S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 971–986 (2018) УДК 517.968.72
DOI 10.17377/semi.2018.15.082 MSC 45J05, 34K30

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕПОЛНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Д.А. ЗАКОРА

Abstract. In this paper, we consider a system of connected incomplete second-order integro-differential operator equations. The sufficient conditions for exponential stability of this system are given. In the case where the external forces are of special type an asymptotic behavior of solutions to this system is proven.

Keywords: integro-differential equation, exponential stability, asymptotics.

1. Введение

Многие задачи из механики не вполне упругих тел и конструкций, динамики вязкоупругих сплошных сред описываются системами интегро-дифференциальных уравнений. Интегральные слагаемые в уравнениях часто связаны с учетом эффектов памяти в системе (см. [1]). Монографии [2, 3] посвящены механике и термодинамике вязкоупругих сплошных сред при изотермических и неизотермических процессах деформирования. В монографии [4] к исследованию вязкоупругих и термовязко-упругих систем систематически применяется теория C_0-полугрупп операторов и теория абстрактных дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. В [5] исследуются спектральные свойства абстрактных функционально-дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Одним из вопросов, возникающих при изучении указанных задач, является поведение решения при больших временах. В пионерских работах [6, 7], в связи

Zakora, D.A., Asymptotics of solutions to a system of connected incomplete second-order integro-differential operator equations.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

Поступила 27 января 2018 г., опубликована 28 августа 2018 г.

с задачей о динамике вязкоупругого тела, рассмотрена следующая задача для интегро-дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве H:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + \int_{-\infty}^{t} G(t-s)u(s)\,ds = 0, \quad u(s) = v(s), \ \ s \in (-\infty, 0], \tag{1}$$

или

$$\begin{gathered} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + \int_{0}^{t} G(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad u(0) = v(0), \ \ u'(0) = v'(0), \\ f(t) := -\int_{-\infty}^{0} G(t-s)v(s)\,ds, \end{gathered} \tag{2}$$

где A — самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром, $G(t)$ ($t \in [0, +\infty)$) — самосопряженная неположительная оператор-функция, подчиненная некоторым образом оператору A. Доказано, что решение задачи (1) убывает к нулю при $t \to +\infty$, однако без оценки скорости.

В дальнейшем задачи о динамике вязкоупругого тела и других систем в указанном контексте изучались многими авторами. Например, в работах [8]-[11] исследуется вопрос об экспоненциальной и полиномиальной устойчивости решений в задачах вязкоупругости. Работы [12]-[14] посвящены экспоненциальной устойчивости в некоторых задачах теомовязко-упругости. В [15, 16] исследуются вопросы управления систем с памятью. В [17]-[20] изучаются одномерные системы типа модели Тимошенко вязкоупругих стержней.

Во многих работах исследуется задача (1) (или (2)) при условии, что ядро представимо в виде $G(t) = g(t)A$, где $g(t)$ — скалярная функция. В [21]-[27] изучается, в частности, вопрос экспоненциальной (или полиномиальной) устойчивости решений задачи (1) (или (2)) при различных условиях на функцию $g(t)$.

В [28] исследован вопрос об асимптотическом представлении решения задачи (2) в случае, когда $f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} f_k(t)$. При этом ядро $G(t)$, с одной стороны, является суммой конечного количества экспоненциальных функций. С другой стороны, операторные коэффициенты при этих экспоненциальных функциях не коммутируют между собой. Задача (2) сведена к дифференциально операторному уравнению первого порядка. Исследован вопрос экспоненциальной устойчивости C_0-полугруппы, генерируемой соответствующим оператором, дана оценка типа полугруппы. Из полученного утверждения выведено асимптотическое представление решения задачи (2), приведены некоторые приложения.

Здесь мы ослабляем условия на коэффициенты операторного ядра и доказываем экспоненциальную устойчивость соответствующей C_0-полугруппы, однако без оценки ее типа. Из этого факта выводится асимптотическое представление решения задачи Коши для системы из двух связанных неполных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.

2. Постановка задачи и формулировка основного утверждения

Рассмотрим задачу Коши для системы из двух связанных неполных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве

$\mathrm{H} := H_1 \oplus H_2$ (H_1, H_2 — гильбертовы пространства):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_1}{dt^2} = -A_1u_1 - Su_2 + \displaystyle\sum_{l=1}^{m_1}\int_0^t \exp\big(-b_{1l}(t-s)\big)C_{1l}^*C_{1l}u_1(s)\,ds + f_1(t), \\ \dfrac{d^2u_2}{dt^2} = -S^*u_1 - A_2u_2 + \displaystyle\sum_{l=1}^{m_2}\int_0^t \exp\big(-b_{2l}(t-s)\big)C_{2l}^*C_{2l}u_2(s)\,ds + f_2(t), \end{cases}$$

$$u_1(0) = u_1^0, \quad u_1'(0) = u_1^1, \qquad u_2(0) = u_2^0, \quad u_2'(0) = u_2^1, \tag{3}$$

где оператор A_r ($r = 1, 2$) самосопряжен и положительно определен в H_r, оператор S плотно определен и замкнут из H_2 в H_1, а оператор C_{rl} ($r = 1, 2$), действующий из H_r в гильбертово пространство H_{rl}, плотно определен и замкнут при каждом $l = \overline{1, m_r}$. Будем считать, что числа b_{rl} ($r = 1, 2,\ l = \overline{1, m_r}$) положительны и различны.

Пусть $\mathcal{D}(A_r) \subset \mathcal{D}(C_{rl}^*C_{rl})$ ($r = 1, 2,\ l = \overline{1, m_r}$), тогда $C_{rl}A_r^{-1/2} \in \mathcal{L}(H_r, H_{rl})$ (через $\mathcal{L}(H_r, H_{rl})$ обозначено банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из H_r в H_{rl}) — это следствие неравенства Гайнца [29, гл. 1, § 7, теорема 7.1] и теоремы о полярном разложении [30, гл. 8, § 1, теорема 2, теорема 3]. Будем считать также, что в (3) выполнены следующие условия:

$$SA_2^{-1/2} \in \mathcal{L}(H_2, H_1), \quad S^*A_1^{-1/2} \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \tag{4}$$

$$T_r := \sum_{l=1}^{m_r} \frac{1}{b_{rl}}(C_{rl}A_r^{-1/2})^*(C_{rl}A_r^{-1/2}) \gg 0 \quad (r = 1, 2), \tag{5}$$

$$\mathrm{Q}_0^*\mathrm{Q}_0 := \begin{pmatrix} I_1 - T_1 & A_1^{-1/2}SA_2^{-1/2} \\ A_2^{-1/2}S^*A_1^{-1/2} & I_2 - T_2 \end{pmatrix} \gg 0. \tag{6}$$

Определение 1. *Сильным решением* задачи Коши (3) назовем такие функции $u_1(t)$, $u_2(t)$, что $u_r(t) \in \mathcal{D}(A_r)$, $u_r'(t) \in \mathcal{D}(A_r^{1/2})$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $A_ru_r(t)$, $A_r^{1/2}u_r'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H_r)$, $u_r(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; H_r)$ ($r = 1, 2$), выполнены начальные условия и уравнения из (3) для любого $t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

Теорема 1. *Пусть $u_r^0 \in \mathcal{D}(A_r)$, $u_r^1 \in \mathcal{D}(A_r^{1/2})$, $f_r(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; H_r)$ $(r=1, 2)$. Тогда задача* (3) *имеет единственное сильное решение.*

Пусть $f_r(t) = g_r(t) + \sum_{k=0}^{n_r} e^{-i\sigma_{rk}t}f_{rk}(t)$, где $g_r(t)$, $f_{rk}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; H_r)$, $\sigma_{rk} \in \mathbb{R}$ $(r = 1, 2,\ k = \overline{1, n_r})$ (будем считать, что $\sigma_{r0} = 0$, $\sigma_{rk} \neq 0$ $(k = \overline{1, n_r})$). Тогда существуют константы $\omega > 0$, $M_1 \geqslant 1$, $M_2 \geqslant 1$ такие, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ имеет место следующее неравенство

$$\begin{aligned} &\left\| \mathrm{diag}\big(A_1^{1/2}, A_2^{1/2}\big) \left[\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} - \sum_{r=1}^{2}\sum_{k=0}^{n_r} e^{-i\sigma_{rk}t}\mathbf{M}(i\sigma_{rk}) \begin{pmatrix} \delta_{r1}f_{rk}(t) \\ \delta_{r2}f_{rk}(t) \end{pmatrix} \right] \right\|_{\mathrm{H}}^2 + \\ &\qquad + \left\| \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} + \sum_{r=1}^{2}\sum_{k=1}^{n_r} e^{-i\sigma_{rk}t} i\sigma_{rk}\mathbf{M}(i\sigma_{rk}) \begin{pmatrix} \delta_{r1}f_{rk}(t) \\ \delta_{r2}f_{rk}(t) \end{pmatrix} \right\|_{\mathrm{H}}^2 \leqslant \\ &\leqslant M_1e^{-2\omega t}\sum_{r=1}^{2}\left[\|A_r^{1/2}u_r^0\|_{H_r}^2 + \|u_r^1\|_{H_r}^2 + \sum_{k=0}^{n_r}\|f_{rk}(0)\|_{H_r}^2 \right] + \\ &\qquad + M_2\sum_{r=1}^{2}\left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|g_r(s)\|_{H_r} + \sum_{k=0}^{n_r}\|f_{rk}'(s)\|_{H_r} \Big)\,ds \right]^2, \end{aligned} \tag{7}$$

где δ_{rm} — символ Кронекера, а пучок $\mathbf{M}(\lambda)$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{M}(\lambda) := \begin{pmatrix} A_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix} \Bigg[\begin{pmatrix} I_1 & A_1^{-1/2} S A_2^{-1/2} \\ A_2^{-1/2} S^* A_1^{-1/2} & I_2 \end{pmatrix} + \\ + \lambda^2 \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} - \sum_{l=1}^{m_1} \frac{1}{b_{1l} - \lambda} \begin{pmatrix} (C_{1l} A_1^{-1/2})^* (C_{1l} A_1^{-1/2}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \\ - \sum_{l=1}^{m_2} \frac{1}{b_{2l} - \lambda} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (C_{2l} A_2^{-1/2})^* (C_{2l} A_2^{-1/2}) \end{pmatrix} \Bigg]^{-1} \begin{pmatrix} A_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

В частности, если $\|g_r(t)\|_{H_r} \to 0$, $\|f'_{rk}(t)\|_{H_r} \to 0$ $(r = 1, 2,\ k = \overline{0, n_r})$ при $t \to +\infty$, то и

$$\left\| \operatorname{diag}\big(A_1^{1/2}, A_2^{1/2}\big) \Bigg[\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} - \sum_{r=1}^{2} \sum_{k=0}^{n_r} e^{-i\sigma_{rk} t} \mathbf{M}(i\sigma_{rk}) \begin{pmatrix} \delta_{r1} f_{rk}(t) \\ \delta_{r2} f_{rk}(t) \end{pmatrix} \Bigg] \right\|_{\mathrm{H}}^2 + \\ + \left\| \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix} + \sum_{r=1}^{2} \sum_{k=1}^{n_r} e^{-i\sigma_{rk} t} i\sigma_{rk} \mathbf{M}(i\sigma_{rk}) \begin{pmatrix} \delta_{r1} f_{rk}(t) \\ \delta_{r2} f_{rk}(t) \end{pmatrix} \right\|_{\mathrm{H}}^2 \to 0.$$

3. Экспоненциальная устойчивость специальной полугруппы

Для доказательства теоремы 1 понадобится вспомогательное утверждение о равномерной экспоненциальной устойчивости C_0-полугруппы с генератором специального вида (см. [28]).

Пусть H, H_l $(l = \overline{0, m})$ — гильбертовы пространства. Пусть задан самосопряженный и положительно определенный оператор $\mathrm{A} : \mathcal{D}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{H} \to \mathrm{H}$, заданы ограниченные операторы $\mathrm{Q}_l \in \mathcal{L}(\mathrm{H}, \mathrm{H}_l)$ $(l = \overline{0, m})$ и неотрицательные числа $\gamma_l \geqslant 0$ такие, что $(\mathrm{Q}_l^* \mathrm{Q}_l u, u)_{\mathrm{H}} \geqslant \gamma_l \|u\|_{\mathrm{H}}^2$ при всех $u \in \mathrm{H}$. Будем считать также, что дан упорядоченный набор неотрицательных чисел $0 =: b_0 < b_1 < \ldots < b_m$.

Определим гильбертово пространство $\mathcal{H} := \mathrm{H} \oplus \big(\oplus_{l=0}^m \mathrm{H}_l\big)$, состоящее из элементов вида $\xi := (u; w)^\tau := \big(u; (u_0; u_1; \ldots; u_m)^\tau\big)^\tau$ (символ τ означает транспонирование). В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определим оператор $\mathcal{A}$ по следующей формуле:

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}\big(\mathrm{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}\big(\mathrm{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{A}^{1/2} \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} \mathrm{A}^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathcal{Q} := \big(\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1 \mathrm{I}, \ldots, b_m \mathrm{I}\big), \quad \mathcal{I} := \operatorname{diag}\big(\mathrm{I}, \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{I}\big),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{ \xi = (u; w)^\tau \in \mathcal{H} \big|\ u \in \mathcal{D}(\mathrm{A}^{1/2}),\ \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(\mathrm{A}^{1/2}) \Big\}. \quad (9)$$

Предложение 1. [28] *Пусть существует $\mathrm{Q}_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0, \mathrm{H})$ и $\gamma_q = \gamma_q(\mathrm{Q}_q^* \mathrm{Q}_q) > 0$ при некотором $q \in \{1, \ldots, m\}$. Обозначим через λ_k^+ наименьший положительный корень уравнения $g_k(\lambda) = 0$ $(k = 1, 2)$, где*

$$g_1(\lambda) := \|\mathrm{Q}_0^{-1}\|^{-2} - \lambda^2 \|\mathrm{A}^{-1/2}\|^2 - \lambda \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l - \lambda} \|\mathrm{Q}_l\|^2,$$

$$g_2(\lambda) := \gamma_q + 2\lambda \Big[\sum_{q < l \leqslant m} \frac{\gamma_l}{b_l - b_q + 2\lambda} - \frac{\|\mathrm{Q}_0\|^2}{b_q - 2\lambda} - \sum_{1 \leqslant l < q} \frac{\|\mathrm{Q}_l\|^2}{b_q - b_l - 2\lambda} \Big].$$

Определим число

$$\omega_0 := \min\Big\{\frac{b_q - b_{q-1}}{2}, \frac{b_q}{3}, \lambda_1^+, \lambda_2^+\Big\}. \tag{10}$$

Тогда оператор $-\mathcal{A}$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0-полугруппы $\mathcal{U}(t)$. Более того, для любого $\omega \in (0, \omega_0)$ существует $M = M(\omega) \geqslant 1$ такое, что

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant Me^{-\omega t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+. \tag{11}$$

Доказательство вспомогательной теоремы следует некоторым идеям из [31, с. 303, теорема 4] и опирается на утверждение, следующее из работы К. Веселича (см. [31, с. 294-297]).

Предложение 2. [31, с. 294-297] *Пусть $-\mathcal{A}$, $-\mathcal{B}$ являются генераторами C_0-полугрупп $\mathcal{U}_\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{U}_\mathcal{B}(t)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и при некотором $c > 0$ выполнено неравенство*

$$|\big(\mathcal{B}^*\xi, \eta\big)_\mathcal{H} - \big(\xi, \mathcal{A}\eta\big)_\mathcal{H}|^2 \leqslant c^2 \operatorname{Re}\big(\mathcal{B}^*\xi, \xi\big)_\mathcal{H} \operatorname{Re}\big(\mathcal{A}\eta, \eta\big)_\mathcal{H} \quad \forall\, \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{B}^*),\ \eta \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{12}$$

тогда имеет место следующая оценка

$$\|\mathcal{U}_\mathcal{A}(t) - \mathcal{U}_\mathcal{B}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant \frac{c}{2} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть $\mathrm{Q}_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0, \mathrm{H})$, $m \geqslant 2$ и $\sum_{l=1}^m \mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l \gg 0$. Тогда оператор $-\mathcal{A}$ (см.* (8)-(9)*) является генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0-полугруппы.*

Доказательство. **1.** Определим оператор $\mathcal{G}_0 := \operatorname{diag}\big(0, b_1\mathrm{I}, \ldots, b_1\mathrm{I}\big)$. Введем натуральное число $n_c \in \mathbb{N}$ и операторы $\mathcal{G}_k$ $(k = \overline{0, n_c})$ по формулам

$$n_c := \Big[\frac{b_m - b_1}{2b_1}\Big] + 1, \quad \mathcal{G}_k := \mathcal{G}_0 + \frac{k}{n_c}(\mathcal{G} - \mathcal{G}_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n_c, \tag{14}$$

где квадратные скобки $[\cdot]$ означают вычисление целой части числа. Далее, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определим операторы $\mathcal{B}_k$ $(k = \overline{0, n_c})$ по формуле:

$$\mathcal{B}_k = \operatorname{diag}\big(\mathrm{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}_k \end{pmatrix}\operatorname{diag}\big(\mathrm{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{A}^{1/2}\mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q}\mathrm{A}^{1/2} & \mathcal{G}_k \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}_k) = \Big\{\xi = (u; w)^\tau \in \mathcal{H}\big|\ u \in \mathcal{D}(\mathrm{A}^{1/2}),\ \ \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(\mathrm{A}^{1/2})\Big\} = \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{16}$$

Легко видеть, что $\mathcal{B}_{n_c} = \mathcal{A}$, $\mathcal{D}(\mathcal{B}_k) = \mathcal{D}(\mathcal{B}_k^*) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ $(k = \overline{0, n_c})$ и операторы $-\mathcal{B}_k$ — генераторы сжимающих C_0-полугрупп $\mathcal{U}_{\mathcal{B}_k}(t)$ (см. предложение 1).

2. Покажем, что оператор $-\mathcal{B}_0$ генерирует равномерно экспоненциально устойчивую полугруппу. Операторы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{G}_0$ в (15) запишем в виде

$$\mathcal{Q} := \big(\mathrm{Q}_0, \widehat{Q}_0\big)^\tau,\ \ \widehat{Q}_0 := \big(\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G}_0 := \operatorname{diag}\big(0, b_1\widehat{I}\big),\ \ \widehat{I} := \operatorname{diag}\big(\mathrm{I}, \ldots, \mathrm{I}\big),$$

тогда к оператору $\mathcal{B}_0$ применимо предложение 1 при $m = 1$ с заменой Q_1 на $\widehat{Q}_0$. Действительно, из условий настоящей теоремы следует, что при некотором $\gamma_1 = \gamma_1(\sum_{l=1}^m \mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l) > 0$

$$\big(\widehat{Q}_0^*\widehat{Q}_0 u, u\big)_\mathrm{H} = \Big(\sum_{l=1}^m \mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l u, u\Big)_\mathrm{H} \geqslant \gamma_1\|u\|_\mathrm{H}^2 \quad \forall\, u \in \mathrm{H}.$$

Из предложения 1 следует, что оператор $-\mathcal{B}_0$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0-полугруппы $\mathcal{U}_{\mathcal{B}_0}(t)$, тип которой может быть оценен по формуле (10).

3. Из (14) следует, что

$$\mathcal{G}_0 \leqslant \mathcal{G}_{k+1}, \qquad 0 \leqslant \mathcal{G}_{k+1} - \mathcal{G}_k \leqslant \frac{b_m - b_1}{n_c b_1}\mathcal{G}_0, \quad k = 0, 1, \ldots, n_c - 1. \tag{17}$$

Из (15), (16), (17) теперь найдем, что при всех ξ, $\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned}
|\big(\mathcal{B}_{k+1}^*\xi, \eta\big)_{\mathcal{H}} - \big(\xi, \mathcal{B}_k\eta\big)_{\mathcal{H}}|^2 = |\big(\xi, \mathcal{B}_{k+1}\eta - \mathcal{B}_k\eta\big)_{\mathcal{H}}|^2 = \\
= |\big(\xi, \mathrm{diag}(0, \mathcal{G}_{k+1} - \mathcal{G}_k)\eta\big)_{\mathcal{H}}|^2 \leqslant \\
\leqslant \big(\mathrm{diag}(0, \mathcal{G}_{k+1} - \mathcal{G}_k)\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} \big(\mathrm{diag}(0, \mathcal{G}_{k+1} - \mathcal{G}_k)\eta, \eta\big)_{\mathcal{H}} \leqslant \\
\leqslant \Big(\frac{b_m - b_1}{n_c b_1}\Big)^2 \big(\mathrm{diag}(0, \mathcal{G}_0)\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} \big(\mathrm{diag}(0, \mathcal{G}_0)\eta, \eta\big)_{\mathcal{H}} \leqslant \\
\leqslant \Big(\frac{b_m - b_1}{n_c b_1}\Big)^2 \big(\mathrm{diag}(0, \mathcal{G}_{k+1})\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} \big(\mathrm{diag}(0, \mathcal{G}_k)\eta, \eta\big)_{\mathcal{H}} = \\
= \Big(\frac{b_m - b_1}{n_c b_1}\Big)^2 \mathrm{Re}\big(\mathcal{B}_{k+1}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} \mathrm{Re}\big(\mathcal{B}_k\eta, \eta\big)_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Отсюда, из (12), (13) (см. предложение 2) и (14) теперь получим, что

$$\|\mathcal{U}_{\mathcal{B}_k}(t) - \mathcal{U}_{\mathcal{B}_{k+1}}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant \frac{b_m - b_1}{2n_c b_1} =: \varepsilon < 1, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad k = 0, 1, \ldots, n_c - 1. \tag{18}$$

4. По доказанному, оператор $-\mathcal{B}_0$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0-полугруппы $\mathcal{U}_{\mathcal{B}_0}(t)$. Из (18) при $k = 0$ найдем, что $\|\mathcal{U}_{\mathcal{B}_1}(t_1)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant \varepsilon + \|\mathcal{U}_{\mathcal{B}_0}(t_1)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < 1$ при достаточно большом $t_1 \in \mathbb{R}_+$. Следовательно (см., например, [32, гл. 5, § 1, предложение 1.7]), C_0-полугруппа $\mathcal{U}_{\mathcal{B}_1}(t)$ равномерно экспоненциально устойчива.

Из (18) при $k = 1$ теперь следует, что C_0-полугруппа $\mathcal{U}_{\mathcal{B}_2}(t)$ равномерно экспоненциально устойчива. Продолжая эти рассуждения, найдем, что полугруппа $\mathcal{U}_{\mathcal{B}_{n_c}}(t) \equiv \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(t)$ равномерно экспоненциально устойчива. □

Приведем здесь формулу для резольвенты оператора $\mathcal{A}$, которую можно получить из факторизации оператора $\mathcal{A} - \lambda$ в форме Шура-Фробениуса:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = \mathrm{diag}(\mathrm{A}^{-1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} -\lambda \mathrm{A}^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix}^{-1} \mathrm{diag}(\mathrm{A}^{-1/2}, \mathcal{I}) = \\
= \begin{pmatrix} \mathrm{A}^{-1/2} & 0 \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{L}^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A}^{-1/2} & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} \mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathrm{A}^{-1/2} & -\mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}\mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathrm{A}^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\big[\mathcal{I} - \mathcal{Q}\mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\big] \end{pmatrix} \\
\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) \cup \sigma(\mathrm{L}(\lambda)), \quad \mathrm{L}(\lambda) := -\lambda \mathrm{A}^{-1} + \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}.
\end{aligned} \tag{19}$$

4. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 проведем в несколько этапов. Сведем задачу Коши (3) к системе дифференциальных уравнений и начальных условий, которые будем трактовать как задачу Коши для дифференциально операторного уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве. Операторный коэффициент этого уравнения будет генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0-полугруппы. Из этого факта будут выведены условия разрешимости и неравенство (7).

1. Предположим, что задача (3) имеет сильное решение $u_1(t)$, $u_2(t)$ (в смысле определения 1) и $u_r^0 \in \mathcal{D}(A_r^{1/2}) \subset \mathcal{D}(C_{rl})$ $(r = 1, 2)$. Преобразуем уравнения системы (3) специальным образом.

Из $A_r^{1/2}u_r'(t)$, $A_r^{1/2}u_r(t) \in C(\mathbb{R}_+; H_r)$ следует (см. [29, гл. 3, § 1, п. 1]), что $(A_r^{1/2}u_r(t))' = A_r^{1/2}u_r'(t)$ и мы можем при каждом $l = \overline{1,m}$, $r = 1, 2$ провести следующее преобразование:

$$\int_0^t e^{-b_{rl}(t-s)}(C_{rl}A_r^{-1/2})A_r^{1/2}u_r(s)\,ds = \frac{1}{b_{rl}}(C_{rl}A_r^{-1/2})A_r^{1/2}u_r(t) - \\ - e^{-b_{rl}t}\frac{1}{b_{rl}}(C_{rl}A_r^{-1/2})A_r^{1/2}u_r^0 - \int_0^t e^{-b_{rl}(t-s)}\frac{1}{b_{rl}}(C_{rl}A_r^{-1/2})A_r^{1/2}u_r'(s)\,ds. \quad (20)$$

Преобразуем уравнения из (3) с помощью (20) и (5), получим:

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} = -A_1^{1/2}\Big[A_1^{1/2}u_1 + A_1^{-1/2}Su_2 - \\ - \sum_{l=1}^{m_1}(C_{1l}A_1^{-1/2})^*\int_0^t e^{-b_{1l}(t-s)}(C_{1l}A_1^{-1/2})A_1^{1/2}u_1(s)\,ds\Big] + f_1(t) = \\ = -A_1^{1/2}\Big[(I_1 - T_1)A_1^{1/2}u_1 + A_1^{-1/2}SA_2^{-1/2}(A_2^{1/2}u_2) + \\ + \sum_{l=1}^{m_1}\frac{1}{\sqrt{b_{1l}}}(C_{1l}A_1^{-1/2})^*\int_0^t e^{-b_{1l}(t-s)}\frac{1}{\sqrt{b_{1l}}}(C_{1l}A_1^{-1/2})A_1^{1/2}u_1'(s)\,ds + \\ + \sum_{l=1}^{m_1}e^{-b_{1l}t}\frac{1}{b_{1l}}(C_{1l}A_1^{-1/2})^*(C_{1l}A_1^{-1/2})A_1^{1/2}u_1^0\Big] + f_1(t), \quad (21)$$

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} = -A_2^{1/2}\Big[A_2^{-1/2}S^*u_1 + A_2^{1/2}u_2 - \\ - \sum_{l=1}^{m_2}(C_{2l}A_2^{-1/2})^*\int_0^t e^{-b_{2l}(t-s)}(C_{2l}A_2^{-1/2})A_2^{1/2}u_2(s)\,ds\Big] + f_2(t) = \\ = -A_2^{1/2}\Big[A_2^{-1/2}S^*A_1^{-1/2}(A_1^{1/2}u_1) + (I_2 - T_2)A_2^{1/2}u_2 + \\ + \sum_{l=1}^{m_2}\frac{1}{\sqrt{b_{2l}}}(C_{2l}A_2^{-1/2})^*\int_0^t e^{-b_{2l}(t-s)}\frac{1}{\sqrt{b_{2l}}}(C_{2l}A_2^{-1/2})A_2^{1/2}u_2'(s)\,ds + \\ + \sum_{l=1}^{m_2}e^{-b_{2l}t}\frac{1}{b_{2l}}(C_{2l}A_2^{-1/2})^*(C_{2l}A_2^{-1/2})A_2^{1/2}u_2^0\Big] + f_2(t). \quad (22)$$

Уравнения (21), (22) вместе с начальными данными можно записать в виде следующей задачи Коши в гильбертовом пространстве $\mathrm{H} = H_1 \oplus H_2$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\mathrm{A}^{1/2}\Big[\mathrm{Q}_0^*\mathrm{Q}_0\mathrm{A}^{1/2}u + \sum_{l=1}^{m}\mathrm{Q}_l^*\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}u'(s)\,ds + \\ + \sum_{l=1}^{m}e^{-b_lt}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}u^0\Big] + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \quad (23)$$

Здесь введены следующие обозначения (оператор $\mathrm{Q}_0^*\mathrm{Q}_0$ введен в (6)):

$$\begin{aligned}
&u(t) := \big(u_1(t); u_2(t)\big)^\tau, \quad u^0 := \big(u_1^0; u_2^0\big)^\tau, \quad u^1 := \big(u_1^1; u_2^1\big)^\tau,\\
&f(t) := \big(f_1(t); f_2(t)\big)^\tau, \quad m := m_1 + m_2,\\
&\mathrm{A} := \operatorname{diag}\big(A_1, A_2\big), \quad \mathcal{D}(\mathrm{A}) = \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_2),\\
&\mathrm{Q}_l := \big(b_{1l}^{-1/2}(C_{1l}A_1^{-1/2}), 0\big), \quad b_l := b_{1l}, \quad l = \overline{1, m_1},\\
&\mathrm{Q}_l := \big(0, b_{2l}^{-1/2}(C_{2l}A_2^{-1/2})\big), \quad b_l := b_{2l}, \quad l = \overline{m_1 + 1, m_1 + m_2}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Не ограничивая общности можно считать, что в (23) числа b_l упорядочены по возрастанию — этого всегда можно добиться перестановкой слагаемых в уравнении с последующим введением новых обозначений.

Таким образом, если задача (3) имеет сильное решение $u_1(t)$, $u_2(t)$ (в смысле определения 1) и $u_r^0 \in \mathcal{D}(A_r^{1/2})$ $(r = 1, 2)$, то функция $u(t) = \big(u_1(t); u_2(t)\big)^\tau$ такое решение задачи Коши (23), что $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathrm{H})$, $\mathrm{A}u(t)$, $\mathrm{A}^{1/2}u'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathrm{H})$ и $u^0 \in \mathcal{D}(\mathrm{A}^{1/2})$. Верно и обратное.

2. Сведем задачу Коши (23) к системе дифференциальных уравнений и начальных условий, которые будем трактовать как задачу Коши для дифференциально операторного уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве.

Введем по $u(t)$ следующие функции:

$$\begin{aligned}
&v(t) := u'(t), \quad v_0(t) := \mathrm{Q}_0\mathrm{A}^{1/2}u(t),\\
&v_l(t) := \int_0^t e^{-b_l(t-s)}\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}u'(s)\,ds \quad (l = \overline{1, m}),
\end{aligned} \tag{25}$$

тогда $v(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathrm{H})$, $v_l(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}_l)$ $(l = \overline{0, m},\ \mathrm{H}_0 := \mathrm{H})$. Из (23) и (25) получим систему уравнений и начальных условий:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dv}{dt} = -\mathrm{A}^{1/2}\Big[\mathrm{Q}_0^*v_0 + \sum_{l=1}^m \mathrm{Q}_l^*v_l + \sum_{l=1}^m e^{-b_lt}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}u^0\Big] + f(t),\\
&\frac{dv_0}{dt} = -\Big[-\mathrm{Q}_0\mathrm{A}^{1/2}v\Big],\\
&\frac{dv_l}{dt} = -\Big[-\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}v + b_lv_l\Big], \quad l = \overline{1, m},\\
&v(0) = u^1, \quad v_0(0) = \mathrm{Q}_0\mathrm{A}^{1/2}u^0, \quad v_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, m}).
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

Эту систему запишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathrm{H} \oplus (\oplus_{l=0}^m \mathrm{H}_l)$:

$$\begin{gathered}
\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\big(\xi + \xi_{u^0}(t)\big) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \\
\xi(t) := \big(v(t); w(t)\big)^\tau := \big(v(t); \big(v_0(t); v_1(t); \ldots; v_m(t)\big)^\tau\big)^\tau,\\
\xi_{u^0}(t) := \big(0; (\mathrm{Q}_0^*)^{-1}\sum_{l=1}^m e^{-b_lt}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}u^0; 0; \ldots; 0\big)^\tau,\\
\xi^0 := \big(u^1; \mathrm{Q}_0\mathrm{A}^{1/2}u^0; 0; \ldots; 0\big)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := \big(f(t); 0; 0; \ldots; 0\big)^\tau.
\end{gathered} \tag{27}$$

Оператор $\mathcal{A}$ определяется по формулам (8)-(9):

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}\big(\mathrm{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}\big(\mathrm{A}^{1/2}, \mathcal{I}\big) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{A}^{1/2}\mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q}\mathrm{A}^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{Q} := \big(\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1\mathrm{I}, \ldots, b_m\mathrm{I}\big), \quad \mathcal{I} := \operatorname{diag}\big(\mathrm{I}, \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{I}\big),$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{\xi = (v; w)^\tau \in \mathcal{H} \big|\ v \in \mathcal{D}(\mathrm{A}^{1/2}),\ \ \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(\mathrm{A}^{1/2})\Big\}.$$

Из (6) следует, что $\mathrm{Q}_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0, \mathrm{H})$. Из (24) и (5) найдем, что

$$\sum_{l=1}^{m} \mathrm{Q}_l^* \mathrm{Q}_l =$$
$$= \operatorname{diag}\Big(\sum_{l=1}^{m_1} \frac{1}{b_{1l}} (C_{1l}A_1^{-1/2})^*(C_{1l}A_1^{-1/2}), \sum_{l=1}^{m_2} \frac{1}{b_{2l}} (C_{2l}A_2^{-1/2})^*(C_{2l}A_2^{-1/2})\Big) =$$
$$= \operatorname{diag}\big(T_1, T_2\big) \gg 0.$$

Отсюда и из теоремы 2 следует, что оператор $-\mathcal{A}$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0-полугруппы.

Осуществим в задаче (27) замену $\zeta(t) := \xi(t) + \xi_{u^0}(t)$. Получим задачу

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \xi'_{u^0}(t) + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0 := \big(u^1; (\mathrm{Q}_0^*)^{-1}\mathrm{A}^{1/2}u^0; 0; \ldots; 0\big)^\tau. \qquad (28)$$

Из условий на начальные данные следует, что $v(0) = u^1 \in \mathcal{D}(\mathrm{A}^{1/2})$, $\mathcal{Q}^* w(0) = \mathrm{Q}_0^*((\mathrm{Q}_0^*)^{-1}\mathrm{A}^{1/2}u^0) = \mathrm{A}^{-1/2}(\mathrm{A}u^0) \in \mathcal{D}(\mathrm{A}^{1/2})$, то есть $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Из условия на функцию $f(t)$ следует, что $\xi'_{u^0}(t) + \mathcal{F}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Из теоремы [29, гл. 1, § 6, теорема 6.5] о разрешимости абстрактной задачи Коши следует, что задача Коши (28) имеет единственное решение $\zeta(t)$ такое, что $\zeta(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\zeta(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\zeta(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$.

3. Построим по решению задачи (28) (или (27)) решение задачи (23).

Построим (единственное) решение задачи (27) $\xi(t) := \zeta(t) - \xi_{u^0}(t) = \big(v(t); v_0(t); v_1(t); \ldots; v_m(t)\big)^\tau$. Тогда имеют место включения

$$\xi(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}),\ \ \mathrm{A}^{1/2}v(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}),$$
$$\mathrm{A}^{1/2}\Big[\mathrm{Q}_0^* v_0(t) + \sum_{l=1}^{m} e^{-b_l t}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l \mathrm{A}^{1/2}u^0 + \sum_{l=1}^{m} \mathrm{Q}_l^* v_l(t)\Big] \in C(\mathbb{R}_+; \mathrm{H})$$

и выполнены уравнения системы (26).

Определим функцию $u(t) := \mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{Q}_0^{-1}v_0(t) = \big(u_1(t); u_2(t)\big)^\tau$. Покажем, что $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathrm{H})$, $\mathrm{A}^{1/2}u'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathrm{H})$, $\mathrm{A}u(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathrm{H})$, функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению и начальным условиям из (23). То есть $u_1(t)$, $u_2(t)$ — сильное решение (в смысле определения 1) системы (3). Действительно, из (26), (27) следует, что

$$u(0) = \mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{Q}_0^{-1}v_0(0) = \mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{Q}_0^{-1}(\mathrm{Q}_0\mathrm{A}^{1/2}u^0) = u^0,$$
$$u'(0) = \mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{Q}_0^{-1}v'_0(0) = \mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{Q}_0^{-1}(\mathrm{Q}_0\mathrm{A}^{1/2}v(0)) = v(0) = u^1$$

— начальные условия выполнены. Далее,

$$u'(t) = \mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{Q}_0^{-1}v'_0(t) = v(t), \quad u''(t) = v'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}),$$
$$\mathrm{A}^{1/2}u'(t) = \mathrm{A}^{1/2}v(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathrm{H}).$$

Из (26) следует, что уравнение из (23) выполнено и остается доказать, что $\mathrm{A}u(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathrm{H})$. Воспользовавшись тем, что $(\mathrm{A}^{1/2}u(t))' = \mathrm{A}^{1/2}u'(t)$ (см. [29, гл. 3, § 1, п. 1]), из системы (26) найдем

$$v_0(t) = \mathrm{Q}_0\mathrm{A}^{1/2}u(t), \tag{29}$$
$$v_l(t) = \mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}u(t) - e^{-b_l t}\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}u^0 - \int_0^t e^{-b_l(t-s)}b_l\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}u(s)\,ds \quad (l = \overline{1,m}).$$

Из первого уравнения системы (26) и из (29) теперь найдем, что

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2} = -\mathrm{A}^{1/2}\Big[\mathrm{Q}_0^*\mathrm{Q}_0\mathrm{A}^{1/2}u + \sum_{l=1}^m \mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}u- \\ - \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)}b_l\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}u(s)\,ds\Big] + f(t) = \\ = -\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}\Big[u - \int_0^t \Big\{\sum_{l=1}^m e^{-b_l(t-s)}b_l\mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}\Big\}u(s)\,ds\Big] + f(t),\end{aligned} \tag{30}$$

где $\mathrm{B} := \mathrm{Q}_0^*\mathrm{Q}_0 + \sum_{l=1}^m \mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l$. Приведем здесь основные свойства оператора B. Из (4)-(6), очевидно, следует, что $\mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ и

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} I_1 & S_{12} \\ S_{21} & I_2 \end{pmatrix} \gg 0, \quad S_{12} := A_1^{-1/2}SA_2^{-1/2}, \quad S_{21} := A_2^{-1/2}S^*A_1^{-1/2}.$$

Можно непосредственно проверить, что $\mathcal{D}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}) = \mathcal{D}(\mathrm{A})$. Из факторизации оператора B в форме Шура-Фробениуса можно найти, что

$$\begin{aligned}\mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{diag}\big(A_1^{-1/2}, A_2^{-1/2}\big) = \begin{pmatrix} I_1 + S_{12}D_2S_{21} & -S_{12}D_2 \\ -D_2S_{21} & D_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} A_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 + SA_2^{-1/2}D_2S_{21}A_1^{-1/2} & -SA_2^{-1/2}D_2A_2^{-1/2} \\ -D_2S_{21}A_1^{-1/2} & D_2A_2^{-1/2} \end{pmatrix}, \\ D_2 := (I_2 - S_{21}S_{12})^{-1},\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{diag}\big(A_1^{-1/2}, A_2^{-1/2}\big) = \begin{pmatrix} D_1 & -D_1S_{12} \\ -S_{21}D_1 & I_2 + S_{21}D_1S_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1A_1^{-1/2} & -D_1S_{12}A_2^{-1/2} \\ -S^*A_1^{-1/2}D_1A_1^{-1/2} & I_2 + S^*A_1^{-1/2}D_1S_{12}A_2^{-1/2} \end{pmatrix}, \\ D_1 := (I_1 - S_{12}S_{21})^{-1}.\end{aligned} \tag{32}$$

Теперь из (30) получим, что

$$\begin{aligned}u(t) - \int_0^t \Big\{\sum_{l=1}^m e^{-b_l(t-s)}b_l\mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}\Big\}u(s)\,ds =: g(t), \\ \mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}g(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathrm{H}).\end{aligned} \tag{33}$$

Введем на $\mathcal{D}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2})$ норму $\|\cdot\|_{\mathrm{H}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2})} := \|\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}\cdot\|_{\mathrm{H}}$, эквивалентную норме графика оператора $\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}$. Полученное банахово пространство обозначим через $\mathrm{H}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2})$. Соотношение (33) будем рассматривать как уравнение Вольтерра в банаховом пространстве $\mathrm{H}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2})$.

Из (24) при $l=\overline{1,m_1}$ и (31) найдем, что

$$\begin{aligned}
&\|b_l\mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}u\|_{\mathrm{H}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2})} = \|b_l\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1/2}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}u)\|_{\mathrm{H}} = \\
&= \Big\|b_l^{1/2}\mathrm{A}^{1/2}\big(b_{1l}^{-1/2}(C_{1l}A_1^{-1/2})^*\big|_{\mathcal{D}(C_{1l}^*)},0\big)^\tau\cdot\big(b_{1l}^{-1/2}C_{1l}A_1^{-1},0\big)\times \\
&\qquad\times\begin{pmatrix} I_2+SA_2^{-1/2}D_2S_{21}A_1^{-1/2} & -SA_2^{-1/2}D_2A_2^{-1/2}\\ -D_2S_{21}A_1^{-1/2} & D_2A_2^{-1/2}\end{pmatrix}\cdot(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}u)\Big\|_{\mathrm{H}}\leqslant \\
&\leqslant\left\|\operatorname{diag}\big(C_{1l}^*C_{1l}A_1^{-1},0\big)\cdot\begin{pmatrix} I_2+SA_2^{-1/2}D_2S_{21}A_1^{-1/2} & -SA_2^{-1/2}D_2A_2^{-1/2}\\ -D_2S_{21}A_1^{-1/2} & D_2A_2^{-1/2}\end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}\times \\
&\qquad\times\|u\|_{\mathrm{H}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2})}\quad\forall\, u\in\mathrm{H}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}).
\end{aligned}$$

Из (24) при $l=\overline{m_1+1,m_1+m_2}$ и (32) найдем, что

$$\begin{aligned}
&\|b_l\mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\mathrm{A}^{1/2}u\|_{\mathrm{H}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2})} = \|b_l\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1/2}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}u)\|_{\mathrm{H}} = \\
&= \Big\|b_l^{1/2}\mathrm{A}^{1/2}\big(0,b_{2l}^{-1/2}(C_{2l}A_2^{-1/2})^*\big|_{\mathcal{D}(C_{2l}^*)}\big)^\tau\cdot\big(0,b_{2l}^{-1/2}C_{2l}A_2^{-1}\big)\times \\
&\qquad\times\begin{pmatrix} D_1A_1^{-1/2} & -D_1S_{12}A_2^{-1/2}\\ -S^*A_1^{-1/2}D_1A_1^{-1/2} & I_2+S^*A_1^{-1/2}D_1S_{12}A_2^{-1/2}\end{pmatrix}\cdot(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}u)\Big\|_{\mathrm{H}}\leqslant \\
&\leqslant\left\|\operatorname{diag}\big(0,C_{2l}^*C_{2l}A_2^{-1}\big)\cdot\begin{pmatrix} D_1A_1^{-1/2} & -D_1S_{12}A_2^{-1/2}\\ -S^*A_1^{-1/2}D_1A_1^{-1/2} & I_2+S^*A_1^{-1/2}D_1S_{12}A_2^{-1/2}\end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}\times \\
&\qquad\times\|u\|_{\mathrm{H}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2})}\quad\forall\, u\in\mathrm{H}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}).
\end{aligned}$$

Из проведенных оценок следует, что ядро интегрального уравнения (33) есть непрерывная оператор-функция со значениями в $\mathcal{L}(\mathrm{H}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}))$. Следовательно, уравнение (33) имеет (единственное) решение $u(t)\in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(\mathrm{A})) = C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(\mathrm{A}^{1/2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{1/2}))$, то есть $\mathrm{A}u(t)\in C(\mathbb{R}_+;\mathrm{H})$.

4. Докажем неравенство (7).

Пусть $f_r(t)=g_r(t)+\sum_{k=0}^{n_r}e^{-i\sigma_{rk}t}f_{rk}(t)$, где $g_r(t)$, $f_{rk}(t)\in C^1(\mathbb{R}_+;H_r)$, $\sigma_{rk}\in\mathbb{R}$ $(r=1,2,\ k=\overline{0,n_r})$ (напомним, что $\sigma_{r0}=0$, $\sigma_{rk}\neq 0$ $(k=\overline{1,n_r})$). Представим функцию $\mathcal{F}(t)$ из (27), (28) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(t)=\mathcal{T}(t)+\sum_{k=0}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t),\quad \mathcal{T}(t):=\big(g(t);0;0;\dots;0\big)^\tau \\
&\mathcal{F}_k(t):=\big(f_k(t);0;0;\dots;0\big)^\tau\ \ (k=\overline{0,n_1+n_2}),
\end{aligned}\tag{34}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
&g(t):=\big(g_1(t);g_2(t)\big)^\tau,\quad f_0(t):=\big(f_{10}(t);f_{20}(t)\big)^\tau,\quad n:=n_1+n_2,\\
&f_k(t):=\big(f_{1k}(t);0\big)^\tau,\qquad \sigma_k:=\sigma_{1k},\quad k=\overline{1,n_1},\\
&f_k(t):=\big(0;f_{2k}(t)\big)^\tau,\qquad \sigma_k:=\sigma_{2k},\quad k=\overline{n_1+1,n_1+n_2}.
\end{aligned}\tag{35}$$

Из формулы для $\mathcal{A}^{-1}$ и (19) найдем, что

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t) = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0(t) = \bigl(0; (\mathrm{Q}_0^*)^{-1}\mathrm{A}^{-1/2}f_0(t); 0; \ldots; 0\bigr)^\tau,\\
&\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) = \bigl(\mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t); \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}\mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t)\bigr)^\tau =\\
&= \bigl(\mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t); \frac{1}{-\lambda}\mathrm{Q}_0\mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t); \frac{1}{b_1-\lambda}\mathrm{Q}_1\mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t);\\
&\qquad \ldots; \frac{1}{b_m-\lambda}\mathrm{Q}_m\mathrm{L}^{-1}(\lambda)\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t)\bigr)^\tau \quad \forall\,\lambda\in i\mathbb{R}\backslash\{0\},\ \ k=\overline{1,n}. \qquad (36)
\end{aligned}$$

Из представления $\mathrm{Q}_0^*\mathrm{Q}_0 = \mathrm{B} - \sum_{l=1}^m \mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l$, из (24), (35) получим после простых вычислений, что при всех $t\in\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
&\left\|\operatorname{diag}\bigl(A_1^{1/2}, A_2^{1/2}\bigr)\left[\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix} - \sum_{r=1}^{2}\sum_{k=0}^{n_r} e^{-i\sigma_{rk}t}\mathbf{M}(i\sigma_{rk})\begin{pmatrix}\delta_{r1}f_{rk}(t)\\ \delta_{r2}f_{rk}(t)\end{pmatrix}\right]\right\|_{\mathrm{H}}^2 +\\
&\qquad + \left\|\begin{pmatrix}u_1'(t)\\ u_2'(t)\end{pmatrix} + \sum_{r=1}^{2}\sum_{k=1}^{n_r} e^{-i\sigma_{rk}t}i\sigma_{rk}\mathbf{M}(i\sigma_{rk})\begin{pmatrix}\delta_{r1}f_{rk}(t)\\ \delta_{r2}f_{rk}(t)\end{pmatrix}\right\|_{\mathrm{H}}^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Bigl\|\mathrm{A}^{1/2}\Bigl(u(t) - \mathbf{M}(0)f_0(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)f_k(t)\Bigr)\Bigr\|_{\mathrm{H}}^2 +\\
&\qquad + \Bigl\|u'(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}i\sigma_k\mathbf{M}(i\sigma_k)f_k(t)\Bigr\|_{\mathrm{H}}^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Bigl\|u'(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}i\sigma_k\mathrm{A}^{-1/2}\Bigl[\mathrm{B} - \sigma_k^2\mathrm{A}^{-1} - \sum_{l=1}^{m}\frac{b_l}{b_l - i\sigma_k}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\Bigr]^{-1}\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t)\Bigr\|_{\mathrm{H}}^2 +\\
&\quad + \Bigl\|\mathrm{A}^{1/2}\Bigl(u(t) - \mathrm{A}^{-1/2}\Bigl[\mathrm{B} - \sum_{l=1}^{m}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\Bigr]^{-1}\mathrm{A}^{-1/2}f_0(t) -\\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathrm{A}^{-1/2}\Bigl[\mathrm{B} - \sigma_k^2\mathrm{A}^{-1} - \sum_{l=1}^{m}\frac{b_l}{b_l - i\sigma_k}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\Bigr]^{-1}\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t)\Bigr)\Bigr\|_{\mathrm{H}}^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Bigl\|u'(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathrm{A}^{-1/2}\Bigl[-i\sigma_k\mathrm{A}^{-1} +\\
&\qquad + \frac{1}{-i\sigma_k}\mathrm{Q}_0^*\mathrm{Q}_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l - i\sigma_k}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\Bigr]^{-1}\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t)\Bigr\|_{\mathrm{H}}^2 +\\
&+ \Bigl\|\mathrm{A}^{1/2}\Bigl(u(t) - \mathrm{A}^{-1/2}(\mathrm{Q}_0^*\mathrm{Q}_0)^{-1}\mathrm{A}^{-1/2}f_0(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\frac{1}{-i\sigma_k}\mathrm{A}^{-1/2}\Bigl[-i\sigma_k\mathrm{A}^{-1} +\\
&\qquad + \frac{1}{-i\sigma_k}\mathrm{Q}_0^*\mathrm{Q}_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l - i\sigma_k}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\Bigr]^{-1}\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t)\Bigr)\Bigr\|_{\mathrm{H}}^2.
\end{aligned}$$

Отсюда, из (19), (25), (36) следует, что

$$\left\|\operatorname{diag}\bigl(A_1^{1/2}, A_2^{1/2}\bigr)\left[\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix} - \sum_{r=1}^{2}\sum_{k=0}^{n_r} e^{-i\sigma_{rk}t}\mathbf{M}(i\sigma_{rk})\begin{pmatrix}\delta_{r1}f_{rk}(t)\\\delta_{r2}f_{rk}(t)\end{pmatrix}\right]\right\|_{\mathrm{H}}^2 + \\ + \left\|\begin{pmatrix}u_1'(t)\\u_2'(t)\end{pmatrix} + \sum_{r=1}^{2}\sum_{k=1}^{n_r} e^{-i\sigma_{rk}t} i\sigma_{rk}\mathbf{M}(i\sigma_{rk})\begin{pmatrix}\delta_{r1}f_{rk}(t)\\\delta_{r2}f_{rk}(t)\end{pmatrix}\right\|_{\mathrm{H}}^2 =$$

$$= \left\|u'(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{L}^{-1}(i\sigma_k)\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t)\right\|_{\mathrm{H}}^2 + \\ + \left\|\mathrm{Q}_0^{-1}\Bigl(\mathrm{Q}_0\mathrm{A}^{1/2}u(t) - (\mathrm{Q}_0^*)^{-1}\mathrm{A}^{-1/2}f_0(t) - \\ - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\frac{1}{-i\sigma_k}\mathrm{Q}_0\mathrm{L}^{-1}(i\sigma_k)\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t)\Bigr)\right\|_{\mathrm{H}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\|v(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathrm{A}^{-1/2}\mathrm{L}^{-1}(i\sigma_k)\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t)\right\|_{\mathrm{H}}^2 + \\ + \|\mathrm{Q}_0^{-1}\|^2\left\|v_0(t) - (\mathrm{Q}_0^*)^{-1}\mathrm{A}^{-1/2}f_0(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\frac{1}{-i\sigma_k}\mathrm{Q}_0\mathrm{L}^{-1}(i\sigma_k)\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t)\right\|_{\mathrm{H}}^2 + \\ + \sum_{l=1}^{m}\left\|v_l(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\frac{1}{b_l - i\sigma_k}\mathrm{Q}_l\mathrm{L}^{-1}(i\sigma_k)\mathrm{A}^{-1/2}f_k(t)\right\|_{\mathrm{H}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max\{1, \|\mathrm{Q}_0^{-1}\|^2\}\cdot\left\|\xi(t) - \mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\right\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{37}$$

Напомним, что по теореме 2 оператор $-\mathcal{A}$ — генератор равномерно экспоненциально устойчивой C_0-полугруппы $\mathcal{U}(t)$, удовлетворяющей неравенству (11). Будем искать (единственное) решение задачи (28) при $\mathcal{F}(t) = \mathcal{T}(t) + \mathcal{F}_0(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t)$ в виде $\zeta(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) + \eta(t)$. Тогда функция $\eta(t)$ будет решением задачи

$$\begin{gathered}\frac{d\eta}{dt} = -\mathcal{A}\eta + \xi_{u^0}'(t) + \mathcal{T}(t) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(t),\\ \eta(0) = \zeta^0 - \sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).\end{gathered} \tag{38}$$

Из (38) и $\xi(t) = \zeta(t) - \xi_{u^0}(t)$ найдем, что

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) - \xi_{u^0}(t) + \mathcal{U}(t)\Bigl(\zeta^0 - \sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\Bigr) + \\ + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\Bigl(\xi_{u^0}'(s) + \mathcal{T}(s) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k s}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(s)\Bigr)\,ds. \tag{39}$$

Из (39), (34) и (11) найдем, что

$$\Big\|\xi(t)-\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t)-\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|_{\mathcal{H}}^2=$$
$$=\Big\|\mathcal{U}(t)\Big(\zeta^0-\sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\Big)-\xi_{u^0}(t)+$$
$$+\int_0^t\mathcal{U}(t-s)\Big(\xi_{u^0}'(s)+\mathcal{T}(s)-\sum_{k=0}^{n}e^{-i\sigma_k s}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k'(s)\Big)\,ds\Big\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant$$
$$\leqslant\Big[Me^{-\omega t}\Big(\|\zeta^0\|_{\mathcal{H}}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^{n}\|f_k(0)\|_{\mathrm{H}}\Big)+\big\|\xi_{u^0}(t)\big\|_{\mathcal{H}}+$$
$$+M\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|\xi_{u^0}'(s)\|_{\mathcal{H}}+\|g(s)\|_{\mathrm{H}}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^{n}\|f_k'(s)\|_{\mathrm{H}}\Big)\,ds\Big]^2. \tag{40}$$

Используя формулы для $\xi_{u^0}(t)$ и ζ^0 (см. (27), (28)), из (40) найдем

$$\Big\|\xi(t)-\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t)-\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant$$
$$\leqslant\Big[Me^{-\omega t}\Big(\|u^1\|_{\mathrm{H}}^2+\|(\mathrm{Q}_0^*)^{-1}\|^2\|\mathrm{A}^{1/2}u^0\|_{\mathrm{H}}^2\Big)^{1/2}+$$
$$+Me^{-\omega t}\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^{n}\|f_k(0)\|_{\mathrm{H}}+$$
$$+Me^{-\omega t}\|\mathrm{A}^{1/2}u^0\|_{\mathrm{H}}\sum_{l=1}^{m}\|(\mathrm{Q}_0^*)^{-1}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\|\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\Big\{\frac{1}{M}e^{-(b_l-\omega)t}+\int_0^t b_l e^{-(b_l-\omega)s}\,ds\Big\}+$$
$$+M\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|g(s)\|_{\mathrm{H}}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^{n}\|f_k'(s)\|_{\mathrm{H}}\Big)\,ds\Big]^2\leqslant$$
$$\leqslant Ne^{-2\omega t}\Big(\|\mathrm{A}^{1/2}u^0\|_{\mathrm{H}}^2+\|u^1\|_{\mathrm{H}}^2+\sum_{k=0}^{n}\|f_k(0)\|_{\mathrm{H}}^2\Big)+$$
$$+(n+4)M^2\Big[\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big(\|g(s)\|_{\mathrm{H}}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=0}^{n}\|f_k'(s)\|_{\mathrm{H}}\Big)\,ds\Big]^2, \tag{41}$$

$$N:=(n+4)M^2\max\Big\{1,\|(\mathrm{Q}_0^*)^{-1}\|^2+\sum_{l=1}^{m}\|(\mathrm{Q}_0^*)^{-1}\mathrm{Q}_l^*\mathrm{Q}_l\|\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\Big\{\frac{1}{M}e^{-(b_l-\omega)t}+$$
$$+\int_0^t b_l e^{-(b_l-\omega)s}\,ds\Big\},\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2\Big\}. \tag{42}$$

Из (37), (41), (42) и (35) следует неравенство (7) константами

$$M_1=N\max\{1,\|\mathrm{Q}_0^{-1}\|^2\},$$
$$M_2=(n+4)M^2\max\big\{1,\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2\big\}\cdot\max\{1,\|\mathrm{Q}_0^{-1}\|^2\}.$$

5. Пусть $\|g(t)\|_{\mathrm{H}} \to 0$, $\|f_k'(t)\|_{\mathrm{H}} \to 0$ $(k = \overline{0,n})$ при $t \to +\infty$. Достаточно доказать, что интегральное слагаемое в (7) стремится к нулю при $t \to +\infty$. Обозначим $h(t) := \|g(t)\|_{\mathrm{H}} + \sum_{k=0}^{n} \|f_k'(t)\|_{\mathrm{H}}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем последовательно числа $t_{\varepsilon,1}$ и $t_{\varepsilon,2}$ следующим образом:

$$t_{\varepsilon,1} > 0: \sup_{t\geqslant t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon\omega}{2}, \qquad t_{\varepsilon,2} := \frac{1}{\omega}\ln\Big[\frac{2}{\varepsilon\omega}\big(e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1\big)\sup_{t\geqslant 0} h(t)\Big].$$

Теперь для любого $t \geqslant t(\varepsilon) := \max\{t_{\varepsilon,1}, t_{\varepsilon,2}\}$ найдем, что

$$\int_0^t e^{-\omega(t-s)}h(s)\,ds = \int_0^{t_{\varepsilon,1}} e^{-\omega(t-s)}h(s)\,ds + \int_{t_{\varepsilon,1}}^t e^{-\omega(t-s)}h(s)\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{e^{-\omega t}}{\omega}\big(e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1\big)\sup_{t\geqslant 0} h(t) + \frac{1}{\omega}\sup_{t\geqslant t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема 1 доказана.

References

[1] A.A. Ilushin, B.E. Pobedria, *Basic Mathematical Theory of Thermo-Viscoelasticity*, Moscow: Nauka, 1970. (Russian)

[2] M. Fabrizio, A. Morro, *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*, SIAM Studies in Applied Mathematics;**12**, Philadelphia, 1992. MR1153021

[3] G. Amedola, M. Fabrizio, J.M. Golden, *Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications*, New York-Dordrecht-Heidelberg-London: Springer, 2012. MR2856615

[4] Z. Liu, S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, CHAPMAN & HALL/CRC Research Notes in Mathematics Series, **398**, Boca Raton-London-New York-Washington, 1999. MR1681343

[5] V.V. Vlasov, N.A. Rautian, *Spectral Analysis of Functional Differential Equations*, Moscow: MAKS Press, 2016. (Russian)

[6] C.M. Dafermos, *Asymptotic stability in viscoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **37** (1970), 297–308. MR0281400

[7] C.M. Dafermos, *On abstract Volterra equations with applications to linear viscoelasticity*, J. Differential Equations, **7** (1970), 554–569. MR0259670

[8] W.A. Day, *The decay of the energy in a viscoelastic body*, Mathematika, **27**:2 (1980), 268–286. MR0610712

[9] M. Fabrizio, B. Lazzari, *On the existence and the asyptotic stability of solutions for linearly viscoelastic solids*, Arch. Rational Mech. Anal., **116**:2 (1991), 139–152. MR1143437

[10] J.E. Muñoz Rivera, *Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity*, Quarterly Appl. Math., **52**:4 (1994), 629–648. MR1306041

[11] F. Alabau-Boussouria, J. Prüss, R. Zacher, *Exponential and polynomial stability of a wave equation for boundary memory damping with singular kernels*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **347**:5–6 (2009), 277–282. MR2537536

[12] Z. Liu, S. Zheng, *On the exponential stability of linear viscoelasticity and thermoviscoelasticity*, Quarterly Appl. Math., **54**:1 (1996), 21-31. MR1373836

[13] B.W. Liu, *The exponential stabilization of the higher-dimensional linear system of thermoviscoelasticity*, J. Math. Pures Appl., **77**:4 (1998), 355–386. MR1623383

[14] M. Fabrizio, B. Lazzari, J.E. Muñoz Rivera, *Asymptotic behaviour of a thermoelastic plate of weakly hyperbolic type*, Differential and Integral Equations, **13**:10–12 (2000), 1347–1370. MR1787071

[15] W. Desch, R.K. Miller, *Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space*, Journal of Differential Equations, **70** (1987), 366–389. Zbl 0635.45029

[16] W. Desch, R.K. Miller, *Exponential stabilization of Volterra integral equations with singular kernels*, Journal of Integral Equations and Applications, **1**:3 (1988), 397–433. MR1003703

[17] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J.E. Muñoz Rivera, R. Racke, *Energy decay for Timoshenko systems of memory type*, Journal of Differential Equations, **194**:1 (2003), 82–115. MR2001030

[18] J.E. Muñoz Rivera, H.D. Fernández Sare, *Stability of Timoshenko systems with past history*, J. Math. Anal. Appl., **339**:1 (2008), 482–502. MR2370668

[19] Z. Ma, L. Zhang, X. Yang, *Exponential stability for a Timoshenko-type system with history*, J. Math. Anal. Appl., **380**:1 (2011), 299–312. MR2786202

[20] S.A. Messaoudi, T.A. Apalara, *General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III*, Arab J. Math. Sci., **20**:2 (2014), 213–232. MR3227420

[21] J.A.D. Appleby, M. Fabrizio, B. Lazzari, D.W. Reynolds, *On exponential asymptotic stability in linear viscoelasticity*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **16**:10 (2006), 1677–1694. MR2264556

[22] J.E. Muñoz Rivera, M.G. Naso, *On the dacay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation*, Asymptotic Analysis, **49**:3–4 (2006), 189–204. MR2270890

[23] V. Pata, *Exponential stability in linear viscoelasticity*, Quarterly Appl. Math., **64**:3 (2006), 499–513. MR2259051

[24] J.E. Muñoz Rivera, M.G. Naso, *Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory*, J. Math. Anal. Appl., **326** (2007), 691–707. MR2277813

[25] F. Alabau-Boussouria, P. Cannarsa, D. Sforza, *Decay estimates for second order evolution equations with memory*, Journal of Functional Analysis, **254** (2008), 1342–1372. MR2386941

[26] F. Alabau-Boussouria, P. Cannarsa, *A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. Partial Differential Equations/Optimal Control, **347**:15–16 (2009), 867–872. MR2542886

[27] P. Cannarsa, D. Sforza, *Integro-differential equations of hyperbolic type with positive definite kernels*, J. Differential Equations, **250** (2011), 4289–4335. MR2793256

[28] D.A. Zakora, *Exponential stability of a special semigroup and applications*, Mathematical Notes, **103**:5 (2018), 702–719. MR3795118

[29] S.G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space*, M.: Nauka, 1967. (Russian) MR0247239

[30] M.S. Birman, M.Z. Solomjak, *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space (Mathematics and its applications (Soviet series))*, Dordrecht-Boston-Lancaster-Tokyo: D. Reidel Publishing Company, 1987. MR1192782

[31] K-H. Förster, P. Jonas, H. Langer, *Operator Theory in Krein Spaces and Nonlinear Eigenvalue Problems — Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 162*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2006. Zbl 1086.47006

[32] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations (Graduate Texts in Math., Vol. 194)*, Berlin-Heildelberg-New York: Springer-Verlag, 2000. MR1721989

Dmitry Zakora
Crimean Federal University[1], Voronezh State University[2],
[1]Academican Vernadsky Ave., 4,
295007, Simferopol, Russia
[2] University Sq., 1,
394006, Voronezh, Russia
E-mail address: dmitry.zkr@gmail.com