta,\widetilde{\varphi}) &= -2\theta_{,2}\widetilde{\varphi}_{,12} - \theta_{,22}\widetilde{\varphi}_{,1}, \\ p_{12}(\theta,\widetilde{\varphi}) &= p_{21}(\theta,\widetilde{\varphi}) = -\theta_{,1}\widetilde{\varphi}_{,12} - \theta_{,2}\widetilde{\varphi}_{,11} - \theta_{,12}\widetilde{\varphi}_{,1}, \\ p(\theta,\widetilde{\eta}) &= -2\theta_{,1}\widetilde{\eta}_{,11} - \theta_{,11}\widetilde{\eta}_{,1}.\end{aligned} \tag{33}$$

Формы $R_1(\varepsilon,\theta,\cdot,\cdot)$, $R_2(\varepsilon,\theta,\cdot,\cdot)$, $R_3(\varepsilon,f,\cdot)$, $R_4(\varepsilon,\theta,g,\cdot)$, задающие остаточные члены разложений, таковы, что имеют место сходимости

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega R_1(\varepsilon,\theta,\cdot,\cdot) \to 0, \quad \frac{1}{\varepsilon}\int_\omega R_2(\varepsilon,\theta,\cdot,\cdot) \to 0, \\ &\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega R_3(\varepsilon,\theta,f,\cdot) \to 0, \quad \frac{1}{\varepsilon}\int_\omega R_4(\varepsilon,\theta,g,\cdot) \to 0\end{aligned} \tag{34}$$

при $\varepsilon \to +0$, равномерные на любых ограниченных подмножествах областей определения этих форм.

Доказательство. Докажем асимптотическое разложение (27). Фиксируем произвольные функции φ, $\psi \in H^2(\Omega)$ и определим для них $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$ по аналогии с (31). Воспользуемся следующими асимптотическими представлениями производных

$$\varphi_{,ij} = \widetilde{\varphi}_{,ij} + \varepsilon p_{ij}(\theta, \widetilde{\varphi}) + \varepsilon^2 r_{ij}(\theta, \widetilde{\varphi}),$$

в которых

$$|r_{ij}(\theta, \widetilde{\varphi})| \leqslant c_3\big(|\widetilde{\varphi}_{,k}| + |\widetilde{\varphi}_{,kl}|\big), \ c_3 > 0, \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

а функции $p_{ij}(\theta, \cdot)$ находятся по формулам (33). Доказательство указанных представлений читатель может найти в [25]. Далее, путем несложных арифметических операций приходим к разложениям

$$\varphi_{,ij}\psi_{,kl} = \widetilde{\varphi}_{,ij}\widetilde{\psi}_{,kl} + \varepsilon p_{ij}(\theta, \widetilde{\varphi})\widetilde{\psi}_{,kl} + \varepsilon p_{kl}(\theta, \widetilde{\psi})\widetilde{\varphi}_{,ij} + \varepsilon^2 r_{ijkl}(\theta, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}), \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

где функции $r_{ijkl}(\theta, \cdot, \cdot)$ однозначно задаются функциями $p_{ij}(\theta, \cdot)$, $r_{ij}(\theta, \cdot)$, и при этом выполняется неравенство

$$|r_{ijkl}(\theta, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})| \leqslant c_4\big(|\widetilde{\varphi}_{,m}| + |\widetilde{\varphi}_{,mn}|\big)\big(|\widetilde{\psi}_{,p}| + |\widetilde{\psi}_{,pq}|\big), \ c_4 > 0, \quad i, j, k, l, m, n, p, q = 1, 2.$$

Отсюда, учитывая (9), находим разложение

$$b(\varphi, \psi) = b(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) + \varepsilon B(\theta, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) + \varepsilon B(\theta, \widetilde{\psi}, \widetilde{\varphi}) + \varepsilon^2 r_1(\theta, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}),$$

где форма $B(\theta, \cdot, \cdot)$ определяется формулой (32), а форма $r_1(\theta, \cdot, \cdot)$ по своему строению является линейной комбинацией $r_{ijkl}(\theta, \cdot, \cdot)$. Домножим найденное разложение на якобиан (16) и проинтегрируем по Ω. Находим

$$\int\limits_\Omega b(\varphi, \psi) = \int\limits_\Omega b(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) + \varepsilon \int\limits_\Omega \theta_{,1} b(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) + \varepsilon \int\limits_\Omega B(\theta, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) + \varepsilon \int\limits_\Omega B(\theta, \widetilde{\psi}, \widetilde{\varphi})$$
$$+ \varepsilon^2 \int\limits_\Omega \big(\theta_{,1} B(\theta, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) + \theta_{,1} B(\theta, \widetilde{\psi}, \widetilde{\varphi}) + (1 + \varepsilon\theta_{,1}) r_1(\theta, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})\big).$$

В свою очередь это с учетом строения формы $r_1(\theta, \cdot, \cdot)$ означает, что разложение (27) доказано.

Докажем асимптотическое разложение (28). Выберем функции η, $\xi \in H^2(\Omega)$ произвольными и определим для них $\widetilde{\eta}$ и $\widetilde{\xi}$ по аналогии с (31). Воспользуемся разложением

$$\eta_{,11} = \widetilde{\eta}_{,11} + \varepsilon p(\theta, \widetilde{\eta}) + \varepsilon^2 r_2(\theta, \widetilde{\eta}),$$

в котором главный член определяется последней формулой из (33), а для остаточного члена верна оценка

$$|r_2(\theta, \widetilde{\eta})| \leqslant c_5\big(|\widetilde{\eta}_{,1}| + |\widetilde{\eta}_{,11}|\big), \quad c_5 > 0.$$

Опираясь на приведенное разложение, несложно получить выражение

$$\eta_{,11}\xi_{,11} = \widetilde{\eta}_{,11}\widetilde{\xi}_{,11} + \varepsilon p(\theta, \widetilde{\xi})\widetilde{\eta}_{,11} + \varepsilon p(\theta, \widetilde{\eta})\widetilde{\xi}_{,11} + \varepsilon^2 r_3(\theta, \widetilde{\eta}, \widetilde{\xi}),$$

в котором форма $r_3(\theta, \cdot, \cdot)$ однозначно определяется функциями $p(\theta, \cdot)$ и $r_2(\theta, \cdot)$, причем

$$|r_3(\theta, \widetilde{\eta}, \widetilde{\xi})| \leqslant c_6\big(|\widetilde{\eta}_{,1}| + |\widetilde{\eta}_{,11}|\big)\big(|\widetilde{\xi}_{,1}| + |\widetilde{\xi}_{,11}|\big), \ c_6 > 0.$$

Отсюда с учетом формулы для якобиана (16) следует, что

$$\int\limits_\omega \eta_{,11}\xi_{,11} = \int\limits_\omega \widetilde{\eta}_{,11}\widetilde{\xi}_{,11} + \varepsilon \int\limits_\omega \theta_{,1}\widetilde{\eta}_{,11}\widetilde{\xi}_{,11} + \varepsilon \int\limits_\omega p(\theta, \widetilde{\xi})\widetilde{\eta}_{,11} + \varepsilon \int\limits_\omega p(\theta, \widetilde{\eta})\widetilde{\xi}_{,11}$$

$$+\varepsilon^2 \int\limits_\omega \big(\theta_{,1} p(\theta,\widetilde{\xi})\widetilde{\eta}_{,11} + \theta_{,1} p(\theta,\widetilde{\eta})\widetilde{\xi}_{,11} + (1+\varepsilon\theta_{,1}) r_3(\theta,\widetilde{\eta},\widetilde{\xi})\big).$$

Таким образом, асимптотическое разложение (28) доказано.

Для справедливости леммы остается доказать асимптотические разложения (29) и (30). Доказательство этих разложений опирается на формулу Тейлора для функций f, g, и не составляет большого труда. Приводить его здесь не будем.

□

Вернемся к вопросу предельного перехода в вариационном неравенстве (19). Применим к входящим в (19) функциям координатное преобразование (15). Заметим, что благодаря структуре преобразования (15) множества K_0 и K^ε отображаются друг в друга взаимно-однозначно. Поэтому, а также опираясь на доказанные в лемме 1 разложения (27)–(30), получаем

$$(\widetilde{v^\varepsilon},\widetilde{w^\varepsilon}) \in K_0, \quad \forall(\overline{v},\overline{w}) \in K_0:$$

$$\int\limits_\Omega b(\widetilde{v^\varepsilon},\overline{v}-\widetilde{v^\varepsilon}) - \int\limits_\Omega f(\overline{v}-\widetilde{v^\varepsilon}) + \int\limits_\omega \widetilde{w^\varepsilon}_{,11}(\overline{w}-\widetilde{w^\varepsilon})_{,11} - \int\limits_\omega g(\overline{w}-\widetilde{w^\varepsilon})$$
$$+\int\limits_\Omega G_1(\varepsilon,\theta,\widetilde{v^\varepsilon},\overline{v}-\widetilde{v^\varepsilon}) + \int\limits_\omega G_2(\varepsilon,\theta,\widetilde{w^\varepsilon},\overline{w}-\widetilde{w^\varepsilon}) \geqslant 0. \tag{35}$$

Здесь

$$\widetilde{v^\varepsilon}(x_1,x_2) = v^\varepsilon(x_1+\varepsilon\theta(x_1,x_2),x_2), \quad \widetilde{w^\varepsilon}(x_1) = w^\varepsilon(x_1+\varepsilon\theta(x_1,0)), \tag{36}$$

где $(v^\varepsilon,w^\varepsilon)$ – решение задачи (19). Формы $G_1(\varepsilon,\theta,\cdot,\cdot)$ и $G_2(\varepsilon,\theta,\cdot,\cdot)$ однозначно определяются главными и остаточными членами разложений (27)–(30). Указанные формы таковы, что

$$\int\limits_\Omega G_1(\varepsilon,\theta,\cdot,\cdot) \to 0, \quad \int\limits_\omega G_2(\varepsilon,\theta,\cdot,\cdot) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to +0 \tag{37}$$

равномерно на любых ограниченных подмножествах областей определения этих форм.

Сформулируем и докажем утверждение о сходимости решений задачи (35) при $\varepsilon \to +0$.

Теорема 3. *Для семейства решений* $(\widetilde{v^\varepsilon},\widetilde{w^\varepsilon})$ *задачи* (35) *имеет место сходимость*

$$(\widetilde{v^\varepsilon},\widetilde{w^\varepsilon}) \to (v,w) \text{ сильно в } H_0^2(\Omega)\times H_0^2(\omega) \text{ при } \varepsilon \to +0,$$

где (v,w) *– решение задачи* (12).

Доказательство. Прежде всего докажем, что из семейства функций $(\widetilde{v^\varepsilon},\widetilde{w^\varepsilon})$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Выберем в вариационном неравенстве (35) в качестве пробного элемента $(\overline{v},\overline{w}) = (0,0)$. Применяя неравенства Пуанкаре-Фридрихса и Коши-Буняковского, приходим к оценкам

$$\|\widetilde{v^\varepsilon}\|_{H_0^2(\Omega)} \leqslant c_7, \qquad \|\widetilde{w^\varepsilon}\|_{H_0^2(\omega)} \leqslant c_8, \qquad c_7,c_8 = const > 0,$$

равномерным по достаточно малому параметру ε. Итак, семейство $(\widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon})$ при малых значениях ε является ограниченным, поэтому можно считать, что с точностью до подпоследовательности имеет место сходимость

$$(\widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}) \to (v, w) \text{ слабо в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\omega)$$

при $\varepsilon \to +0$, где (v, w) – некоторый элемент из $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\omega)$.

Докажем, что предельные функции (v, w) являются решением задачи (12). Для этого перейдем к нижнему пределу при $\varepsilon \to +0$ в вариационном неравенстве (35). Благодаря ограниченности семейства решений $(\widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon})$, мы можем воспользоваться сходимостями (37) и получить, что

$$\int\limits_\Omega G_1(\varepsilon, \theta, \widetilde{v^\varepsilon}, \overline{v} - \widetilde{v^\varepsilon}) \to 0, \quad \int\limits_\omega G_2(\varepsilon, \theta, \widetilde{w^\varepsilon}, \overline{w} - \widetilde{w^\varepsilon}) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to +0$$

для каждого фиксированного элемента $(\overline{v}, \overline{w}) \in K_0$. Поэтому, перейдя к нижнему пределу в (35), будем иметь:

$$(v, w) \in K_0, \quad \forall (\overline{v}, \overline{w}) \in K_0 :$$

$$\int\limits_\Omega b(v, \overline{v} - v) - \int\limits_\Omega f(\overline{v} - v) + \int\limits_\omega w_{,11}(\overline{w} - w)_{,11} - \int\limits_\omega g(\overline{w} - w) \geqslant 0.$$

Таким образом, находим, что функции (v, w) действительно являются решением задачи (12).

Усилим полученный результат о сходимости. Для этого возьмем в (12) в качестве тестовых элементов функции $(\overline{v}, \overline{w}) = (\widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon})$, а затем выберем в (35) функции $(\overline{v}, \overline{w}) = (v, w)$. Суммируя результат подстановки, приходим к неравенству

$$\int\limits_\Omega b(v - \widetilde{v^\varepsilon}, v - \widetilde{v^\varepsilon}) + \int\limits_\omega ((w - \widetilde{w^\varepsilon})_{,11})^2 \leqslant \int\limits_\Omega G_1(\varepsilon, \theta, \widetilde{v^\varepsilon}, v - \widetilde{v^\varepsilon}) + \int\limits_\omega G_2(\varepsilon, \theta, \widetilde{w^\varepsilon}, w - \widetilde{w^\varepsilon}).$$

Применив неравенство Пуанкаре-Фридрихса, получаем

$$\|v - \widetilde{v^\varepsilon}\|^2_{H_0^2(\Omega)} + \|w - \widetilde{w^\varepsilon}\|^2_{H_0^2(\omega)} \leqslant c_9 \Big(\int\limits_\Omega G_1(\varepsilon, \theta, \widetilde{v^\varepsilon}, v - \widetilde{v^\varepsilon}) + \int\limits_\omega G_2(\varepsilon, \theta, \widetilde{w^\varepsilon}, w - \widetilde{w^\varepsilon}) \Big),$$

где $c_9 = const > 0$. Отсюда с учетом ограниченности семейства функций $(\widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon})$ и сходимостей (37) следует, что

$$\|v - \widetilde{v^\varepsilon}\|_{H_0^2(\Omega)} \to 0, \qquad \|w - \widetilde{w^\varepsilon}\|_{H_0^2(\omega)} \to 0,$$

то есть

$$(\widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}) \to (v, w) \text{ сильно в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\omega)$$

при $\varepsilon \to +0$. □

4. Производная функционала энергии

Ниже доказывается существование производной функционала энергии и проводится ее отыскание в виде следующего предела

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\Pi(v^\varepsilon, w^\varepsilon) - \Pi(v, w)}{\varepsilon}. \tag{38}$$

Здесь

$$\Pi(v^\varepsilon, w^\varepsilon) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b(v^\varepsilon, v^\varepsilon) - \int\limits_\Omega f v^\varepsilon + \frac{1}{2}\int\limits_\omega (w^\varepsilon_{,11})^2 - \int\limits_\omega g w^\varepsilon, \tag{39}$$

элемент $(v^\varepsilon, w^\varepsilon)$ является решением возмущенной задачи (19), а (v, w) – решением невозмущенной задачи (12).

Найдем асимптотическое разложение для функционала энергии (39). Для этого применим к функциям в (39) координатное преобразование (15) и воспользуемся разложениями (27)–(30) из леммы 1. Находим следующее представление

$$\Pi(v^\varepsilon, w^\varepsilon) = \widetilde{\Pi}(\varepsilon, \widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}) = \Pi(\widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}) + \varepsilon\Pi'(\theta, \widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}) + R(\varepsilon, \theta, \widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}), \tag{40}$$

в котором

$$\widetilde{v^\varepsilon}(x_1, x_2) = v^\varepsilon(x_1 + \varepsilon\theta(x_1, x_2), x_2), \quad \widetilde{w^\varepsilon}(x_1) = w^\varepsilon(x_1 + \varepsilon\theta(x_1, 0)),$$

$$\begin{aligned} \Pi'(\theta, \widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}) = & \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \theta_{,1} b(\widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{v^\varepsilon}) + \int\limits_\Omega B(\theta, \widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{v^\varepsilon}) - \int\limits_\Omega (f\theta)_{,1}\widetilde{v^\varepsilon} \\ & + \frac{1}{2}\int\limits_\omega \theta_{,1}(\widetilde{w^\varepsilon}_{,11})^2 + \int\limits_\omega p(\theta, \widetilde{w^\varepsilon})\widetilde{w^\varepsilon}_{,11} - \int\limits_\omega (g\theta)_{,1}\widetilde{w^\varepsilon}, \end{aligned} \tag{41}$$

$$R(\varepsilon, \theta, \widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega R_1(\varepsilon, \theta, \widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{v^\varepsilon}) - \int\limits_\Omega R_3(\varepsilon, \theta, f, \widetilde{v^\varepsilon})$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_\omega R_2(\varepsilon, \theta, \widetilde{w^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}) - \int\limits_\omega R_4(\varepsilon, \theta, g, \widetilde{w^\varepsilon}).$$

Напомним, что формы $B(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot)$, $p(\varepsilon, \theta, \cdot)$, $R_1(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot)$, $R_3(\varepsilon, \theta, f, \cdot)$, $R_2(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot)$, $R_4(\varepsilon, \theta, g, \cdot)$ определяются формулами (32)–(34). Также отметим, что форма $\Pi'(\theta, \cdot, \cdot)$ по своему строению является непрерывной, а для формы $R(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot)$ в силу (34) справедлива сходимость

$$\frac{R(\varepsilon, \theta, \cdot, \cdot)}{\varepsilon} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to +0 \tag{42}$$

на любом ограниченном множестве.

Приступим к вычислению предела (38). Для этого воспользуемся двумя важными неравенствами

$$\Pi(v^\varepsilon, w^\varepsilon) \leqslant \widetilde{\Pi}(\varepsilon, v, w), \quad \Pi(v, w) \leqslant \Pi(\widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}),$$

которые верны благодаря тому, что $\Pi(v^\varepsilon, w^\varepsilon) = \inf_{K^\varepsilon} \Pi$ и $\Pi(v, w) = \inf_{K_0} \Pi$, а между множествами K^ε и K_0 имеет место взаимно-однозначное соответствие. С помощью указанных неравенств получаем оценку

$$\frac{\Pi(v^\varepsilon, w^\varepsilon) - \Pi(\widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon})}{\varepsilon} \leqslant \frac{\Pi(v^\varepsilon, w^\varepsilon) - \Pi(v, w)}{\varepsilon} \leqslant \frac{\widetilde{\Pi}(\varepsilon, v, w) - \Pi(v, w)}{\varepsilon}.$$

Отсюда с учетом разложения (40) приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \Pi'(\theta, \widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}) + \frac{R(\varepsilon, \theta, \widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon})}{\varepsilon} \\ & \qquad \leqslant \frac{\Pi(v^\varepsilon, w^\varepsilon) - \Pi(v, w)}{\varepsilon} \leqslant \Pi'(\theta, v, w) + \frac{R(\varepsilon, \theta, v, w)}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{43}$$

Проанализируем сходимость фигурирующих в (43) миноранты и мажоранты. Напомним, что в силу доказанной теоремы 3 имеет место сходимость

$$(\widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}) \to (v, w) \text{ сильно в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\omega)$$

при $\varepsilon \to +0$. Поэтому, опираясь на непрерывность $\Pi'(\theta, \cdot, \cdot)$ и справедливость сходимости (42), имеем

$$\Pi'(\theta, \widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon}) + \frac{R(\varepsilon, \theta, \widetilde{v^\varepsilon}, \widetilde{w^\varepsilon})}{\varepsilon} \to \Pi'(\theta, v, w), \;\; \Pi'(\theta, v, w) + \frac{R(\varepsilon, \theta, v, w)}{\varepsilon} \to \Pi'(\theta, v, w),$$

при $\varepsilon \to +0$. Отсюда по теореме о пределе промежуточной функции следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\Pi(v^\varepsilon, w^\varepsilon) - \Pi(v, w)}{\varepsilon} = \Pi'(\theta, v, w).$$

Таким образом нами доказано, что предел (38), задающий производную функционала энергии по длине отслоения, существует и равен $\Pi'(\theta, v, w)$. Формулу, выражающую этот предел, несложно найти по формулам (41) и (32), (33). Полученный результат оформим в виде теоремы.

Теорема 4. *Производная функционала энергии по длине отслоения существует и задается формулой*

$$\Pi'(\theta, v, w) = D \int\limits_\Omega \big(p_{11}(\theta, v) v_{,11} + p_{22}(\theta, v) v_{,22} + \varkappa p_{22}(\theta, v) v_{,11}$$

$$+ \varkappa p_{11}(\theta, v) v_{,22} + 2(1 - \varkappa) p_{12}(\theta, v) v_{,12} \big) + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \theta_{,1} b(v, v) - \int\limits_\Omega (f\theta)_{,1} v$$

$$+ \int\limits_\omega p(\theta, w) w_{,11} + \frac{1}{2} \int\limits_\omega \theta_{,1} (w_{,11})^2 - \int\limits_\omega (g\theta)_{,1} w.$$

Здесь

$$p_{11}(\theta, v) = -2\theta_{,1} v_{,11} - \theta_{,11} v_{,1},$$

$$p_{22}(\theta, v) = -2\theta_{,2} v_{,12} - \theta_{,22} v_{,1},$$

$$p_{12}(\theta, v) = p_{21}(\theta, v) = -\theta_{,1} v_{,12} - \theta_{,2} v_{,11} - \theta_{,12} v_{,1},$$

$$p(\theta, w) = -2\theta_{,1} w_{,11} - \theta_{,11} w_{,1},$$

функции (v, w) *– решение невозмущенной задачи* (12)*, а функция* $\theta \in C_0^\infty(\Omega \setminus \partial\omega)$ *такова, что* $\theta = 1$ *в малой окрестности точки* $(1, 0)$.

В полученную формулу для производной функционала энергии входит функция θ, которая выбирается, вообще говоря, довольно произвольным образом. Тем не менее, производная в результате не зависит от выбора вспомогательной функции θ. Действительно, решение $(v^\varepsilon, w^\varepsilon)$ возмущенной задачи (35) не зависит от θ, а зависит лишь от возмущенной области γ^ε. Поэтому и производная функционала энергии, понимаемая в смысле предела (38), зависеть от θ не будет.

References

[1] L. A. Caffarelli, A. Friedman, *The obstacle problem for the biharmonic operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **6**:1 (1979), 151–184. MR0529478

[2] L. A. Caffarelli, A. Friedman, A. Torelli, *The two-obstacle problem for the biharmonic operator*, Pacific J. Math., **103**:3 (1982), 325–335. MR0705233

[3] B. Schild, *On the coincidence set in biharmonic variational inequalities with thin obstacles*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13**:4 (1986), 559–616. MR0880399

[4] G. Dal Maso, G. Paderni, *Variational inequalities for the biharmonic operator with varying obstacles*, Ann. Mat. Pura Appl., **153**:1 (1988), 203–227. MR1008345

[5] A. M. Khludnev, J. Sokolowski, *Modelling and control in solid mechanics*, Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 1997. MR1433133

[6] A. M. Khludnev, K.-H. Hoffmann, N. D. Botkin, *The variational contact problem for elastic objects of different dimensions*, Sib. Math. J., **47**:3 (2006), 584–593. MR2251078

[7] A. M. Khludnev, *On unilateral contact of two plates aligned an angle to each other*, J. Appl. Mech. and Tech. Phys., **49**:4 (2008), 553—567. MR2441814

[8] A. M. Khludnev, G. Leugering, *Unilateral contact problems for two perpendicular elastic structures*, J. Analysis and its Applications, **27**:2 (2008), 157–177. MR2390540

[9] A. M. Khludnev, A. Tani, *Unilateral contact problem for two inclined elastic bodies*, Eur. J. Mech. A Solids, **27**:3 (2008), 365–377. MR2407924

[10] T. A. Rotanova, *On the statements and solvability of the problems on the contact of two plates containing rigid inclusions*, Sib. Zh. Ind. Mat., **15**:2 (2012), 107–118. (in Russian) MR3099839

[11] N. V. Neustroeva, *Unilateral Contact of Elastic Plates to Rigid Inclusion*, Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., **9**:4 (2009), 51–64. (in Russian) Zbl 1249.74080

[12] A. I. Furtsev, *On contact of thin obstacle and plate, containing thin inclusion*, Sib. J. Pure and Applied Math., **17**:4 (2017), 94–111. (in Russian)

[13] A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko, *Analysis of Cracks in Solids*, WIT Press, Southampton–Boston, 2000.

[14] A. M. Khludnev, *Theory of cracks with a possible contact of the crack edges*, Usp. Mekh., **3**:4 (2005), 41–82.

[15] J. Sokolowski, J. P. Zolesio, *Introduction to shape optimization*, Berlin: Springer Verlag, 1992. MR1215733

[16] J. Sokolowski, A. A. Novotny, *Topological derivatives in shape optimization*, Springer Science & Business Media, 2012.

[17] A. M. Khludnev, J. Sokolowski, *Griffith formulae for elasticity systems with unilateral conditions in domains with cracks*, Eur. J. Mech. A Solids, **19**:1 (2000), 105–119. MR1748780

[18] M. Bach, A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko, *Derivatives of the energy functional for 2D-problems with a crack under signorini and friction conditions*, Math. Meth. Appl. Sci., **23**:6 (2000), 515–534. MR1748320

[19] E. M. Rudoy, *The Griffiths formula for a plate with a crack*, Sib. Zh. Ind. Mat., **5**:3 (2002), 155–161. (in Russian) MR1964118

[20] V. A. Kovtunenko, *Nonconvex problem for crack with nonpenetration*, Z. Angew. Math. Mech., **85**:4 (2005), 242–251. MR2131983

[21] V. A. Kovtunenko, *Primal–dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration*, J. Appl. Math., **71**:5 (2006), 635–657. MR2268880

[22] E. M. Rudoy, *Differentiation of energy functionals in the problem on a curvilinear crack with possible contact between the shores*, Mech. Solids, **42**:6 (2008), 935–946.

[23] E. M. Rudoy, *Differentiation of energy functionals in the problem of a curvilinear crack in a plate with a possible contact of the crack faces*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **49**:5 (2008), 832–845. MR2466473

[24] N. P. Lazarev, E. M. Rudoy, *Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition*, Z. Angew. Math. Mech., **94**:9 (2014), 730–739. MR3259385

[25] E. M. Rudoy, *The Griffith formula and Cherepanov–Rice integral for a plate with a rigid inclusion and a crack*, J. Math. Sci., **186**:3 (2012), 511–529. MR3049184

[26] N. P. Lazarev, *Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion*, Z. Angew. Math. Phys., **66**:4 (2015), 2025–2040. MR3377729

[27] E. M. Rudoy, *Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body*, Z. Angew. Math. Phys., **66**:4 (2015), 1923–1937. MR3377723

[28] V. V. Shcherbakov, *The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions*, Z. Angew. Math. Mech., **96**:11 (2016), 1306–1317. MR3580286

[29] A. M. Khludnev, V. V. Shcherbakov, *Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler–Bernoulli inclusions*, Math. Mech. Solids, **22**:11 (2017), 2180–2195. MR3719485

[30] V. V. Shcherbakov, *Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions*, Z. Angew. Math., **68**:1 (2017), 26. MR3598792

Alexey Igorevich Furtsev
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Russian Academy of Sciences,
pr. Lavrentyeva, 15,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: furtsev@hydro.nsc.ru