S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 15, стр. 996–1010 (2018) УДК 517.5

DOI 10.17377/semi.2018.15.084 MSC 32A27

О ВЫЧИСЛИМОСТИ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ СУММОЙ ЛОКАЛЬНЫХ ВЫЧЕТОВ

Р.В. УЛЬВЕРТ

Abstract. We consider n-fold integrals of meromorphic differential n-forms on an n-dimensional complex manifold and study the problem of computability of such integrals by means of local (Grothendieck) residues of these forms. This problem is relevant in various fields of theoretical physics (in superstring theory for study of periods of Calabi–Yau manifolds, in particle physics for computation of anomalous magnetic moments of muons). The obtained theorems refine earlier results of A.K. Tsikh and A.P. Yuzhakov.

Keywords: local residue, local cycle, separating cycle.

Введение

Обсуждаемые здесь понятия и результаты связаны с выявлением топологических условий, при которых нахождение многомерного интеграла от мероморфной функции в комплексном аналитическом многообразии сводится к вычислению локальных вычетов.

Локальные вычеты (вычеты Гротендика) обобщают обычный вычет Коши функции одного переменного, и их вычисление, в наиболее важных для приложений случаях, является конструктивной процедурой, которую несложно реализовать с помощью символьных вычислений на компьютере.

Ulvert, R.V., On computability of multiple integrals by means of a sum of local residues.

Автор поддержан грантом министерства образования РФ (гос. задание для Сибирского федерального университета, № 1.2604.2017/пч).

Поступила 21 июля 2018 г., опубликована 11 сентября 2018 г.

Интегралы, выражаемые через локальные вычеты, появляются в различных прикладных задачах. В монографии [1] подробно обсуждается применение многомерных вычетов. В частности, дается решение задачи о вычислении ошибки квантования двумерных рекурсивных цифровых фильтров.

Для современной теоретической физики одним из важных классов интегралов являются кратные интегралы Меллина–Барнса. В [2], [3] такие интегралы изучаются с помощью локальных вычетов. Разработанные методы были применены в [4] для исследования периодов многообразий Калаби–Яу. Среди последних приложений в ядерной физике отметим статью [5], в которой интегралы Меллина–Барнса используются при вычислении аномальных магнитных моментов мюонов.

Еще одно направление исследований, в котором используются интегралы, выражающиеся через локальные вычеты, связано с изучением достаточных условийЁ алгебраичности интегралов, зависящих от параметра (см. [1]). Использование интегральных представлений, в свою очередь, позволило получить в [6], [7] условия алгебраичности для сумм кратных степенных рядов и их диагоналей. Как показано в [8], данные методы могут быть использованы в теории формальных языков и грамматик. Прежде чем сформулировать более конкретно изучаемые в данной работе задачи, обсудим некоторые важные для нас сведения о вычетах функций одного комплексного переменного.

1. Случай одного переменного

Для функции $f(z)$ одного комплексного переменного вычет Коши в изолированной особой точке p определяется интегралом

$$\operatorname{res}_p f(z) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\gamma^{(p)}} f(z)\,dz,$$

где предполагается, что функция $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности $U_p \setminus p$ точки p, и одномерный цикл интегрирования $\gamma^{(p)}$ в локальных координатах — это положительно ориентированная окружность с центром в точке p достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$:

$$\gamma^{(p)} = \{z \colon |z-p| = \varepsilon\}. \tag{1}$$

Будем называть цикл $\gamma^{(p)}$ *локальным* в точке p. По теореме Коши определение вычета не зависит от выбора локального цикла (от выбора локальных координат и радиуса ε).

Эквивалентное определение вычета Коши связано с разложением функции в ряд Лорана в проколотой окрестности изолированной особой точки: если

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-p)^n, \quad z \in U_p \setminus p,$$

то вычет определяется равенством $\operatorname{res}_p f(z) = c_{-1}$. При этом корректность такого определения обусловливается единственностью разложения функции в ряд Лорана в проколотой окрестности изолированной особой точки.

Рассмотрим задачу о вычислении интеграла

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz, \tag{2}$$

где $f(z)$ — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция с множеством полюсов F, и Γ — одномерный цикл в $\mathbb{C} \setminus F$ с компактным носителем. Целью является вычисление интеграла (2) с помощью вычетов.

Опишем одномерные гомологии пространства $\mathbb{C} \setminus F$. Множество F является дискретным (все его точки — изолированные), поэтому для каждой точки $p \in F$ определен класс $[\gamma^{(p)}]$ гомологичных локальных циклов, причем циклы, соответствующие разным особым точкам, гомологически независимы. Совокупность классов $[\gamma^{(p)}]$, $p \in F$, образует базу группы $H_1(\mathbb{C} \setminus F)$ одномерных компактных гомологий. Следовательно, любой одномерный цикл Γ в $\mathbb{C} \setminus F$ гомологичен целочисленной линейной комбинации локальных циклов:

$$\Gamma \sim \sum_{p \in F} n^{(p)} \gamma^{(p)}.$$

Возвращаясь к интегралу (2), получим

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \sum_{p \in F} n^{(p)} \int_{\gamma^{(p)}} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{p \in F} n^{(p)} \mathrm{res}_p\, f(z).$$

Таким образом, в случае комплексной плоскости с изолированной особой точкой связывается единственный гомологический класс локальных циклов (1), единственное разложение в ряд Лорана в достаточно малой проколотой окрестности этой точки, и, следовательно, единственный вычет. При этом любой интеграл (2) от мероморфной функции сводится к вычетам.

2. Многомерные «эталонные» локальные вычеты

Следуя [1], обсудим ряд особенностей, которые проявляются при попытке обобщения определения вычета Коши на случай функций многих переменных.

Рассмотрим в качестве примера рациональную функцию в $\mathbb{C}^2$ вида

$$g(z, w) = \frac{h(z, w)}{zw(z - w)}, \tag{3}$$

где $h(z, w)$ — полином. Множеством особых точек F (полярным множеством) в данном случае является объединение трех комплексных прямых (гиперплоскостей)

$$L_1 = \{z = 0\}, \quad L_2 = \{w = 0\}, \quad L_3 = \{z - w = 0\}.$$

Пусть U_0 — сколь угодно малая окрестность начала координат. В отличие от одномерной ситуации, функция $g(z, w)$ допускает два различных разложения в ряд Лорана в $U_0 \setminus F$:

$$g(z, w) = -\frac{h(z, w)}{zw^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k, \quad (z, w) \in U_1 = \{|w| > |z| > 0\}, \tag{4}$$

$$g(z, w) = \frac{h(z, w)}{z^2 w} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^k, \quad (z, w) \in U_2 = \{|z| > |w| > 0\}, \tag{5}$$

где функция $h(z, w)$ в обоих случаях представляется рядом

$$h(z, w) = \sum_{s,t=0}^{+\infty} \frac{1}{s!\, t!} \frac{\partial^{s+t} h}{\partial z^s \partial w^t}(0, 0)\, z^s w^t.$$

При этом нетрудно найти коэффициент $c_{(-1,-1)}$ при $z^{-1}w^{-1}$ в этих разложениях:

$$c_{(-1,-1)} = \begin{cases} -h'_w(0,0), & (z,w) \in U_1; \\ \ \ h'_z(0,0), & (z,w) \in U_2. \end{cases}$$

Двумерные циклы

$$\gamma_1 = \{|z| = \delta_1,\ |w| = \varepsilon_1 > \delta_1\},$$
$$\gamma_2 = \{|z| = \delta_2,\ |w| = \varepsilon_2 < \delta_2\},$$

при достаточно малых $\varepsilon_i, \delta_i > 0$ лежат в $U_0 \setminus F$ и не гомологичны друг другу. Вычислим интегралы от функции (3) по циклам γ_1 и γ_2. Для этого заметим, что ряды Лорана (4), (5) сходятся равномерно в областях U_1 и U_2 соответственно. Интегрируя почленно, и учитывая, что

$$\int\limits_{\substack{|z|=\delta \\ |w|=\varepsilon}} z^s w^t \, dz \wedge dw = \begin{cases} (2\pi i)^2, & s = t = -1; \\ \quad 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

получим

$$(2\pi i)^{-2} \int\limits_{\gamma_1} g(z,w)\, dz \wedge dw = c_{(-1,-1)} = -h'_w(0,0); \tag{6}$$

$$(2\pi i)^{-2} \int\limits_{\gamma_2} g(z,w)\, dz \wedge dw = c_{(-1,-1)} = h'_z(0,0). \tag{7}$$

В рассмотренном примере начало координат является точкой пересечения особых гиперплоскостей и играет роль изолированной особой точки в том смысле, что в окрестности U_0 не содержится других точек пересечения этих гиперплоскостей. Можно убедиться в том, что разложение функции $g(z,w)$ в ряд Лорана с центром в особой точке $p = (z_0, w_0)$, отличной от начала координат, то есть не связанной с пересечением особых гиперплоскостей, всегда будет иметь коэффициент $c_{(-1,-1)} = 0$. Кроме того, циклы вида

$$\gamma = \{|z - z_0| = \delta,\ |w - w_0| = \varepsilon\},$$

где $\varepsilon, \delta > 0$, лежащие в достаточно малой окрестности U_p точки p, будут гомологичны нулю в $U_p \setminus F$.

Другое наблюдение состоит в том, что в данном случае началу координат сопоставлены два разных вычета. Это связано с тем, что окрестность U_0 содержит две области U_1 и U_2, в которых разложения в ряд Лорана функции $g(z,w)$ оказываются различными. В этих областях имеются гомологически независимые циклы γ_1 и γ_2 соответственно.

Рассмотрим мероморфную форму ω в n-мерном комплексном аналитическом многообразии X, имеющую в локальных координатах вид

$$\omega = \frac{h(z)\, dz}{f_1(z) \dots f_n(z)}, \quad z = (z_1, \dots, z_n), \quad dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n.$$

Будем предполагать, что знаменатель определяет отображение

$$f = (f_1, \dots, f_n) \colon \overline{U}_p \to \mathbb{C}^n,$$

голоморфное в замыкании окрестности U_p точки p, являющейся изолированным нулем отображения f, и $h(z)$ голоморфна в $\overline{U}_p$. Пусть F — полярная гиперповерхность формы ω. При этом

$$F\,\big|_{U_p} = \{z \in U_p \colon f_1(z)\cdot\ldots\cdot f_n(z) = 0\}.$$

Рассмотрим *локальный цикл*

$$\gamma^{(p)} = \{z \in U_p \colon |f_i(z)| = \varepsilon_i,\ i = 1,\ldots,n\},$$

лежащий в $U_p \setminus F$ при достаточно малых $\varepsilon_i > 0$. Этот цикл является «трубкой» (сложной кограницей Лере) для 0-цикла p в $F_1 \cap \cdots \cap F_n$, где $F_i = \{z \in U_p \colon f_i(z) = 0\}$. Ориентация цикла $\gamma^{(p)}$ задается условием

$$d(\arg f_1) \wedge \cdots \wedge (\arg f_n) \geqslant 0.$$

В некотором смысле «эталонными» многомерными вычетами мероморфной формы ω в точке p, которые являются естественным обобщением вычета Коши функции одного переменного, являются *локальные вычеты* (вычеты Гротендика), представляющиеся интегралом вида

$$\mathrm{res}_p\,\omega = (2\pi i)^{-n} \int\limits_{\gamma^{(p)}} \omega \tag{8}$$

и ассоциирующиеся с голоморфным отображением $f = (f_1,\ldots,f_n)$. С алгебраической точки зрения этот интеграл сопоставляется элементам h из кольца ростков $\mathcal{O}_p$, голоморфных в точке p функций (см. [9]). При этом росток h рассматривается с точностью до элементов из идеала $I_p(f)$, порожденного ростками функций $f_1,\ldots,f_n$. В частности локальный вычет (8) равен нулю при $h \in I_p(f)$. Из договоренности об ориентации цикла $\gamma^{(p)}$ также следует, что локальный вычет кососимметричен относительно перестановок компонент отображения $f = (f_1,\ldots,f_n)$.

Вернемся к примеру с мероморфной функцией (3) в $\mathbb{C}^2$. В данном случае полярная гиперповерхность F формы $g\,dz\wedge dw$ — это объединение набора прямых $\{L_1, L_2, L_3\}$. Для того, чтобы получить локальные вычеты, разобьем F следующими тремя возможными способами:

$$\begin{aligned}
F &= F_1^1 \cup F_2^1, \quad F_1^1 = L_1,\ F_2^1 = L_2 \cup L_3;\\
F &= F_1^2 \cup F_2^2, \quad F_1^2 = L_1 \cup L_3,\ F_2^2 = L_2;\\
F &= F_1^3 \cup F_2^3, \quad F_1^3 = L_1 \cup L_2,\ F_2^3 = L_3.
\end{aligned}$$

Для каждого полученного набора $\{F_1^1, F_2^1\}$, $\{F_1^2, F_2^2\}$, $\{F_1^3, F_2^3\}$ начало координат является изолированной точкой пересечения входящих в него гиперповерхностей. С этими наборами связаны голоморфные отображения

$$f^{(1)} = (z, w(z-w)), \quad f^{(2)} = (z(z-w), w), \quad f^{(3)} = (zw, z-w),$$

имеющие, в свою очередь, изолированный нуль в начале координат. Следовательно, для функции g (для формы $g\,dz\wedge dw$) определены три локальных вычета, которые представляются интегралами по циклам

$$\begin{aligned}
\gamma_1' &= \{|z| = \delta_1,\ |w(z-w)| = \varepsilon_1\},\\
\gamma_2' &= \{|z(z-w)| = \delta_2,\ |w| = \varepsilon_2\},\\
\gamma_3' &= \{|zw| = \delta_3,\ |z-w| = \varepsilon_3\},
\end{aligned}$$

соответственно. Можно показать, что в $\mathbb{C}^2 \setminus F$ имеют место следующие гомологии циклов:

$$\gamma_1' \sim \gamma_1, \quad \gamma_2' \sim \gamma_2, \quad \gamma_3' \sim \gamma_1 - \gamma_2.$$

Таким образом, в данном случае локальные вычеты, ассоциированные с отображениями $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, совпадают с интегралами (6), (7) соответственно. Вычет, ассоциированный с отображением $f^{(3)}$, является разностью этих интегралов, из чего видно, что между локальными вычетами могут быть зависимости.

3. Циклы, разделяющие набор гиперповерхностей

Пусть $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_m\}$ — произвольный набор гиперповерхностей (дивизоров) комплексного аналитического многообразия X, где $m \geqslant n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Обозначим $F = D_1 \cup \dots \cup D_m$. Разбиением множества индексов $\{1, \dots, m\}$ будем называть упорядоченный набор непустых попарно непересекающихся подмножеств $J = (J_1, \dots, J_n)$ таких, что $J_1 \cup \dots \cup J_n = \{1, \dots, m\}$. Каждое такое разбиение J определяет упорядоченный набор гиперповерхностей $\mathcal{D}_J = (F_1, \dots, F_n)$, где

$$F_i = \bigcup_{j \in J_i} D_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть Z_J — дискретная часть (множество всех изолированных точек) пересечения $F_1 \cap \dots \cap F_n$. Для точки $p \in Z_J$ рассмотрим локальный цикл

$$\Gamma_J^{(p)} = \{z \in U_p \colon |f_i(z)| = \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n\},$$

где U_p — достаточно малая окрестность точки p, не содержащая других точек из Z_J, и

$$F_i \big|_{U_p} = \{z \in U_p \colon f_i(z) = 0\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если F — полярная гиперповерхность мероморфной формы, то каждый локальный цикл $\Gamma_J^{(p)}$ определяет вычет, ассоциированный с голоморфным отображением $f = (f_1, \dots, f_n)$.

В разобранном выше примере циклы γ_1', γ_2', γ_3' являются локальными циклами для набора прямых $\{L_1, L_2, L_3\}$ и определяются разбиениями $(\{1\}, \{2, 3\})$, $(\{1, 3\}, \{2\})$, $(\{1, 2\}, \{3\})$ множества индексов $\{1, 2, 3\}$ соответственно. Эти разбиения, очевидно, связаны с представлением полярной гиперповерхности F в виде объединения двух гиперповерхностей различными способами.

Для набора гиперповерхностей $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_m\}$ в X рассмотрим подгруппу $H_n^*(X \setminus F)$ группы компактных гомологий $H_n(X \setminus F)$, порожденную локальными циклами $\Gamma_J^{(p)}$ по всем возможным разбиениям J множества индексов $\{1, \dots, m\}$ и всем точкам $p \in Z_J$. Принадлежность цикла Γ подгруппе $H_n^*(X \setminus F)$ означает, что для мероморфной формы ω с полярным множеством F интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \omega$$

выражается через локальные вычеты.

Для поднабора индексов $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ будем применять обозначения $F_\alpha = D_{\alpha_1} \cup \dots \cup D_{\alpha_k}$, $F^\alpha = D_{\alpha_1} \cap \dots \cap D_{\alpha_k}$. Оказывается, что любой цикл из $H_n^*(X \setminus F)$ разделяет набор гиперповерхностей $\mathcal{D}$ в смысле следующего определения.

Определение 1. *Будем говорить, что n-цикл Γ из $X \setminus F$ разделяет набор гиперповерхностей $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_m\}$, если для любого $(n-1)$-поднабора индексов $\alpha' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \dots, m\}$ цикл Γ гомологичен нулю в $X \setminus F_{\alpha'}$.*

Действительно, это свойство достаточно проверить для произвольного локального цикла $\Gamma_J^{(p)}$. Если $\alpha' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \dots, m\}$, то для разбиения J найдется хотя бы одно такое подмножество J_k, для которого $\alpha' \cap J_k \neq \varnothing$. Но тогда цепь

$$\sigma = \{z \in U_p \colon |f_i(z)| = \varepsilon_i,\ i \neq k,\ |f_k(z)| \leqslant \varepsilon_k\}$$

лежит в $X \setminus F_{\alpha'}$, причем $\Gamma_J^{(p)} = \pm\partial\sigma$.

Так как циклы из $H_n^*(X \setminus F)$ — это в точности те циклы, которые являются линейными комбинациями локальных циклов, то условие разделения заданным циклом набора полярных гиперповерхностей мероморфной формы является необходимым, для того чтобы соответствующий интеграл сводился к линейной комбинации локальных вычетов. Это условие, очевидно, выполняется не всегда, что существенно обогащает многомерную ситуацию по сравнению с одномерной, где, как было уже отмечено, в случае мероморфной формы на комплексной плоскости любой интеграл сводится к вычетам.

4. Гипотеза о разделяющих циклах и формулировка результатов

Как отмечается в [1], нетрудно привести пример многообразия и набора гиперповерхностей, для которых имеются разделяющие этот набор циклы, не принадлежащие подгруппе $H_n^*(X \setminus F)$. Если в рассмотренном выше примере заменить многообразие $X = \mathbb{C}^2$ на $X = \mathbb{C}^2 \setminus 0$, то для набора прямых $\{L_1, L_2, L_3\}$ локальных циклов не будет ($Z_J = \varnothing$ для любого разбиения J), так что $H_2^*(X \setminus F) = 0$. Однако, как нетрудно проверить, гомологически нетривиальные циклы γ_1 и γ_2 разделяют данный набор прямых. Например, для γ_1 это следует из того, что $\gamma_1 = \pm\partial\{|z| = \delta_1, |w| \leqslant \varepsilon_1\}$ в $\mathbb{C}^2 \setminus L_1$, а также $\gamma_1 = \pm\partial\{|z| \leqslant \delta_1, |w| = \varepsilon_1\}$ в $\mathbb{C}^2 \setminus L_2$ и в $\mathbb{C}^2 \setminus L_3$.

Тем не менее, в ряде важных случаев условие разделения оказывается необходимым и достаточным условием для того, чтобы цикл был гомологичен линейной комбинации локальных циклов. Среди некомпактных многообразий в этом смысле наиболее исследован класс штейновых многообразий. В результате А. К. Цихом и А. П. Южаковым была сформулирована следующая гипотеза (далее: *гипотеза о разделяющих циклах*).

Гипотеза. *Пусть X — штейново многообразие и $\{D_1, \dots, D_m\}$ — произвольный набор гиперповерхностей в X, $m \geqslant n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Тогда класс любого цикла Γ, разделяющего данный набор гиперповерхностей, принадлежит подгруппе $H_n^*(X \setminus F)$.*

Авторами гипотезы показано (см. [10]–[12]), что она подтверждается в следующих важных ситуациях.

Теорема 1 (Цих, [10]). *Утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо для любого набора, состоящего из $n = \dim_{\mathbb{C}} X$ гиперповерхностей.*

Далее будем рассматривать наборы гиперповерхностей $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_m\}$ при $m > n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Будем говорить, что набор $\mathcal{D}$ имеет дискретные пересечения, если для любого n-поднабора $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \{1, \dots, m\}$ множество F^{α} дискретно.

Теорема 2 (Южаков, [12]). *Утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо в каждом из следующих случаев:*

1) *Набор гиперповерхностей $\mathcal{D}$ имеет дискретные пересечения, и $F^\alpha \cap F^\beta = \varnothing$ для любых n-поднаборов индексов $\alpha, \beta \subset \{1, \dots, m\}$ при $\alpha \neq \beta$;*

2) *$X = U_p$ — достаточно малая штейнова окрестность точки $p \in \mathbb{C}^n$, и $F^\alpha = \{p\}$ для любого n-поднабора индексов $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$.*

Отметим, что условие 1) теоремы 2 означает, что гиперповерхности из набора $\mathcal{D}$ находятся «в общем положении» (это условие сохраняется при малых «шевелениях» D_j). В рамках условия 2) рассматривается локальная ситуация и подразумевается, что речь идет о *центрированном* наборе $\mathcal{D}$ ростков гиперповерхностей в точке p. Условие $F^\alpha = \{p\}$ для любого n-поднабора индексов $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$ также выражает свойство «общего положения».

Основным результатом данной статьи является доказательство следующего результата.

Теорема 3. *Утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо при выполнении следующего условия: набор гиперповерхностей имеет дискретные пересечения, и для любых n-поднаборов индексов $\alpha, \beta \subset \{1, \dots, m\}$ множества F^α и F^β, имеющие хотя бы одну общую точку, полностью совпадают:*

$$F^\alpha \cap F^\beta \neq \varnothing \Rightarrow F^\alpha = F^\beta.$$

Эта теорема обобщает теорему 2. Действительно, при выполнении условия 1) теоремы 2 из $F^\alpha \cap F^\beta \neq \varnothing$ будет следовать, что $\alpha = \beta$, откуда тривиальным образом $F^\alpha = F^\beta$. Если же выполняется условие 2), то множества F^α совпадают для всех n-поднаборов $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$.

Следующая теорема формулируется в локальной ситуации. По сравнению с условием 2) теоремы 2 здесь в одном важном частном случае удается избавиться от предположения «общего положения» элементов набора гиперповерхностей.

Теорема 4 (см. [13], теорема 2). *Пусть X — достаточно малая штейнова окрестность точки $p \in \mathbb{C}^n$. Тогда утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо для любого набора, состоящего из $m = n + 1$ гиперповерхностей.*

Будет доказана, кроме того, следующая теорема, охватывающая некоторые ситуации, в которых не могут быть применимы теоремы 1–4.

Теорема 5. *Утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо при выполнении любого из следующих условий:*

1) *Для любого n-поднабора индексов $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$ множество F^α дискретно и содержится в D_m;*

2) *$m = n + 1$, причем $D_1 \cap \dots \cap D_n$ дискретно и содержится в D_{n+1};*

3) *$m = n + 1$, причем $D_1 \cap \dots \cap D_n \cap D_{n+1} = \varnothing$.*

5. Доказательства

5.1. **Вспомогательные утверждения.** При работе с мероморфными функциями n переменных, особое множество которых — это объединение набора $m > n$ гиперповерхностей, важным инструментом является разделение особенностей таких функций. Примером разделения особенностей в простейшем случае является разложение рациональной функции одного переменного на простейшие дроби. В нашем случае роль простейших дробей будут играть мероморфные функции, особые множества которых являются объединениями поднаборов, состоящих из не более чем n гиперповерхностей. Нам потребуются два вспомогательных утверждения о разделении особенностей, доказанные в работе А. П. Южакова [14].

Лемма 1 (см. [14], теорема 1)**.** *Если X — некомпактное аналитическое многообразие, и $X \setminus D_i$ — многообразия Штейна, то всякую функцию f, голоморфную в $X \setminus F$, можно представить в виде*

$$f = \sum f_\alpha,$$

где функция f_α голоморфна в $X \setminus F_\alpha$, и суммирование ведется по всем n-поднаборам индексов $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$ таким, что $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$.

Лемма 2 (см. [14], предложение 2)**.** *Пусть $D_0, D_1, \dots, D_l$ — набор гиперповерхностей в аналитическом многообразии X. Если $X \setminus D_0$ — многообразие Штейна, и $D_1 \cap \dots \cap D_l \subset D_0$, то всякую функцию f, голоморфную в $X \setminus (D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_l)$, можно представить в виде*

$$f = \sum_{k=1}^{l} f_k,$$

где функция f_k голоморфна в $X \setminus (D_0 \cup \dots [k] \dots \cup D_l)$, $k = 1, \dots, l$.

Мы воспользуемся также следующим утверждением, фактически доказанным А. П. Южаковым в [12], предложение 2.

Лемма 3. *Пусть U_p — достаточно малая окрестность точки $p \in \mathbb{C}^n$, и $\{D_1, \dots, D_m\}$ — набор гиперповерхностей в U_p, где*

$$D_j = \{z \colon g_j(z) = 0\}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Предположим, что для фиксированного поднабора индексов

$$\alpha' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \dots, m-1\}$$

выполняется условие $F^{\alpha',k} = \{p\}$ для всех $k \in \{1, \dots [\alpha'] \dots, m\}$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\delta/\varepsilon > 0$ цикл

$$\gamma^{(p)}_{\alpha',m} = \{z \in U_p \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \dots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ |g_m(z)| = \varepsilon\}$$

лежит в $X \setminus F$ и гомологичен там циклу

$$\Gamma^{(p)}_{\alpha'} = \{z \in U_p \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \dots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ |g_1(z) \cdot \ldots [\alpha'] \ldots \cdot g_m(z)| = \varepsilon\}.$$

В [12] фигурирует более ограничительное условие на набор гиперповерхностей, но делается более сильное заключение. Однако все этапы доказательства в интересующей нас формулировке леммы 3 полностью повторяют рассуждения из доказательства, представленного в статье [12].

5.2. **Доказательство теоремы 3.** Пусть ω — произвольная замкнутая дифференциальная n-форма в $X \setminus F$. Так как X — многообразие Штейна, то по теореме Серра класс когомологий формы ω содержит некоторую форму φ, голоморфную в $X \setminus F$.

Предположим, что набор гиперповерхностей удовлетворяет условию теоремы 3. На множестве всех n-поднаборов

$$\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \{1, \dots, m\}, \quad \alpha_1 < \dots < \alpha_n,$$

определено отношение эквивалентности $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow F^\alpha = F^\beta$. Следовательно, это множество разбивается на непересекающиеся классы $A_1, \dots, A_s$ эквивалентных поднаборов. Обозначим через $[A_i]$ множество всех индексов из $\{1, \dots, m\}$, входящих в поднаборы из класса A_i. При этом каждый n-поднабор $\alpha \subset [A_i]$ входит в класс A_i (это может быть неверно только для класса, состоящего из наборов α, для которых $F^\alpha = \varnothing$; будем обозначать такой класс $A_\varnothing$).

Рассмотрим для каждого класса A_i ($A_i \neq A_\varnothing$) множество A_i' всех n-поднаборов вида $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, m_i\}$, где

$$m_i = \max[A_i], \quad \alpha' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \dots, m\} \setminus m_i.$$

В частности, если A_i состоит из единственного поднабора, то $A_i' = A_i$. Для $A_i = A_\varnothing$ также положим $A_i' = A_\varnothing$. Построенные множества поднаборов $A_1', \dots, A_s'$ обладают следующими свойствами: $A_i' \subset A_i$, $[A_i'] = [A_i]$, и для любого $\alpha \in A_i'$ и любой точки $p \in F^\alpha$ найдется достаточно малая окрестность U_p точки p, не имеющая общих точек с гиперповерхностями D_k при $k \notin [A_i']$.

Обозначим $A = A_1' \cup \dots \cup A_s'$. Покажем, что форму φ можно представить в виде

$$\varphi = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha, \tag{9}$$

где φ_α голоморфна в $X \setminus F_\alpha$. Действительно, по лемме 1 для формы φ, голоморфной в $X \setminus F$, имеем

$$\psi = \sum_{\alpha} \psi_\alpha,$$

где суммирование ведется по всем n-поднаборам индексов $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$ таким, что $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$, и форма ψ_α голоморфна в $X \setminus F_\alpha$. Рассмотрим фиксированную форму ψ_α из этого разложения. Пусть поднабор $\alpha \in A_i$. Если $\alpha_n = m_i$, то $\alpha \in A$. Если же $\alpha_n \neq m_i$, то $F^\alpha \subset D_{m_i}$, поэтому по лемме 2 будем иметь

$$\psi_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \psi_k,$$

где форма ψ_k голоморфна в $X \setminus (D_{\alpha_1} \cup \dots [k] \dots \cup D_{\alpha_n} \cup D_{m_i})$. При этом набор $\{\alpha_1, \dots [k] \dots \alpha_n, m_i\} \in A$. Поступая так с каждой формой ψ_α при $\alpha \notin A$, получим нужное разложение 9 для формы φ.

Каждый цикл Γ, разделяющий набор гиперповерхностей $\{D_1, \dots, D_m\}$, разделяет также набор $\{D_{\alpha_1}, \dots, D_{\alpha_n}\}$, где $\alpha \in A$. По теореме 1 имеем

$$\Gamma \sim \sum_{p \in F^\alpha} n_\alpha^{(p)} \gamma_\alpha^{(p)}, \tag{10}$$

в $X \setminus F_\alpha$, где $\gamma_\alpha^{(p)}$ — локальный цикл в точке $p \in F^\alpha$, соответствующий набору $\{D_{\alpha_1}, \dots, D_{\alpha_n}\}$. В частности, если $F^\alpha = \varnothing$, то $\Gamma \sim 0$.

В соответствии со свойствами множеств A_i', при фиксированных $\alpha \in A_i'$ и $p \in F^\alpha$ можно считать, что набор гиперповерхностей $\{D_k \colon k \in [A_i]\}$ в U_p — центрированный, и $D_k \cap U_p = \varnothing$ при $k \notin [A_i]$. Пусть $D_k = \{g_k = 0\}$, $k \in [A_i]$. Из леммы 3 следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\delta/\varepsilon > 0$ цикл

$$\gamma_\alpha^{(p)} = \{z \in U_p \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \dots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ |g_{m_i}(z)| = \varepsilon\}$$

лежит в $X \setminus F$ и гомологичен там циклу

$$\Gamma_\alpha^{(p)} = \left\{ z \in U_p \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \dots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ \left| g_{m_i}(z) \cdot \prod_{k \in [A_i] \setminus \alpha} g_k(z) \right| = \varepsilon \right\}.$$

Учитывая (9), (10), имеем

$$\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_\Gamma \varphi = \sum_{\alpha \in A} \int\limits_\Gamma \varphi_\alpha = \sum_{\alpha \in A} \sum_{p \in F^\alpha} n_\alpha^{(p)} \int\limits_{\gamma_\alpha^{(p)}} \varphi_\alpha = \sum_{\alpha \in A} \sum_{p \in F^\alpha} n_\alpha^{(p)} \int\limits_{\Gamma_\alpha^{(p)}} \varphi_\alpha. \tag{11}$$

Рассмотрим цикл

$$\Gamma' = \sum_{\alpha \in A} \sum_{p \in F^\alpha} n_\alpha^{(p)} \Gamma_\alpha^{(p)}. \tag{12}$$

По построению $[\Gamma'] \in H_n^*(X \setminus F)$. Покажем, что

$$\int\limits_{\Gamma'} \omega = \int\limits_\Gamma \omega. \tag{13}$$

Действительно, пользуясь разложением (9) для формы φ, получим

$$\int\limits_{\Gamma'} \omega = \int\limits_{\Gamma'} \varphi = \sum_{\alpha \in A} \sum_{p \in F^\alpha} \sum_{\beta \in A} n_\alpha^{(p)} \int\limits_{\Gamma_\alpha^{(p)}} \varphi_\beta = \sum_{\alpha \in A} \sum_{p \in F^\alpha} n_\alpha^{(p)} \int\limits_{\Gamma_\alpha^{(p)}} \varphi_\alpha, \tag{14}$$

так как при $\alpha \neq \beta$ цикл $\Gamma_\alpha^{(p)} \sim 0$ в $U_p \setminus F_\beta$. Последнее следует из того, что $\Gamma_\alpha^{(p)} = \pm\partial\sigma$ для цепи σ из $U_p \setminus F_\beta$ вида

$$\{z \in U_p \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \cdots [\alpha_s] \cdots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ |g_{\alpha_s}(z)| \leqslant \delta,\ |g_{m_i}(z)| = \varepsilon\},$$

где $\alpha_s \in \alpha \setminus \beta$. По теореме де Рама из равенства интегралов (13) заключаем, что $\Gamma' \sim \Gamma$ в $X \setminus F$. Тем самым показано, что $[\Gamma] \in H_n^*(X \setminus F)$.

5.3. **Доказательство теоремы 5.** Как и при доказательстве теоремы 3, рассмотрим произвольную замкнутую дифференциальную n-форму ω в $X \setminus F$ и когомологичную ей форму φ, голоморфную в $X \setminus F$.

Если выполняется условие 1) теоремы 5, то используя леммы 1, 2 получим разложение вида (9), в котором в качестве множества A выступает множество всех n-поднаборов вида $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, m\}$, где $1 \leqslant \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} \leqslant m-1$.

По теореме 1 для цикла Γ, разделяющего заданный набор гиперповерхностей, и поднабора $\alpha \in A$ имеется разложение вида (10), в котором

$$\gamma_\alpha^{(p)} = \{z \in U_p \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \dots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ |g_m(z)| = \varepsilon\},$$

где $D_j\big|_{U_p} = \{g_j = 0\}$.

Рассмотрим множество $P = \{p \in F^\alpha \colon \alpha \in A\} \subset D_m$. Для каждой точки $p \in P$ рассмотрим центрированный набор гиперповерхностей $\{D_k \colon p \in D_k\}$ в U_p. Обозначим через $[p]$ множество номеров всех гиперповерхностей из такого центрированного набора. По лемме 3 при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\delta/\varepsilon > 0$, цикл $\gamma_\alpha^{(p)}$ лежит в $X \setminus F$, и гомологичен там циклу

$$\Gamma_\alpha^{(p)} = \left\{ z \in U_p \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \dots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta, \ \left| g_m(z) \cdot \prod_{k \in [p] \setminus \alpha} g_k(z) \right| = \varepsilon \right\}.$$

Зададим цикл Γ' формулой (12).

При выполнении условия 2) представим форму φ в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_n,$$

где форма φ_k голоморфна в $X \setminus F[k]$, $F[k] = D_1 \cup \dots [k] \dots \cup D_{n+1}$, $k = 1, \dots, n$. Если цикл Γ разделяет набор $\{D_1, \dots, D_{n+1}\}$, то он разделяет также каждый набор $\{D_1, \dots [k] \dots, D_{n+1}\}$, $k = 1, \dots, n$. По теореме 1 получим

$$\Gamma \sim \sum_{p \in Z_k} n_k^{(p)} \gamma_k^{(p)} \tag{15}$$

в $X \setminus F[k]$, где Z_k — дискретная часть (множество всех изолированных точек) пересечения $D_1 \cap \dots [k] \dots \cap D_{n+1}$ и

$$\gamma_k^{(p)} = \{ z \in U_p \colon |g_1(z)| = \dots [k] \dots = |g_n(z)| = \delta, \ |g_{n+1}(z)| = \varepsilon \}.$$

По условию пересечение $D_1 \cap \dots \cap D_n$ дискретно. Поэтому, если при фиксированных k и $p \in Z_k$ точка $p \in D_1 \cap \dots \cap D_n$, то по лемме 3 при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\delta/\varepsilon > 0$ цикл $\gamma_k^{(p)}$ лежит в $X \setminus F$ и гомологичен там циклу

$$\Gamma_k^{(p)} = \{ z \in U_p \colon |g_1(z)| = \dots [k] \dots = |g_n(z)| = \delta, \ |g_k(z) g_{n+1}(z)| = \varepsilon \}.$$

Если же $p \notin D_1 \cap \dots \cap D_n$, то можно считать, что $\gamma_k^{(p)}$ лежит в $X \setminus F$. В этом случае цикл $\gamma_k^{(p)}$ также будем обозначать через $\Gamma_k^{(p)}$. Имеем

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \varphi = \sum_{k=1}^n \int_\Gamma \varphi_k = \sum_{k=1}^n \sum_{p \in Z_k} n_k^{(p)} \int_{\gamma_k^{(p)}} \varphi_k = \sum_{k=1}^n \sum_{p \in Z_k} n_k^{(p)} \int_{\Gamma_k^{(p)}} \varphi_k.$$

Пусть

$$\Gamma' = \sum_{k=1}^n \sum_{p \in Z_k} n_k^{(p)} \Gamma_k^{(p)}.$$

Наконец, если выполнено условие 3), то по лемме 1 имеет место разложение вида

$$\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_n + \varphi_{n+1},$$

где форма φ_k голоморфна в $X \setminus F[k]$, $k = 1, \dots, n+1$. Если цикл Γ разделяет набор $\{D_1, \dots, D_{n+1}\}$, то он разделяет также каждый набор $\{D_1, \dots [k] \dots, D_{n+1}\}$, $k = 1, \dots, n+1$. По теореме 1 получим разложение вида (15) в $X \setminus F[k]$, где

$$\gamma_k^{(p)} = \{ z \in U_p \colon |g_1(z)| = \dots [k] \dots = |g_{n+1}(z)| = \varepsilon \}.$$

Так как условию $D_1 \cap \dots \cap D_n \cap D_{n+1} = \varnothing$, то можно считать, что $\gamma_k^{(p)}$ лежит в $X \setminus F$, $k = 1, \dots, n+1$. Положим

$$\Gamma' = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{p \in Z_k} n_k^{(p)} \gamma_k^{(p)}.$$

В точности также, как в рассмотренном выше доказательстве теоремы 3, показывается, что в каждом из трех разобранных случаев построенный цикл Γ' гомологичен циклу Γ в $X \setminus F$, причем $[\Gamma'] \in H_n^*(X \setminus F)$.

6. Пример

Рассмотрим набор гиперповерхностей $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ в $\mathbb{C}^3$, где

$$\begin{gathered} D_1 = \{g_1 := xyz = 0\}, \\ D_2 = \{g_2 := xy + yz + zx = 0\}, \\ D_3 = \{g_3 := x + y + z - 1 = 0\}, \\ D_4 = \{g_4 := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}. \end{gathered}$$

Пусть Z_k — дискретная часть пересечения $D_1 \cap \cdots [k] \cdots \cap D_4$, $k = 1, 2, 3, 4$. Имеем

$$\begin{gathered} Z_1 = \varnothing \text{ (так как } D_2 \cap D_3 \cap D_4 \text{ не содержит изолированных точек)}, \\ Z_2 = Z_4 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}, \\ Z_3 = \{(\pm 1,0,0), (0,\pm 1,0), (0,0,\pm 1)\}. \end{gathered}$$

Данный набор, следовательно, не удовлетворяет условиям теорем 1–4, но удовлетворяет условию 2) теоремы 5. Действительно, для дискретного пересечения $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ выполняется условие

$$D_1 \cap D_2 \cap D_3 \subset D_4.$$

Выясним, какие локальные циклы будут участвовать в разложении произвольного цикла Γ, разделяющего набор гиперповерхностей D_1, D_2, D_3, D_4. Для этого рассмотрим мероморфную форму вида

$$\frac{dx \wedge dy \wedge dz}{g_1 g_2 g_3 g_4}.$$

Так как $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \subset D_4$, то полином g_4 лежит в радикале идеала, порожденного полиномами g_1, g_2 и g_3. Действительно, в нашем случае нетрудно видеть, что

$$g_4 = -2g_2 + g_3^2 + 2g_3.$$

Отсюда следует (см. [14], [15]) возможность разделения особенностей данной формы:

$$\frac{dx \wedge dy \wedge dz}{g_1 g_2 g_3 g_4} = \frac{-2\, dx \wedge dy \wedge dz}{g_1 g_3 g_4^2} + \frac{(x + y + z + 1)\, dx \wedge dy \wedge dz}{g_1 g_2 g_4^2}.$$

Аналогично для любой формы φ, голоморфной в $\mathbb{C}^3 \setminus F$, $F = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$, можно получить разложение вида

$$\varphi = \varphi_2 + \varphi_3,$$

где формы φ_2 и φ_3 голоморфны в $\mathbb{C}^3 \setminus (D_1 \cup D_3 \cup D_4)$ и в $\mathbb{C}^3 \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_4)$ соответственно.

Всего имеется 12 различных (классов) локальных циклов, определенных для данного набора гиперповерхностей:

$$\Gamma_2^{(p)} = \{(x,y,z) \in U_p \colon |g_1| = |g_3| = \delta,\ |g_2 g_4| = \varepsilon\},$$
$$\Gamma_3^{(p)} = \{(x,y,z) \in U_p \colon |g_1| = |g_2| = \delta,\ |g_3 g_4| = \varepsilon\},$$
$$\Gamma_3^{(-p)} = \{(x,y,z) \in U_{-p} \colon |g_1| = |g_2| = \delta,\ |g_4| = \varepsilon\},$$
$$\Gamma_0^{(p)} = \{(x,y,z) \in U_p \colon |g_1| = |g_4| = \delta,\ |g_2 g_3| = \varepsilon\},$$

где $p \in Z := \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Следуя изложенному выше доказательству, представление разделяющего цикла Γ в виде линейной комбинации локальных циклов будет иметь следующий вид:

$$\Gamma \sim \sum_{p\in Z} n_2^{(p)} \Gamma_2^{(p)} + \sum_{p\in Z} n_3^{(p)} \Gamma_3^{(p)} + \sum_{p\in Z} n_3^{(-p)} \Gamma_3^{(-p)}.$$

В частности, так как все локальные циклы являются разделяющими, циклы $\Gamma_0^{(p)}$, $p \in Z$, будут выражаться через циклы $\Gamma_2^{(p)}$, $\Gamma_3^{(p)}$, $\Gamma_3^{(-p)}$, $p \in Z$.

Аналогично можно применить теорему 5, беря в качестве D_{n+1} гиперповерхность D_2, в соответствии с тем, что пересечение $D_1 \cap D_3 \cap D_4$ дискретно и $D_1 \cap D_3 \cap D_4 \subset D_2$. При этом все рассуждения и выводы повторятся без значительных изменений.

References

[1] A.K. Tsikh, *Multidimensional Residues and their Applications*, AMS, 103, Providence, 1992. MR1181199

[2] O.N. Zhdanov, A.K. Tsikh, *Studying the multiple Mellin–Barnes integrals by means of multidimensional residues*, Siberian Mathematical Journal, **39**:2 (1998), 245–260. MR1631772

[3] S. Friot, D. Greynat, *On convergent series representation of Mellin–Barnes integrals*, Journal of Mathematical Physics, **53**:2 (2012), 023508. MR2920476

[4] M. Passare, A.K. Tsikh, A.A. Cheshel, *Multiple Mellin–Barnes integrals as periods of Calabi–Yau manifolds with several moduli*, Theoretical and Mathematical Physics, **109**:3 (1997), 1544–1555.

[5] J. Charles, D. Greynat, E. de Rafael, *The Mellin–Barnes approach to hadronic vacuum polarization and* $g_\mu - 2$, Physical Review D, **97** (2018), 076014.

[6] K.V. Safonov, A.K. Tsikh, *Singularities of the Grothendieck parametric residue and diagonals of a double power series*, Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **28**:4 (1984), 65–74. MR0751685

[7] D.Yu. Pochekutov, *Diagonals of the Laurent series of rational functions*, Siberian Mathematical Journal, **50**:6 (2009), 1081–1091. MR2603877

[8] O.I. Egorushkin, I.V. Kolbasina, K.V. Safonov, *On application of multidimensional complex analysis in formal language and grammar theory*, Applied Discrete Mathematics, **37** (2017), 76–89. (in Russian). MR3714942

[9] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, New York: John Wiley and Sons, 1978. MR0507725

[10] A.K. Tsikh, *Cycles separating zeros of analytic functions in* $\mathbb{C}^n$, Siberian Mathematical Journal, **16**:5 (1975), 859–862. MR0508029

[11] A.P. Yuzhakov, *A coboundary condition of Leray and its application to logarithmic residues*, Siberian Mathematical Journal, **11**:3 (1970), 540–542. MR0280739

[12] A.P. Yuzhakov, *A separating subgroup and local residues*, Siberian Mathematical Journal, **29**:6 (1988), 1028–1033. MR0985300

[13] R.V. Ulvert, *Homological Resolutions in Problems About Separating Cycles*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 542–550.

[14] A.P. Yuzhakov, *On the separation of analytic singularities and the decomposition of holomorphic functions of n variables into partial fractions*, Multidimensional complex analysis, IF SO USSR, Krasnoyarsk, (1986), 210–220. (in Russian).
[15] E.K. Leinartas, *Factorization of rational functions of several variables into partial fractions*, Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **22**:10 (1978), 35–38. MR0522760

Roman Viktorovich Ulvert
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: ulvertrom@yandex.ru