S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1005–1027 (2019) УДК 517.927.2
DOI 10.33048/semi.2019.16.070 MSC 34B24, 34L20, 34M45

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С КУСОЧНО-ЦЕЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА КРИВОЙ И УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА РЕШЕНИЙ

А.А. ГОЛУБКОВ

Abstract. For large values of the spectral parameter module, the asymptotics of solutions of the standard Sturm–Liouville equation with a piecewise-entire potential along an lying in the complex plane arbitrary shape curve with a finite number of points in which the solutions and (or) their derivatives undergo discontinuities independent of the spectral parameter is obtained. The eigenvalue problem is investigated for the case of decaying boundary conditions.

Keywords: equation along the curve, decision gap conditions, piecewise-entire potential, asymptotics of solutions, asymptotics of the spectrum.

1. Введение

Спектры краевых задач для уравнений Штурма—Лиувилля на отрезке хорошо изучены [1, 2, 3, 4]. При этом, несмотря на большое число работ, посвященных исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений на комплексной плоскости (см. книги [5, 6, 7] и литературу в них), асимптотическое поведение при $|\lambda| \to \infty$ решений уравнений Штурма—Лиувилля на кривых и спектры краевых задач для таких уравнений изучены только при достаточно жестких ограничениях на форму кривой [8, 9, 10] и (или) на коэффициенты уравнения [6, 7, 11, 12]. Так в работе [9] рассмотрены задачи с простейшими краевыми условиями для уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \tag{1}$$

Golubkov, A.A., A boundary value problem for the Sturm–Liouville equation with piecewise entire potential on the curve and solution discontinuity conditions.

Поступила 4 апреля 2019 г., опубликована 6 августа 2019 г.

на выпуклой кривой γ с параметризацией $z(x) = x + is(x)$ ($x \in [0, 1]$, $s(0) = s(1) = 0$, функция $s(x)$ непрерывно дифференцируема, s' не убывает, $s'(0) < 0 < s'(1)$, i — мнимая единица) и исследованы необходимые и достаточные условия (на потенциал $Q \in L^1(\gamma)$) локализации спектра этих задач около одного луча. А в работе [12] получена асимптотика решений уравнения (1), непрерывно дифференцируемых на спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$ произвольной формы с заданным на ней кусочно-целым потенциалом.

В настоящей работе полученная в [12] асимптотика решений уравнения (1) с кусочно-целым потенциалом обобщена на случай, когда на произвольной спрямляемой кривой γ задано конечное число точек, в которых эти решения и (или) их производные вдоль кривой претерпевают разрывы. Изучена краевая задача для такого уравнения с распадающимися граничными условиями. При этом на элементы матриц перехода и коэффициенты в граничных условиях накладывается единственное ограничение — независимость от спектрального параметра $\rho := \lambda^2$. Доказано, что в зависимости от формы кривой γ и значений элементов матриц перехода и коэффициентов в граничных условиях, спектр краевой задачи может быть только одного из трёх типов: пустой, совпадающий со всей комплексной плоскостью или счётный, локализованый около конечного числа лучей. Сформулированы необходимые и достаточные условия реализации каждого из случаев и исследованы асимптотические свойства счетного спектра. Кусочная целостность потенциала Q используется для деформации кривой γ в ломанную без изменения передаточной матрицы вдоль неё. Поэтому все полученные результаты справедливы также, если каждая из функций Q_m ($m = \overline{0, N}$) в (2) ограничена на участке γ_m кривой γ, соединящем характеристические точки z_m и z_{m+1}, и является безмонодромным потенциалом [9, 13] уравнения Штурма–Лиувилля (1) в некоторой достаточно большой области G_m, зависящей от формы кривой и набора характеристических данных (5). В наиболее важном случае простого набора характеристических данных (см. определение 4 и теорему 1) область G_m должна быть выпуклой и содержать γ_m.

Исследованная в статье задача возникает, например, при переходе с помощью классической подстановки [2] от уравнения Штурма—Лиувилля общего вида на отрезке к уравнению (1) на кривой. Кроме того, она является естественным аналогом краевых задач с условиями разрывов решений на отрезке действительной оси [3]. В работе рассматриваются непрерывные кривые. Однако полученные результаты легко переносятся на случай кусочно-непрерывной кривой, т.к. конечным числом параллельных переносов участков такой кривой и соответствующих им замен переменной в дифференциальном уравнении, уравнение на кусочно-непрерывной кривой всегда можно свести к уравнению того же вида на непрерывной кривой.

2. Постановка задачи и основные результаты

Обозначим: $\hat{\sigma}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\hat{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пусть на непрерывной спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$, заданной параметрически функцией $z = V(t)$ ($t \in [t_0, t_f]$), определена кусочно-целая функция Q и заданы точки, в которых решения уравнения (1) и (или) их производные имеют разрывы, не зависящие от спектрального параметра.

Иными словами, пусть существуют целое число $N \geq 0$ и набор чисел $T = \{t_j\}_0^{N+1} : t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} \equiv t_f$ такие, что

$$Q(z) = Q_m(z), \text{ если } z = V(t),\ t \in (t_m, t_{m+1}) \quad (m = \overline{0, N}), \tag{2}$$

где все Q_m — целые функции. Кроме того, пусть функции $u(z)$ и $u'(z)$ удовлетворяют условиям разрыва в точках $z_j := V(t_j)$ $(j = \overline{0, N+1})$ кривой γ:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u(V(t_0+0)) \\ u'(V(t_0+0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(0)} \begin{pmatrix} u(V(t_0)) \\ u'(V(t_0)) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u(V(t_n+0)) \\ u'(V(t_n+0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(n)} \begin{pmatrix} u(V(t_n-0)) \\ u'(V(t_n-0)) \end{pmatrix} \quad (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1), \\ \begin{pmatrix} u(V(t_{N+1})) \\ u'(V(t_{N+1})) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(N+1)} \begin{pmatrix} u(V(t_{N+1}-0)) \\ u'(V(t_{N+1}-0)) \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{3}$$

где матрицы перехода $\hat{\eta}^{(j)}$ $(j = \overline{0, N+1})$ не зависят от ρ. При этом, если $N \geq 1$, то для всех чисел $n \in \{1, \ldots, N\}$ выполнены следующие условия:

$$\hat{\eta}^{(n)} \neq \hat{I} \text{ или (и) } Q_n \neq Q_{n-1} \quad (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1). \tag{4}$$

В (1) и далее штрих обозначает производную по z вдоль некоторой спрямляемой кривой γ, задаваемой параметрически функцией $z = V(t)$, т.е. считается, что $f'(z) \equiv f'(V(t)) := \lim_{\delta \to 0} [f(V(t+\delta)) - f(V(t))]/[V(t+\delta) - V(t)]$. Кроме того, в (3) $f(V(t \pm 0)) := \lim_{\delta \to 0, \delta > 0} f(V(t \pm \delta))$. Нетрудно убедиться, что если функция $f(z)$ аналитична в некоторой области комплексной плоскости, то в любой точке этой области она имеет производные вдоль любой проходящей через эту точку спрямляемой кривой, которые совпадают между собой и равны обычной производной $df(z)/dz$ функции $f(z)$ в этой точке.

Заметим также, что если у кривой γ есть участки (точки), которые проходятся более одного раза, т.е. соответствуют двум или более интервалам значений (значениям) параметра t, то такие участки (точки) различаются очередностью прохождения, а геометрически совпадающие кривые с различным порядком прохождения участков считаются различными.

Определение 1. *При выполнении условий* (2) *и* (4) *будем называть рассматриваемое на непрерывной спрямляемой кривой γ уравнение* (1), *дополненное условиями разрыва решений* (3), *уравнением класса D на кривой γ, а точки $z_j = V(t_j)$ $(j = \overline{0, N+1})$ — характеристическими точками кривой γ и уравнения* (1) *класса D на γ. При этом упорядоченное множество*

$$W := \{N, \{z_j, \hat{\eta}^{(j)}\}_0^{N+1}, \{Q_m\}_0^N\} \tag{5}$$

будем называть набором характеристических данных кривой γ и уравнения (1) *класса D на γ.*

Определение 2. *Будем называть $u(z)$ решением уравнения* (1) *класса D на кривой γ, если функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению* (1) *и является непрерывно-дифференцируемой во всех точках γ, кроме, возможно, характеристических, а также удовлетворяет всем условиям разрыва* (3).

Определение 3. *Пусть $u_1(z), u_2(z)$ — решения уравнения* (1) *класса D на кривой γ с характеристическими точками z_j $(j = \overline{0, N+1})$ и*

$$u_1(z_b) = 1,\ u_1'(z_b) = 0,\ u_2(z_b) = 0,\ u_2'(z_b) = 1. \tag{6}$$

Назовём передаточной матрицей уравнения (1) *класса* D *между точками* z_b *и* z *кривой* γ *матрицу*

$$\hat{P}(\gamma, z, z_b) := \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{pmatrix} \quad (z, z_b \in \gamma,\ z, z_b \notin \{z_j\}_1^N \text{ при } N \geq 1).$$

Передаточной матрицей вдоль кривой будем называть передаточную матрицу между начальной и конечной точками кривой.

Лемма 1. *Элементы передаточной матрицы* $\hat{P}$ *уравнения* (1) *класса* D *вдоль кривой* γ *однозначно определяются заданием набора характеристических данных* (5) *этой кривой; являются целыми функциями спектрального параметра* ρ $(\rho = \lambda^2)$*;* $\det \hat{P} = \prod\limits_{j=0}^{N+1} \det \hat{\eta}^{(j)}$ *и*

$$\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0) = \hat{\eta}^{(N+1)} \hat{P}_0^{(N)} \hat{\eta}^{(N)} \ldots \hat{P}_0^{(0)} \hat{\eta}^{(0)}, \tag{7}$$

где $\hat{P}_0^{(m)} := \lim_{\delta \to 0, \delta > 0} \hat{P}(\gamma, V(t_{m+1} - \delta), V(t_m + \delta))$ $(m \in \{0, \ldots, N\})$ *— передаточная матрица уравнения* (1) *между точками* z_m *и* z_{m+1} *кривой* γ *в отсутствии разрывов решений.*

Доказательство. Пусть $u_\alpha^{(m)}(z)$ $(\alpha \in \{1, 2\}, m \in \{0, \ldots, N\})$ — целые решения вспомогательного уравнения Штурма–Лиувилля

$$\frac{d^2 u^{(m)}}{dz^2} + (Q_m - \lambda^2) u^{(m)} = 0 \qquad (z \in \mathbf{C}) \tag{8}$$

с начальными условиями (6) в точке z_m. Определим функции $v_\alpha^{(s)}(z)$ $(s \in \{-1, 0, \ldots, N\})$ и $\widetilde{v}_\alpha^{(p)}(z)$ $(p \in \{-1, 0, \ldots, N-1\})$ следующими рекурентными соотношениями

$$\begin{cases} v_\alpha^{(-1)}(z) := u_\alpha^{(0)}(z), \\ \begin{pmatrix} \widetilde{v}_\alpha^{(m-1)}(z) \\ \dfrac{d\widetilde{v}_\alpha^{(m-1)}(z)}{dz} \end{pmatrix} := \hat{\eta}^{(m)} \begin{pmatrix} v_\alpha^{(m-1)}(z) \\ \dfrac{dv_\alpha^{(m-1)}(z)}{dz} \end{pmatrix} \ (m \in \{0, \ldots, N\}), \\ v_\alpha^{(m)}(z) := \widetilde{v}_\alpha^{(m-1)}(z_m) u_1^{(m)}(z) + \left.\dfrac{d\widetilde{v}_\alpha^{(m-1)}(z)}{dz}\right|_{z=z_m} u_2^{(m)}(z). \end{cases} \tag{9}$$

Тогда, если γ_m $(m \in \{0, \ldots, N\})$ — участок кривой γ, соединяющий точки z_m и z_{m+1}, то в силу определений 1, 2 функции $u_\alpha(z)$, такие, что

$$\begin{cases} u_1(z_0) = 1,\ u_1'(z_0) = 0,\ u_2(z_0) = 0,\ u_2'(z_0) = 1, \\ u_\alpha(z) := v_\alpha^{(m)}(z),\ z \in \gamma_m \backslash \{z_m, z_{m+1}\}\ (m \in \{0, \ldots, N\}), \\ \begin{pmatrix} u_\alpha(z_{N+1}) \\ u_\alpha'(z_{N+1}) \end{pmatrix} := \hat{\eta}^{(N+1)} \begin{pmatrix} v_\alpha^{(N)}(z_{N+1}) \\ \left.\dfrac{dv_\alpha^{(N)}(z)}{dz}\right|_{z=z_{N+1}} \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{10}$$

будут решениями уравнения (1) класса D на γ, удовлетворяющими условиям (6) в точке z_0. При этом формула (7) следует из определения 3 передаточной матрицы и соотношений (9), (10), а остальные утверждения леммы 1 следуют из (7) и соответствующих свойств решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами [6] (§2, 24). $\square$

Определение 4. *Набор характеристических данных* (5) *уравнения* (1) *класса* D *будем называть простым, если* $N = 0$ *или выполнены следующие условия*

$$\hat{\eta}^{(n)} \notin \Omega := \left\{ A\hat{I}, A_1\hat{\sigma}_3 \,\middle|\, A \in \boldsymbol{C}\backslash\{1\},\ A_1 \in \boldsymbol{C} \right\} \ (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1), \tag{11}$$

$$\Delta z_m := z_{m+1} - z_m \neq 0 \ \ (m = \overline{0, N}). \tag{12}$$

Лемма 2. *Простой набор характеристических данных* (5) *с* $N = 0$ *и* $z_1 = z_0$ *соответствует уравнению* (1) *класса* D *на произвольной замкнутой кривой* γ *с целым потенциалом* Q_0. *Передаточная матрица* $\hat{P}$ *этого уравнения вдоль кривой* γ *равна* $\hat{\eta}^{(1)}\hat{\eta}^{(0)}$, *причём кривую* γ *можно стянуть в точку* z_0 *без изменения* $\hat{P}$.

Доказательство. Лемма следует из определения 1, формулы (7) и того, что передаточная матрица уравнения (1) с целым потенциалом вдоль произвольной замкнутой кривой без разрывов решений равна $\hat{I}$ [5, 6]. □

Теорема 1. *Пусть уравнение* (1) *класса* D *с набором характеристических данных* (5) *имеет вдоль кривой* γ *передаточную матрицу* $\hat{P}$. *Тогда на некоторой кривой* $\widetilde{\gamma}$ *существует уравнение* (1) *класса* D *с простым набором характеристических данных* $\widetilde{W} = \{\widetilde{N}, \{\widetilde{z}_j, \hat{\widetilde{\eta}}^{(j)}\}_0^{\widetilde{N}+1}, \{\widetilde{Q}_m\}_0^{\widetilde{N}}\}$ $(\widetilde{N} \leq N)$ *и передаточной матрицей* $\hat{\widetilde{P}}$ *вдоль кривой* $\widetilde{\gamma}$ *такими, что*

$$\hat{\widetilde{\eta}}^{(\widetilde{N}+1)} \ldots \hat{\widetilde{\eta}}^{(0)} = \hat{\eta}^{(N+1)} \ldots \hat{\eta}^{(0)}, \ \ \hat{\widetilde{P}}(\rho) \equiv \hat{P}(\rho) \ \ (\rho \in \boldsymbol{C}). \tag{13}$$

Теорема 1 позволяет в дальнейшем рассматривать уравнения (1) класса D только с простыми наборами характеристических данных. При её доказательстве в конце раздела 3 описан алгоритм построения за конечное число элементарных действий простого набора характеристических данных $\widetilde{W}$, удовлетворяющего условиям (13).

Определение 5. *Простой набор характеристических данных* (5) *с* $N = 0$ *и* $z_1 = z_0$ *будем называть точечным.*

Определение 6. *Будем называть кривую простой, если на ней задано уравнение* (1) *класса* D *с простым набором характеристических данных* (5), *отличным от точечного.*

Свойства передаточной матрицы уравнения (1) класса D вдоль кривой с точечным набором характеристических данных описаны в лемме 2. Ассимптотика элементов передаточной матрицы вдоль простой кривой получена в разделе 4, а в разделе 5 доказана теорема 2.

Теорема 2. *Элемент* $p_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta \in \{1, 2\})$ *передаточной матрицы* $\hat{P}$ *уравнения* (1) *класса* D *вдоль простой кривой* γ *с набором характеристических данных* (5) *является целой функцией* ρ *порядка* $1/2$ *и нормального типа* (*равен нулю тождественно*) *тогда и только тогда, когда выполнены оба* (*не выполнено хотя бы одно*) *из следующих условий:*

$$|\eta_{1\beta}^{(0)}| + |\eta_{2\beta}^{(0)}| \neq 0, \ \ |\eta_{\alpha 1}^{(N+1)}| + |\eta_{\alpha 2}^{(N+1)}| \neq 0. \tag{14}$$

В разделах 6 — 9 статьи исследован спектр краевой задачи с распадающимися граничными условиями

$$\Theta_{21}u(z_0) - \Theta_{11}u'(z_0) = 0, \;\; \mu_{11}u(z_{N+1}) + \mu_{12}u'(z_{N+1}) = 0 \tag{15}$$

для уравнения (1) класса D с простым набором характеристических данных (5). В (15) коэффициенты $\Theta_{\alpha 1}, \mu_{1\alpha}(\alpha \in \{1,2\})$ — комплексные числа. Основные результаты этого исследования сформулированы ниже в теоремах 3 — 5.

Положим

$$\Theta_{12} = \Theta_{22} = \mu_{21} = \mu_{22} := 0, \tag{16}$$

$$\hat{\tilde{\mu}} := \hat{\mu}\hat{\eta}^{(N+1)}, \;\; \hat{\tilde{\Theta}} := \hat{\eta}^{(0)}\hat{\Theta}, \;\; r_{11}^{(0)} := \widetilde{\mu}_{11}\widetilde{\Theta}_{11} + \widetilde{\mu}_{12}\widetilde{\Theta}_{21}. \tag{17}$$

Теорема 3. *Спектр краевой задачи с граничными условиями* (15) *для уравнения* (1) *класса D на кривой γ с простым набором характеристических данных*

А) пуст тогда и только тогда, когда набор характеристических данных точечный и $r_{11}^{(0)} \neq 0$, где величина $r_{11}^{(0)}$ определена в формуле (17)*;*

Б) является счётным тогда и только тогда, когда кривая γ простая и выполнены следующие условия:

$$|\widetilde{\Theta}_{11}| + |\widetilde{\Theta}_{21}| \neq 0, \;\; |\widetilde{\mu}_{11}| + |\widetilde{\mu}_{12}| \neq 0. \tag{18}$$

Во всех остальных случаях спектр указанной краевой задачи совпадает со всей комплексной плоскостью.

Доказательство теоремы 3 приведено в конце разделе 6.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (18) *и $D_0(\rho)$ — характеристическая функция* (43) *краевой задачи с граничными условиями* (15) *для уравнения* (1) *класса D на простой кривой γ. Тогда угловая плотность* (57) *нулей функции $D_0(\rho)$ равна $\chi_j^{(0)}/\pi$ в любом угловом секторе комплексной ρ-плоскости, содержащем внутри себя ровно один луч из семейства лучей, задаваемых параметрически функциями $\rho = -t\exp\{-2i\omega_j\}$ $(t \geq 0, j = \overline{1,J})$, где величины J, ω_j определены в соотношении* (53) *и перед ним, а $\chi_j^{(0)}$ — в* (54)*.*

Теорема 4 следует из формул (49), (58) и сформулированного в конце раздела 7 предложения 1. Заметим, что величины ω_j и $\chi_j^{(0)}$ $(j \in \{1,\ldots,J\})$ имеют простой геометрический смысл: в силу (48), (50), (53) и (54) величина $\chi_j^{(0)}$ равна сумме длин тех из отрезков, соединяющих последовательные характеристические точки простой кривой γ, которые параллельны прямой с параметризацией $z = t\exp\{i\omega_j\}$ $(t \in \mathbf{R},\, \omega_j \in [0;\pi))$.

Результаты, аналогичные изложенным в теореме 4, были получены в работе [10], где рассматривалась краевая задача с граничными условиями $u(0) = u(1) = 0$ для уравнения (1) на выпуклой вниз кривой γ, соединяющей точки 0 и 1, с параметризацией $z(x) = x + is(x)$. При этом действительная функция $s(x)$ предполагалась кусочно непрерывно дифференцируемой с неубывающей производной $(s'(0) < 0 < s'(1))$, а на потенциал накладывались ограничения, позволяющие деформировать кривую в выпуклую ломанную, в вершинах которой потенциал испытывает скачок, а все её звенья параллельны различным прямым. В этом смысле теорему 4 можно рассматривать как обобщение соответствующей части результатов работы [10] на случай уравнений (1) вдоль ломанной произвольной формы, в каждой вершине которой имеют место разрывы решений (3) или (и) скачки какой-либо конечной производной потенциала, а разные (не обязательно соседние) звенья ломанной могут быть параллельны одной прямой.

Кроме общих асимптотических свойств спектра, похожих на описанные в теореме 4, в работе [10] были найдены и более тонкие детали его асимптотики, учитывающие особенности рассмотренной там задачи. Аналогичные детали спектра краевых задач с граничными условиями (15) для уравнения (1) класса D на простой кривой при выполнении условий (18) могут быть получены с помощью доказанной в разделе 8 теоремы 5.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (18) *и* $D_0(\rho)$ — *характеристическая функция* (43) *краевой задачи с граничными условиями* (15) *для уравнения* (1) *класса* D *на простой кривой. Тогда в окрестности каждого луча, задаваемого параметрически функцией* $\rho = -t\exp\{-2i\omega_j\}$ ($t \geq 0$, $j \in \{1,\dots,J\}$, *величины* J, ω_j *определены в соотношении* (53) *и перед ним*), *нули функции* $D_0(\rho)$ *при* $|\rho| \to \infty$ *асимптотически совпадают с квадратами нулей квазиполинома* $r^{(j)}(\lambda)$, *задаваемого формулой* (67).

В заключительном разделе 9 дано краткое описание следующей из теоремы 5 классификации типов асимптотики спектра краевой задачи с граничными условиями (15) для уравнения (1) класса D на простой кривой. Отмечено, что дальнейшее изучение связи условий реализации каждого из типов асимптотики спектра с параметрами набора характеристических данных (5) кривой представляет особый интерес с точки зрения исследования обратных спектральных задач для уравнения (1) класса D, и, прежде всего, с точки зрения доказательства условий существования их решений.

3. Переход к уравнению с простым набором характеристических данных (доказательство теоремы 1)

Определение 7. *Петлёй кривой* γ *с узлом в точке* $z^{(d)}$ *назовём участок кривой* γ, *начинающийся и кончающийся в точке её самопересечения* $z^{(d)}$.

Определение 8. *Пусть на кривой* γ *задано уравнение* (1) *класса* D. *Тогда петля кривой* γ *называется „невидимой петлей", если её узел совпадает с двумя последовательными характеристическими точками кривой* γ.

Лемма 3. *На кривой* γ, *набор характеристических данных которой имеет вид* (5), *„невидимые петли" отсутствуют тогда и только тогда, когда выполнены все условия* (12).

Доказательство. Лемма следует непосредственно из определения 8. □

Лемма 4. *Пусть на кривой* γ *задан набор характеристических данных* (5) *и узел* $z^{(d)}$ *„невидимой петли" кривой* γ *совпадает с её характеристическими точками* z_j *и* z_{j+1} ($j \in \{0,\dots,N\}$). *Тогда удаление из кривой этой „невидимой петли" с заменой двух матриц перехода в точке* $z^{(d)}$ ($\hat{\eta}^{(j)}$ *и* $\hat{\eta}^{(j+1)}$) *на одну матрицу перехода* $\hat{\eta}^{(j+1)}\hat{\eta}^{(j)}$ *не меняет начальную и конечную точки кривой, а также передаточную матрицу уравнения* (1) *класса* D *вдоль неё и уменьшает число характеристических точек кривой на одну или две.*

Доказательство. Лемма следует из определения 1, формулы (7) и того, что передаточная матрица уравнения (1) с целым потенциалом вдоль петли без разрывов решений равна $\hat{I}$ [5, 6]. □

Заметим, что лемма 4 подтверждает обязательность рассмотрения случая, когда матрицы перехода $\hat{\eta}^{(0)}$ и $\hat{\eta}^{(N+1)}$ отличны от единичной. Ведь даже если на исходной кривой γ выполнено: $\hat{\eta}^{(0)} = \hat{\eta}^{(N+1)} = \hat{I}$, но при этом γ имеет „невидимую петлю” с узлом в начальной (конечной) точке, $N \geq 1$ и $\hat{\eta}^{(1)} \neq \hat{I}$ ($\hat{\eta}^{(N)} \neq \hat{I}$), то после удаления из кривой γ этой „невидимой петели”, получится кривая с матрицей перехода в начальной (конечной) точке, отличной от $\hat{I}$.

После удаления у исходной кривой γ с заданным на ней уравнением (1) класса D всех „невидимых петель” с соответствующей заменой матриц перехода в их узлах (см. лемму 4) у новой кривой также могут обнаружиться „невидимые петли”. Например, кривая γ с набором характеристических данных

$$\left\{2, \{z_0, \hat{\eta}^{(0)};\ z_1, \hat{\eta}^{(1)}; z_2 = z_1, \hat{\eta}^{(2)} = \left(\hat{\eta}^{(1)}\right)^{-1}; z_3 = z_0, \hat{\eta}^{(3)}\}, \{Q_0, Q_1, Q_2 = Q_0\}\right\}$$

имеет одну „невидимую петлю” с узлом в точке z_1. Кривая, получающаяся после удаления этой „невидимой петли” и замены матрицы перехода в точке z_1 на матрицу $\hat{\eta}^{(2)}\hat{\eta}^{(1)} = \hat{I}$, также будет иметь одну „невидимую петлю” с узлом в точке z_0. В силу леммы 2 передаточная матрица вдоль этой петли будет равна $\hat{\eta}^{(3)}\hat{\eta}^{(0)}$, и „невидимую петлю” можно стянуть в точку z_0 (удалить) без изменения передаточной матрицы.

Определение 9. *Поэтапное удаление „невидимых петель” с заменой матриц перехода в их узлах в соответствии с леммой 4 , производимое до полного устранения „невидимых петель”, будем называть последовательным удалением всех „невидимых петель”.*

В результате последовательного удаления всех „невидимых петель” исходная кривая γ с набором характеристических данных (5) либо переходит в кривую без „невидимых петель”, либо может быть стянута в точку (см. лемму 2). В последнем случае в силу леммы 4 передаточная матрица $\hat{P}$ вдоль кривой γ равна $\hat{\eta}^{(N+1)} \dots \hat{\eta}^{(0)}$.

Лемма 5. *При последовательном удаления всех „невидимых петель” передаточная матрица сохраняется, не меняются также начальная и конечная точки кривой, либо точка, в которую стягивается кривая, совпадает с ними. Если при этом исходный набор характеристических данных* (5) *уравнения* (1) *класса D преобразуется к виду $\widetilde{W} = \{\widetilde{N}, \{\widetilde{z}_j, \hat{\widetilde{\eta}}^{(j)}\}_0^{\widetilde{N}+1}, \{\widetilde{Q}_m\}_0^{\widetilde{N}}\}$, то $\widetilde{N} \leq N-1$, $\hat{\widetilde{\eta}}^{(\widetilde{N}+1)} \dots \hat{\widetilde{\eta}}^{(0)} = \hat{\eta}^{(N+1)} \dots \hat{\eta}^{(0)}$, и либо $\widetilde{N} = 0$, $\widetilde{z}_0 = \widetilde{z}_1$, либо для всех $\widetilde{z}_m$ ($m \in \{0, \dots, \widetilde{N}\}$) выполнены соотношения вида* (12).

Доказательство. Лемма 5 следует из лемм 2 — 4 и определения 9. □

Лемма 6. *Пусть $\hat{P}$ и $\hat{\widetilde{P}}$ — передаточные матрицы уравнений* (1) *класса D вдоль кривых γ и $\widetilde{\gamma}$ с наборами характеристических данных $W = \{N, \{z_j, \hat{\eta}^{(j)}\}_0^{N+1}, \{Q_m\}_0^N\}$ и $\widetilde{W} = \{N, \{\widetilde{z}_j, \hat{\widetilde{\eta}}^{(j)}\}_0^{N+1}, \{\widetilde{Q}_m\}_0^N\}$ соответственно. Причём $N \geq 1$ и существует число $p \in \{0, \dots, N\}$ такое, что*

$$\widetilde{z}_m = z_m,\ \widetilde{Q}_m = Q_m,\ \hat{\widetilde{\eta}}^{(m)} = \hat{\eta}^{(m)}\ \ (m = \overline{0, p-1}\ \textit{при}\ p \geq 1),$$
$$\widetilde{z}_p = z_p,\ \widetilde{Q}_p(z) = Q_p(2z_p - z),\ \hat{\widetilde{\eta}}^{(p)} = A\hat{\sigma}_3\hat{\eta}^{(p)},$$
$$\widetilde{z}_n = 2z_p - z_n,\ \widetilde{Q}_n(z) = Q_n(2z_p - z),\ \hat{\widetilde{\eta}}^{(n)} = \hat{\sigma}_3\hat{\eta}^{(n)}\hat{\sigma}_3\ \ (n = \overline{p+1, N}, p < N),$$
$$\widetilde{z}_{N+1} = 2z_p - z_{N+1},\ \hat{\widetilde{\eta}}^{(N+1)} = \hat{\eta}^{(N+1)}\hat{\sigma}_3/A,$$

где $A = 1$, *если* $\hat{\eta}^{(p)} \neq \hat{\sigma}_3$ *и* $A = 2$, *если* $\hat{\eta}^{(p)} = \hat{\sigma}_3$. *Тогда* $\hat{\widetilde{P}} = \hat{P}$ *и* $\hat{\widetilde{\eta}}^{(N+1)} \dots \hat{\widetilde{\eta}}^{(0)} = \hat{\eta}^{(N+1)} \dots \hat{\eta}^{(0)}$.

Доказательство. Заметим, что формулировка леммы корректна: если точка z_j ($j \in \{0, \dots, N+1\}$) — характеристическая точкой кривой γ, то определенная в лемме точка $\widetilde{z}_j$ обязательно является характеристической точкой кривой $\widetilde{\gamma}$. Для $j = \overline{0, p}$ это так, поскольку по условию леммы наборы характеристических данных участков кривых γ и $\widetilde{\gamma}$, соединяющих точки z_0 и z_p, совпадают, кроме матриц перехода в точке z_p, но $\hat{\widetilde{\eta}}^{(p)} \neq \hat{I}$, и, значит, условия (4) для точки $\widetilde{z}_p$ также выполняются. Для $n = \overline{p+1, N}$ (при $p < N$) соотношения $\widetilde{Q}_n \neq \widetilde{Q}_{n-1}$ и $Q_n \neq Q_{n-1}$, а также $\hat{\widetilde{\eta}}^{(n)} \neq \hat{I}$ и $\hat{\eta}^{(n)} \neq \hat{I}$ равносильны, а точка $\widetilde{z}_{N+1}$ — конечная точка кривой $\widetilde{\gamma}$, и, значит, её характеристическая точка.

Пусть кривая γ задаётся параметрически соотношением $z = V(t) (t \in [t_0, t_f])$. Рассмотрим кривую $\gamma^{(1)}$, задаваемую параметрически функцией

$$z := \begin{cases} V(t), & \text{если } t \in [t_0, t_p]; \\ 2z_p - V(t), & \text{если } t \in (t_p, t_f] \end{cases} \tag{19}$$

и имеющую набор характеристических данных $\widetilde{W}$ (очевидно, что кривая $\gamma^{(1)}$ проходит через все характеристические точки кривой $\widetilde{\gamma}$). Тогда подстановка в уравнение (1) доказывает, что если $u(z)$ — решение уравнения (1) класса D на кривой γ с набором характеристических данных W, то функция $w(z)$, определяемая соотношениями

$$\begin{gathered} w(z) := \begin{cases} u(z), & \text{если } z = V(t),\ t \in (t_0, t_p); \\ Au(2z_p - z), & \text{если } z = 2z_p - V(t),\ t \in (t_p, t_f); \end{cases} \\ w(z_0) := u(z_0),\ \ w'(z_0) := u'(z_0), \\ w(2z_p - z_{N+1}) := u(z_{N+1}),\ \ w'(2z_p - z_{N+1}) := u'(z_{N+1}), \end{gathered} \tag{20}$$

является решением уравнения (1) класса D на кривой $\gamma^{(1)}$ с набором характеристических данных $\widetilde{W}$. При этом в силу (20) $\hat{P}^{(1)} = \hat{P}$, где $\hat{P}^{(1)}$ — передаточная матрица вдоль кривой $\gamma^{(1)}$. Но $\hat{P}^{(1)} = \hat{\widetilde{P}}$ по лемме 1, и значит, $\hat{\widetilde{P}} = \hat{P}$.

Равенство $\hat{\widetilde{\eta}}^{(N+1)} \dots \hat{\widetilde{\eta}}^{(0)} = \hat{\eta}^{(N+1)} \dots \hat{\eta}^{(0)}$ проверяется подстановкой приведённых в условии леммы формул, связывающих матрицы перехода $\hat{\widetilde{\eta}}^{(j)}$ и $\hat{\eta}^{(j)}$ ($j \in \{0, \dots, N+1\}$). □

Перейдем к доказательству теоремы 1, сформулированной в разделе 2.

Доказательство. Опишем алгоритм, позволяющий за конечное число шагов из данного набора характеристических данных W построить простой набор $\widetilde{W}$, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Рассмотрим шаги трёх типов.

Шаг типа 1. Пусть существует число $p \in \{1, \ldots, N\}$ такое, что матрицы перехода из набора характеристических данных $W_p^{(s)}$ вида (5) на кривой $\gamma_p^{(s)}$ удовлетворяют условиям: $\hat{\eta}^{(n)} \notin \Omega_\sigma := \{A_1\hat{\sigma}_3,\ A_1 \in \mathbf{C}\backslash\{0\}\}$ ($n = \overline{1, p-1}$ при $p \geq 2$) и $\hat{\eta}^{(p)} = A_p\hat{\sigma}_3$ ($A_p \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$). Тогда в качестве набора характеристических данных $W_{p+1}^{(s)}$ возьмём указанный в лемме 6 набор $\widetilde{W}$ на кривой $\gamma_{p+1}^{(s)}$, получающейся из кривой $\gamma_p^{(s)}$ с помощью соотношений (19). Нетрудно убедиться, что $\hat{\tilde{\eta}}^{(p)} = A_p\hat{I}$, если $A_p \neq 1$, и $\hat{\tilde{\eta}}^{(p)} = 2\hat{I}$, если $A_p = 1$, и, значит $\hat{\tilde{\eta}}^{(n)} \notin \Omega_\sigma$ ($n = \overline{1, p}$). Повторяя это действие не более N раз, построим кривую $\gamma_{N+1}^{(s)}$ с набором характеристических данных $W_{N+1}^{(s)}$ таким, что $\hat{\tilde{\eta}}^{(n)} \notin \Omega_\sigma$ ($n = \overline{1, N}$). В силу леммы 6 при каждом переходе от $W_p^{(s)}$ к $W_{p+1}^{(s)}$ передаточная матрица, число характеристических точек и упорядоченное произведение вида (13) всех матриц перехода сохраняются, и, значит, они сохраняются на всём шаге типа 1.

Шаг типа 2. Пусть существует число $p \in \{1, \ldots, N\}$ такое, что матрицы перехода из набора характеристических данных $W_p^{(s)}$ вида (5) на кривой $\gamma^{(s)}$ удовлетворяют условиям: $\hat{\eta}^{(n)} \notin \Omega_I := \{A\hat{I},\ A \in \mathbf{C}\backslash\{1\}\}$ ($n = \overline{1, p-1}$ при $p \geq 2$), $\hat{\eta}^{(p)} = A_p\hat{I}$ ($A_p \in \mathbf{C}\backslash\{1\}$). На шаге этого типа кривая не меняется, а при изменении набора характеристических данных возможны два случая.

Первый случай: $Q_{p-1} \neq Q_p$. В качестве набора характеристических данных $W_{p+1}^{(s)}$ возьмём набор $\widetilde{W}$, отличающийся от набора $W_p^{(s)}$ только двумя матрицами перехода, а именно $\hat{\tilde{\eta}}^{(p)} = \hat{I}$, $\hat{\tilde{\eta}}^{(N+1)} = A_p\hat{\eta}^{(N+1)}$. Количество характеристичесских точек при этом не меняется (т.к. $Q_{p-1} \neq Q_p$).

Второй случай: $Q_{p-1} = Q_p$. Умножим матрицу перехода в конечной точке кривой на число A_p, и заменим матрицу перехода в точке z_p с $A_p\hat{I}$ на $\hat{I}$. Такая замена превратит точку z_p из характеристической в обычную и уменьшит номера всех последующих характеристических точек на единицу.

В обоих случаях передаточная матрица не изменится в силу формулы (7), а упорядоченное произведение вида (13) всех матриц перехода не изменится по построению.

Повторяя такое изменение набора характеристических данных не более N раз, получим набор, в котором все матрицы перехода (кроме, возможно, матриц в начальной и конечной точках кривой) не будут принадлежать множеству Ω_I. Поскольку при каждом описанном выше переходе от $W_p^{(s)}$ к $W_{p+1}^{(s)}$ число матриц перехода из множества Ω_σ, передаточная матрица и упорядоченное произведение вида (13) всех матриц перехода сохраняются, то они сохраняются и на всём шаге типа 2. Число характеристических точек при этом не возрастает.

Шаг типа 3. Пусть набор характеристических данных $W^{(s)}$ вида (5) на кривой $\gamma^{(s)}$ не удовлетворяет условиям (12), т.е. в силу леммы 3 кривая $\gamma^{(s)}$ содержит „невидимые петели". Последовательно удалим все „невидимые петли" кривой $\gamma^{(s)}$. В результате согласно лемме 5 получим новую кривую с набором характеристических данных, либо удовлетворяющим всем условиям (12), либо в котором $N = 0$, $z_0 = z_1$. При этом сохранятся передаточная матрица и упорядоченное произведение вида (13) всех матриц перехода, а число характеристических точек уменьшится минимум на одну.

Опишем теперь весь алгоритм построения простого набора характеристических данных $\widetilde{W}$, удовлетворяющего условиям теоремы 1. Для краткости матрицы перехода во внутренних характеристических точках кривой будем называть внутренними.

Пусть в наборе характеристических данных W вида (5) есть внутренние матрицы перехода из множества Ω_σ. С помощью шага типа 1, получим набор характеристических данных W_1, имеющий такое же число N характеристических точек, но не имеющий внутренних матриц перехода из множества Ω_σ.

Если в наборе данных W_1 есть внутренние матрицы перехода из множества Ω_I, то с помощью шага типа 2, получим набор характеристических данных W_2, не имеющий внутренних матриц перехода из множеств Ω_σ и Ω_I, количество характеристических точек N_2 в котором не более их числа в наборе W_1.

Если $N_2 = 0$ или набор W_2 удовлетворяет всем условиям вида (12), то процедура построения простого набора характеристических данных $\widetilde{W}$ завершена.

Если $N_2 \geq 1$ и набор характеристических данных W_2 не удовлетворяет хотя бы одному условию вида (12), то с помощью шага типа 3, получим набор W_3, либо удовлетворяющий всем условиям вида (12) и имеющий меньшее число N_3 характеристических точек, чем набор W_2, и, значит, W, либо в котором $N_3 = 0$. Если $N_3 = 0$, то процедура построения набора данных $\widetilde{W}$ завершена.

Если $N_3 \neq 0$, и в наборе данных W_3 есть внутренние матрицы перехода из множества $\Omega = \Omega_\sigma \cup \Omega_I$, то проделаем еще раз цикл из шагов типа 1 — 3. Поскольку каждый раз после выполнения шага типа 3 число характеристических точек в наборе обязательно уменьшается хотя бы на единицу, то простой набор данных $\widetilde{W}$ будет построен не более, чем через N таких циклов.

Шаги всех трёх типов, как отмечалось при их описании, сохраняют передаточную матрицу и упорядоченное произведение вида (13) всех матриц перехода. Поэтому найденный описанным способом простой набор характеристических данных $\widetilde{W}$ будет удовлетворять условиям (13). Теорема 1 доказана. □

4. Асимптотика передаточной матрицы вдоль простой кривой

Лемма 7. *Для любых $m \in \{0, \dots, N\}$ и $K \in \boldsymbol{N}$ существуют положительные числа $\lambda_{m,K}$, $C^{(0)}_{m,K}$ и два непрерывно дифференцируемых решения $F^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)$ соответствующего уравнения* (8)*, которые при всех $\lambda \neq 0$ и $z \in \boldsymbol{C}$ могут быть представлены в виде:*

(21)
$$F^{(m)}_{\pm K} = C^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)\exp\{\pm\lambda(z - z_m)\}, \frac{dF^{(m)}_{\pm K}}{dz} = \pm\lambda E^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)\exp\{\pm\lambda(z - z_m)\},$$

$$C^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^{K}\left(\pm\frac{1}{\lambda}\right)^k C_{m,k}(z) + \frac{B^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)}{\lambda^{K+1}}, \tag{22}$$

$$E^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^{K}\left(\pm\frac{1}{\lambda}\right)^k \left(C_{m,k}(z) + \frac{dC_{m,k-1}(z)}{dz}\right) + \frac{H^{(m)}_{\pm K}(z,\lambda)}{\lambda^{K+1}}, \tag{23}$$

где $B_{\pm K}^{(m)}(z,\lambda)$, $H_{\pm K}^{(m)}(z,\lambda)$ *и все* $C_{m,k}(z)$ *— целые функции* z, $C_{m,0}(z):=1$,

$$(24)\quad C_{m,k}(z_m):=0,\quad \frac{dC_{m,k}}{dz}:=-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2C_{m,k-1}}{dz^2}+Q_m(z)C_{m,k-1}(z)\right)\ (k=\overline{1,K}).$$

При этом, если $|\lambda|\geq\lambda_{m,K}$, *то* $F_{\pm K}^{(m)}(z,\lambda)$ *являются линейно независимыми решениями уравнения* (8) *в* $\boldsymbol{C}$ *и для всех* $z\in L_m$ (L_m *— отрезок, соединяющий точки* z_m *и* z_{m+1}) *справедливы неравенства:*

$$(25)\qquad |B_{\pm K}^{(m)}(z,\lambda)|\leq C_{m,K}^{(0)},\quad |H_{\pm K}^{(m)}(z,\lambda)|\leq C_{m,K}^{(0)}.$$

Доказательство. Формулы (21) – (24) проверяются подстановкой в (8), а оценки (25) на отрезке L_m следуют из известных результатов по асимптотическому разложению решений уравнений (8) на отрезке действительной оси при больших значениях модуля параметра λ [5]. □

Символами $O(1)$ и $\hat{O}(1)$ будем обозначать соответственно функции и матрицы функций параметра λ, вид которых для нас не важен, ограниченные при $|\lambda|>\lambda_{cr}$, где λ_{cr} – конечная величина (разная для разных функций и матриц).

Лемма 8. *Существует такое целое число* $K_0\geq 2$, *что для любого целого* $K\geq K_0$ *существует такое конечное* $\lambda_K>0$, *что при* $|\lambda|\geq\lambda_K$ *передаточную матрицу* $\hat{P}(\gamma,z_{N+1},z_0)$ *уравнения* (1) *класса* D *вдоль кривой* γ *с набором характеристических данных* (5), *удовлетворяющим условиям* (11) *или в котором* $N=0$, *можно записать в виде:*

$$(26)\qquad \hat{P}(\gamma,z_{N+1},z_0)=\hat{\eta}^{(N+1)}\hat{C}^{(f)}\hat{T}^{(N)}\hat{T}^{(N-1)}\dots\hat{T}^{(2)}\hat{T}^{(1)}\hat{T}^{(0)}\hat{A}^{(0)}\hat{\eta}^{(0)},$$

где $\hat{T}^{(0)}:=\hat{I}$,

$$(27)\qquad \hat{A}^{(0)}:=-\frac{1}{D_K^{(0)}}\begin{pmatrix}\lambda E_{-K}^{(0)}(z_0,\lambda) & C_{-K}^{(0)}(z_0,\lambda)\\ \lambda E_{+K}^{(0)}(z_0,\lambda) & -C_{+K}^{(0)}(z_0,\lambda)\end{pmatrix},$$

$$(28)\quad \hat{C}^{(f)}:=\begin{pmatrix}C_{+K}^{(N)}(z_{N+1},\lambda)\exp(\lambda\Delta z_N) & C_{-K}^{(N)}(z_{N+1},\lambda)\exp(-\lambda\Delta z_N)\\ \lambda E_{+K}^{(N)}(z_{N+1},\lambda)\exp(\lambda\Delta z_N) & -\lambda E_{-K}^{(N)}(z_{N+1},\lambda)\exp(-\lambda\Delta z_N)\end{pmatrix},$$

$$(29)\quad \hat{T}^{(n)}:=\begin{pmatrix}t_{1+}^{(n)}\exp(\lambda\Delta z_{n-1}) & t_{-}^{(n)}\exp(-\lambda\Delta z_{n-1})\\ t_{+}^{(n)}\exp(\lambda\Delta z_{n-1}) & t_{1-}^{(n)}\exp(-\lambda\Delta z_{n-1})\end{pmatrix}\ (n=\overline{1,N}\ \text{при}\ N\geq 1).$$

Здесь Δz_m ($m=\overline{0,N}$) *определены в* (12), $D_K^{(0)}:=-\lambda(C_{+K}^{(0)}(z_0,\lambda)E_{-K}^{(0)}(z_0,\lambda)+C_{-K}^{(0)}(z_0,\lambda)E_{+K}^{(0)}(z_0,\lambda))=-2\lambda(1+O(1)/\lambda)\neq 0$, *и при* $N\geq 1$ *для* $t_{1\pm}^{(n)},t_{\pm}^{(n)}$ ($n=\overline{1,N}$) *справедливы следующие соотношения:*

(30)

$$t_{1\pm}^{(n)}=\pm\eta_{12}^{(n)}\lambda\left(\frac{1}{2}+\frac{O(1)}{\lambda}\right)+\left(\eta_{11}^{(n)}+\eta_{22}^{(n)}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{O(1)}{\lambda}\right)\pm\frac{\eta_{21}^{(n)}}{\lambda}\left(\frac{1}{2}+\frac{O(1)}{\lambda}\right),$$

$$(31)\qquad t_{\pm}^{(n)} = \begin{cases} \pm\eta_{12}^{(n)}\lambda\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{O(1)}{\lambda}\right) \mp \dfrac{\eta_{21}^{(n)}}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{O(1)}{\lambda}\right)+ & \\ \qquad +(\eta_{11}^{(n)}-\eta_{22}^{(n)})\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{O(1)}{\lambda}\right), & \hat{\eta}^{(n)} \neq \hat{I}; \\ \qquad -\left(\mp\dfrac{1}{2\lambda}\right)^{m_n+2}\delta_n\left(1+\dfrac{O(1)}{\lambda}\right), & \hat{\eta}^{(n)} = \hat{I}, \end{cases}$$

где целые числа m_n ($m_n \in [0, K_0-2]$) и комплексные числа $\delta_n \neq 0$ не зависят от λ.

Доказательство. В силу леммы 7 для любого $K \in \mathbf{N}$ и всех $m \in \{0, \dots, N\}$ существуют такие числа $\lambda_{m,K} > 0$, что при $|\lambda| \geq \lambda_{m,K}$ решения $u_1^{(m)}(z), u_2^{(m)}(z)$ соответствующего уравнения (8) можно представить, как линейную комбинацию решений $F_{\pm K}^{(m)}(z,\lambda)$. Поэтому при $|\lambda| \geq \lambda_K := \max\{\lambda_{m,K}, m = \overline{0,N}\}$ формулу (7) можно записать в виде (26), где матрицы $\hat{T}^{(n)}(n = \overline{1,N}$ при $N \geq 1)$, $\hat{A}^{(0)}$ и $\hat{C}^{(f)}$ удовлетворяют формулам (27) – (29). При этом

$$(32)\quad \begin{pmatrix} t_{1+}^{(n)} & t_{-}^{(n)} \\ t_{+}^{(n)} & t_{1-}^{(n)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{D_K^{(n)}}\begin{pmatrix} C_{+K}^{(n-1)}(z_n,\lambda)\tau_{1+}^{(n)} & C_{-K}^{(n-1)}(z_n,\lambda)\tau_{-}^{(n)} \\ C_{+K}^{(n-1)}(z_n,\lambda)\tau_{+}^{(n)} & C_{-K}^{(n-1)}(z_n,\lambda)\tau_{1-}^{(n)} \end{pmatrix} + \frac{\hat{O}(1)}{\lambda^K},$$

где $D_K^{(n)} := -\lambda(C_{+K}^{(n)}(z_n,\lambda)E_{-K}^{(n)}(z_n,\lambda) + C_{-K}^{(n)}(z_n,\lambda)E_{+K}^{(n)}(z_n,\lambda))$,

(33)

$$\tau_{1\pm}^{(n)} := \left(\pm\lambda^2\eta_{12}^{(n)}\varphi_{\pm}^{(n-1)}(z_n)\varphi_{\mp}^{(n)}(z_n) + \lambda\eta_{11}^{(n)}\varphi_{\mp}^{(n)}(z_n) + \lambda\eta_{22}^{(n)}\varphi_{\pm}^{(n-1)}(z_n) \pm \eta_{21}^{(n)}\right),$$

(34)

$$\tau_{\pm}^{(n)} := \left(\pm\lambda^2\eta_{12}^{(n)}\varphi_{\pm}^{(n-1)}(z_n)\varphi_{\pm}^{(n)}(z_n) + \lambda\eta_{11}^{(n)}\varphi_{\pm}^{(n)}(z_n) - \lambda\eta_{22}^{(n)}\varphi_{\pm}^{(n-1)}(z_n) \mp \eta_{21}^{(n)}\right),$$

$$(35)\qquad \varphi_{\pm}^{(n)}(z,\lambda) := \frac{E_{\pm K}^{(n)}(z,\lambda)}{C_{\pm K}^{(n)}(z,\lambda)} = 1 + \frac{O(1)}{\lambda^2} \ \ (z \in L_m),$$

$$(36)\qquad D_K^{(m)} = -2\lambda\left(1+\frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \ \ (m = \overline{0,N}).$$

Оценки в последних двух формулах следуют из соотношений (22) — (25).

При $N \geq 1$ подстановка формул (22), (33) — (36) в соотношение (32) с учетом условий (11) полностью доказывает формулу (30), а также формулу (31) для случая $\hat{\eta}^{(n)} \neq \hat{I}$ $(n = \overline{1,N})$. Если $\hat{\eta}^{(n)} = \hat{I}$, то по определению 1 (в силу (4)) $Q_n \neq Q_{n-1}$, и соотношение (31) следует из сравнения формул (7), (12), (14) работы [12] с формулой (29) настоящей работы. □

Заметим, что входящие в формулу (31) для случая $\hat{\eta}^{(n)} = \hat{I}$ $(n = \overline{1,N}$ при $N \geq 1)$ числа m_n и δ_n равны соответственно минимальному порядку производной от потенциала вдоль кривой γ, которая имеет скачок в точке z_n, и величине этого скачка ([12], формулы (18), (19)).

Лемма 9. *При выполнении* (14) *элементы* $c^{(f)}_{\eta,\alpha\nu}$ ($\nu \in \{1,2\}$) *и* $a^{(0)}_{\eta,\kappa\beta}$ ($\kappa \in \{1,2\}$) *соответственно матриц* $\hat{C}^{(f)}_{\eta} := \hat{\eta}^{(N+1)}\hat{C}^{(f)}$ *и* $\hat{A}^{(0)}_{\eta} := \hat{A}^{(0)}\hat{\eta}^{(0)}$ *при больших значениях* $|\lambda|$ *можно представить в виде*

$$\begin{aligned} c^{(f)}_{\eta,\alpha\nu}(\lambda) = \exp\{-(-1)^{\nu}\lambda\Delta z_N\}\Big[\eta^{(N+1)}_{\alpha 1}\left(1+\frac{O(1)}{\lambda}\right)- \\ -(-1)^{\nu}\eta^{(N+1)}_{\alpha 2}\lambda\left(1+\frac{O(1)}{\lambda}\right)\Big] \neq 0 \quad (\nu \in \{1,2\}), \end{aligned} \tag{37}$$

$$a^{(0)}_{\eta,\kappa\beta}(\lambda) = \frac{\eta^{(0)}_{1\beta}}{2}\left(1+\frac{O(1)}{\lambda}\right) - \frac{(-1)^{\kappa}}{2\lambda}\eta^{(0)}_{2\beta}\left(1+\frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \quad (\kappa \in \{1,2\}). \tag{38}$$

Доказательство. С учетом соотношений (14), (22), (23), (25) формулы (37) и (38) следуют из формул (28) и (27), (36) соответственно. □

Будем обозначать $(N+1)-$мерные вектора буквой со стрелкой сверху, а их скалярное произведение — круглыми скобками. Например, $\vec{\Delta}z := (\Delta z_0, \Delta z_1, \ldots, \Delta z_N)$, $(\vec{\alpha}_s, \vec{\Delta}z) := \sum\limits_{m=0}^{N} \alpha^{(s)}_m \Delta z_m$, $\vec{\alpha}_s := (\alpha^{(s)}_0, \alpha^{(s)}_1, \ldots, \alpha^{(s)}_N)$. Здесь

$$s = 1 + \sum_{m=0}^{N}\left(1+\alpha^{(s)}_m\right)2^{m-1}, \;\; \alpha^{(s)}_m \in \{\pm 1\} \;\; (m = \overline{0,N}), \tag{39}$$

т.е. $s \in \{1, \ldots, 2^{N+1}\}$ (как в двоичной системе счисления).

Поскольку при $N \geq 1$ для простой кривой $|\eta^{(n)}_{12}| + |\eta^{(n)}_{11} \pm \eta^{(n)}_{22}| + |\eta^{(n)}_{21}| \neq 0$ для любых $n \in \{1, \ldots, N\}$, то, учитывая лемму 9, из леммы 8 имеем лемму 10.

Лемма 10. *Пусть* γ *- простая кривая. Тогда при выполнении условий* (14) *сущетвует такое конечное* λ_0*, что при* $|\lambda| \geq \lambda_0$ *элемент* $p_{\alpha\beta}$ *передаточной матрицы* $\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0)$ *можно записать в виде:*

$$p_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{2^{N+1}} d^{(s)}_{\alpha\beta}(\lambda)\exp\{\lambda h_s\}. \tag{40}$$

Здесь коэффициенты $h_s := \left(\vec{\alpha}_s, \vec{\Delta}z\right)$ *не зависят от* λ *и все функции* $d^{(s)}_{\alpha\beta}(\lambda)$ *можно представить в виде:*

$$d^{(s)}_{\alpha\beta}(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{m^{(s)}_{\alpha\beta}}\delta^{(s)}_{\alpha\beta}\left(1+\frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \quad (s = \overline{1, 2^{N+1}}),$$

где целые числа $m^{(s)}_{\alpha\beta} \in [-N-1, NK_0+1]$ *и комплексные числа* $\delta^{(s)}_{\alpha\beta} \neq 0$ *не зависят от* λ.

Часть показателей экспонент в правых частях равенств (40) может совпадать и возникает вопрос: не сокращаются ли в (40) коэффициенты при экспонентах, наиболее быстро растущих с ростом $|\lambda|$? Отрицательный ответ на этот вопрос для элементов передаточной матрицы уравнения (1) класса D вдоль простой кривой даёт лемма 11, аналогичная лемме 4 работы [12].

Лемма 11. *Пусть* $h_{max} := \max\{|h_s|, s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$*, где* $h_s = (\vec{\alpha}_s, \vec{\Delta}z)$*. Тогда существуют хотя бы два различных числа* $s_0 \in \{1, \ldots, 2^{N+1}\}$ *такие, что* $|h_{s_0}| = h_{max}$*, причём если* $\vec{\Delta}z \neq \vec{0}$*, то* $h_{max} > 0$*. Кроме того, при выполнении* *условий* (12) *для любого коэффициента* h_{s_0} *такого, что* $|h_{s_0}| = h_{max}$, *и для любого числа* $s \in \{1,\dots,2^{N+1}\}\backslash\{s_0\}$ *справедливо неравенство* $h_{s_0} \neq h_s$.

5. Доказательство теоремы 2

По условию теоремы кривая γ является простой. Поэтому из лемм 10, 11 получаем, что при выполнении обоих условий (14) существует минимум два противоположно направленных луча, исходящих из нуля комплексной плоскости параметра λ (и значит, минимум один луч, исходящий из нуля комплексной плоскости спектрального параметра ρ), такие, что среди 2^{N+1} слагаемых в (40) для элемента $p_{\alpha\beta}$ матрицы $\hat{P}$ существует ровно одно слагаемое, имеющее наибольший экспоненциальный рост с показателем $h_{max} > 0$ при $\lambda \to \infty$ ($\rho \to \infty$) вдоль каждого из этих лучей. С учетом леммы 1 получаем, что в этом случае элемент $p_{\alpha\beta}$ передаточной матрицы $\hat{P}$ является целой функцией ρ порядка $1/2$ и нормального типа [14] (глава I, §1). Если нарушено первое или второе из условий (14), то $p_{\alpha\beta}(\lambda) \equiv 0$ в силу (7). С учетом вышеизложенного в обратную сторону теорема 2 легко доказывается методом от противного.

6. Виды спектров краевых задач с распадающимися граничными условиями (доказательство теоремы 3)

Рассмотрим краевую задачу с распадающимися граничными условиями (15) для уравнения (1) класса D на кривой γ. Будем называть её краевой задачей D и искать её нетривиальное решение в виде:

$$u(z) = \upsilon_1 u_1(z) + \upsilon_2 u_2(z), \quad |\upsilon_1| + |\upsilon_2| \neq 0, \tag{41}$$

где $u_1(z), u_2(z)$ — решения уравнения (1) класса D на кривой γ, удовлетворяющие условиям (6) в её начальной точке z_0. Подставляя (41) в граничные условия (15), получим следующую систему уравнений для коэффициентов υ_1, υ_2:

$$\Theta_{21}\upsilon_1 - \Theta_{11}\upsilon_2 = 0, \quad (\mu_{11}p_{11} + \mu_{12}p_{21})\upsilon_1 + (\mu_{11}p_{12} + \mu_{12}p_{22})\upsilon_2 = 0. \tag{42}$$

Здесь $p_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta \in \{1,2\})$ — элементы передаточной матрицы $\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0)$ уравнения (1) класса D вдоль кривой γ. Система уравнений (42) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда её дискрименант D_0 равен нулю:

$$D_0(\rho) := \Theta_{21}\mu_{11}p_{12} + \Theta_{21}\mu_{12}p_{22} + \Theta_{11}\mu_{11}p_{11} + \Theta_{11}\mu_{12}p_{21} = 0. \tag{43}$$

Функцию D_0 назовём характеристической функцией краевой задачи D.

Очевидно, что если $\Theta_{21} = \Theta_{11} = 0$ или $\mu_{11} = \mu_{12} = 0$, то краевая задача вырождается в начальную. Условие (43) при этом выполнено тождественно.

Пусть справедливы соотношения (16). Рассмотрим матрицу

$$\hat{R}(\gamma, z_{N+1}, z_0) := \hat{\mu}\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0)\hat{\Theta}, \tag{44}$$

которую будем называть характеристической матрицей краевой задачи D, т.к. её элемент r_{11} совпадает с характеристической функцией D_0.

В силу (26), (44) в условиях леммы 8 матрицу $\hat{R}$ можно представить в виде

$$\hat{R}(\gamma, z_{N+1}, z_0) = \hat{\tilde{\mu}}\hat{C}^{(f)}\hat{T}^{(N)}\hat{T}^{(N-1)}\dots\hat{T}^{(2)}\hat{T}^{(1)}\hat{T}^{(0)}\hat{A}^{(0)}\hat{\tilde{\Theta}}, \tag{45}$$

где $\hat{\tilde{\mu}}$, $\hat{\tilde{\Theta}}$ определены в (17), а все остальные величины описаны в лемме 8.

Формула (45) получается из формуды (26) заменой матриц $\hat{\eta}^{(0)}$ и $\hat{\eta}^{(N+1)}$ на матрицы $\hat{\tilde{\Theta}}$ и $\hat{\tilde{\mu}}$ соответственно. Поэтому для элемента r_{11} матрицы $\hat{R}$ справедливы леммы 12 и 13, аналогичные лемме 10 и теореме 2 соответственно.

Лемма 12. *Пусть γ — простая кривая. Тогда при выполнении условий* (18) *сущетвует такое конечное λ_0, что при $|\lambda| \geq \lambda_0$ элемент r_{11} характеристической матрицы* (44) *краевой задачи D может быть записан в виде:*

$$r_{11} = \sum_{s=1}^{2^{N+1}} d_r^{(s)}(\lambda) \exp\left\{\lambda h_s\right\}. \tag{46}$$

Здесь коэффициенты $h_s = \left(\vec{\alpha}_s, \vec{\Delta} z\right)$ не зависят от λ и все функции $d_r^{(s)}(\lambda)$ можно представить в виде:

$$d_r^{(s)}(\lambda) = \lambda^{m_r^{(s)}} \delta_r^{(s)} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \quad (s = \overline{1, 2^{N+1}}), \tag{47}$$

где целые числа $m_r^{(s)} \in [-NK_0 - 1, N+1]$ и комплексные числа $\delta_r^{(s)} \neq 0$ не зависят от λ.

Лемма 13. *Элемент r_{11} характеристической матрицы $\hat{R}$ краевой задачи с граничными условиями* (15) *для уравнения* (1) *класса D на простой кривой γ с набором характеристических данных* (5) *является целой функцией ρ порядка* 1/2 *и нормального типа* (*тождественно равен нулю*) *тогда и только тогда, когда выполнены оба* (*не выполнено хотя бы одно*) *из условий* (18).

Докажем теперь теорему 3, сформулированную в конце раздела 2.

Доказательство. Как уже указывалось, $D_0 = r_{11}$. Рассмотрим оба возможных типа простого набора характеристических данных (5) кривой γ.

Пусть набор W — точечный. Тогда $r_{11} = r_{11}^{(0)}$ в силу леммы 2 и формул (17), (44), и, значит, D_0 не зависит от λ. Поэтому, что если $r_{11}^{(0)} \neq 0$, то спектр краевой задачи пуст, а если $r_{11}^{(0)} = 0$, то он совпадает со всей комплексной плоскостью.

Если набор W отличен от точечного, т.е. кривая γ — простая, то в силу леммы 13 и свойств целых функций порядка 1/2 и нормального типа [14] спектр рассматриваемой краевой задачи совпадает со всей комплексной плоскостью (счетный) тогда и только тогда, когда не выполнено хотя бы одно (выполнены оба) из условий (18).

Комбинируя перечисленные случаи, получаем теорему 3. □

7. Угловая плотность счётного спектра (доказательство теоремы 4)

Выражения вида (46) часто возникают в различных ситуациях, и поэтому методы их исследования хорошо разработаны, причём с разными целями и с разных точек зрения [4, 14, 15, 16]. Обычно эти методы начинаются с построения на комплексной плоскости λ выпуклого многоугольника содержащего все точки, соответствующие коэффициентам h_s ($s = \overline{1, 2^{N+1}}$) в показателях экспонент (точнее их комплексно сопряженным величинам). Однако в нашем случае, учитывая большое число этих коэффициентов и их особую структуру, на начальном этапе удобнее не пользоваться геометрической интерпретацией, а из формул (46), (47) сразу найти индикатор целой функции $D_0(\lambda)$ [14].

Для простой кривой определенные в (12) числа $\Delta z_m \neq 0$, и их можно представить в виде

$$\Delta z_m = \chi_m \exp\{i\psi_m\}, \ \psi_m \in [-\pi;\pi), \ \chi_m > 0 \ \ (m \in \{0,\dots,N\}), \tag{48}$$

где i — мнимая единица. Положим также

$$\lambda = |\lambda| \exp\{i\psi\}, \ \psi \in (-\pi/2; 3\pi/2] \ \ (\text{при } \lambda \neq 0); \tag{49}$$

$$\left(\widetilde{\psi}_m, \widetilde{\alpha}_m^{(s)}\right) := \begin{cases} \left(\psi_m, \alpha_m^{(s)}\right), & \text{если } \psi_m \in [0;\pi); \\ \left(\pi + \psi_m, -\alpha_m^{(s)}\right), & \text{если } \psi_m \in [-\pi;0) \end{cases} \quad (m \in \{0,\dots,N\}), \tag{50}$$

где $\alpha_m^{(s)} \in \{\pm 1\}$. Очевидно, что $\widetilde{\psi}_m \in [0;\pi)$, $\widetilde{\alpha}_m^{(s)} \in \{\pm 1\}$.

В силу (48) — (50) при $\lambda \neq 0$ для всех чисел $s = \overline{1, 2^{N+1}}$ имеем

$$\widetilde{h}_s(\psi) := \frac{\Re\{\lambda h_s\}}{|\lambda|} = \sum_{m=0}^{N} \alpha_m^{(s)} \chi_m \cos(\psi + \psi_m) = \sum_{m=0}^{N} \widetilde{\alpha}_m^{(s)} \chi_m \cos\left(\psi + \widetilde{\psi}_m\right), \tag{51}$$

где коэффициенты h_s были определены в лемме 10.

Лемма 14. *Пусть* $\lambda \neq 0$, $\widetilde{h}_{max}(\psi) := \max\{\widetilde{h}_s(\psi), s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$, *где величины* ψ *и* $\widetilde{h}_s(\psi)$ *определены в* (49) *и* (51) *соответственно, и*

$$H(\psi) := \sum_{m=0}^{N} \chi_m \left| \cos\left(\psi + \widetilde{\psi}_m\right) \right| \geq 0. \tag{52}$$

Тогда для любого $\psi \in (-\pi/2; 3\pi/2] \backslash \left\{\pi/2 - \widetilde{\psi}_m, 3\pi/2 - \widetilde{\psi}_m\right\}_0^N$ *выполнено равенство* $\widetilde{h}_{max}(\psi) = H(\psi)$, *и существует ровно одно зависящее от* ψ *число* $s_0 \in \{1,\dots,2^{N+1}\}$, *такое, что* $\widetilde{h}_{s_0}(\psi) = H(\psi) > 0$.

Доказательство. Для всех $m \in \{0,\dots,N\}$ по условию леммы $\cos\left(\psi + \widetilde{\psi}_m\right) \neq 0$, и, значит, в силу соотношений (50) $\cos(\psi + \psi_m) \neq 0$. Положим $\alpha_m^{(s_0)}(\psi) = \operatorname{sign}\{\cos(\psi + \psi_m)\}$. Тогда для $s_0(\psi) := 1 + \sum\limits_{m=0}^{N} \left(1 + \alpha_m^{(s_0)}(\psi)\right) 2^{m-1}$ из (39), (51) и (52) имеем $\widetilde{h}_{s_0}(\psi) = H(\psi)$. В выражении (52) для $H(\psi)$ все слагаемые положительны. Если же индекс $s \in \{1,\dots,2^{N+1}\} \backslash \{s_0(\psi)\}$, то в сумме (51), слагаемые в которой равны по модулю соответствующим слагаемым в выражении (52), в силу (39) будет как минимум одно отрицательное слагаемое, и значит $\widetilde{h}_s(\psi) < H(\psi)$. □

Лемма 15. *Пусть на простой кривой* γ *задано уравнение* (1) *класса* D. *Тогда при выполнении условий* (14) *или* (18) *соответственно элемент* $p_{\alpha\beta}$ *передаточной матрицы* $\hat{P}$ *вдоль кривой* γ *или элемент* r_{11} *характеристической матрицы* $\hat{R}$ *краевой задачи* D *является целой функцией параметра* $\lambda = |\lambda| \exp\{i\psi\}$ *первого порядка и вполне регулярного роста с индикатором* $H(\psi)$, *задаваемым формулой* (52).

Доказательство. В силу лемм 10, 12 и 14 для любого числа $\psi \in (-\pi/2; 3\pi/2] \setminus \{\pi/2 - \widetilde{\psi}_m, 3\pi/2 - \widetilde{\psi}_m\}_0^N$ при выполнении условий (14) среди 2^{N+1} слагаемых в формуле (40) для элемента $p_{\alpha\beta}$ матрицы $\hat{P}$, а при выполнении условий (18) в формуле (46) для элемента r_{11} матрицы $\hat{R}$, существует ровно одно слагаемое, имеющее наибольший экспоненциальный рост с показателем $H(\psi) > 0$ при $|\lambda| \to \infty$ вдоль луча $|\lambda| \exp\{i\psi\}$, и значит, каждый из указанных элементов при выполнении сформулированных условий является функцией вполне регулярного роста на всех этих лучах с индикатором $H(\psi)$. Утверждение леммы следует из непрерывности функции $H(\psi)$ и индикатора целой функции [14] (глава I, §16) и того, что целая функция вполне регулярного роста на лучах, образующих всюду плотное множество, есть функция вполне регулярного роста на всей плоскости [14] (глава III, §1). $\square$

Пусть множество опредедённых в (50) чисел $\{\widetilde{\psi}_m\}_0^N$ содержит J различных значений ω_j $(j = \overline{1, J}$, $1 \le J \le N+1)$, которые пронумерованы так, что

$$0 \le \omega_1 < \ldots < \omega_J < \pi. \tag{53}$$

Разобъём множество чисел $\{0, \ldots, N\}$ на J непересекающихся непустых подмножеств N_j таким образом, что $\widetilde{\psi}_n = \omega_j$ тогда и только тогда, когда $n \in N_j$. В этих обозначениях выражение (52) для индикатора $H(\psi)$ примет вид:

$$H(\psi) = \sum_{j=1}^{J} \chi_j^{(0)} |\cos(\psi + \omega_j)|, \quad \chi_j^{(0)} = \sum_{n \in N_j} \chi_n. \tag{54}$$

Из (54), очевидно, что $H(\psi + \pi) = H(\psi)$. Поэтому в дальнейшем можно рассмотреть любой интервал значений ψ, превышащий π, например, интервал $(-\pi/2 - \omega_1; 3\pi/2 - \omega_J)$. Заметим, что ни один из косинусов в формуле (54) не обращается в ноль при $\psi \in \Gamma_j := (\pi/2 - \omega_j; \pi/2 - \omega_{j-1})$ $(j \in \{1, \ldots, J+1\})$, где

$$\omega_0 := \omega_J - \pi, \quad \omega_{J+1} := \pi + \omega_1. \tag{55}$$

Поэтому, раскрывая в формуле (54) модули, используя формулу косинуса суммы и приводя подобные члены, получим, что

$$H(\psi) = a_j \cos\psi + b_j \sin\psi, \ \psi \in [\pi/2 - \omega_j; \pi/2 - \omega_{j-1}] \ (j \in \{1, \ldots, J+1\}), \tag{56}$$

где a_j, b_j — некоторые действительные числа.

В силу леммы 15 в случае простой кривой и выполнения условий (18) характеристическая функция D_0 — целая функция λ первого порядка и вполне регулярного роста с индикатором, задаваемым равносильными формулами (52), (54) и (56). Пусть $n(r, \theta_1, \theta_2)$ — число нулей функции $D_0(\lambda)$ в секторе $\theta_1 \le \arg\lambda \le \theta_2$, $|\lambda| \le r$, где $\theta_1 \in \Gamma_{j+1}, \theta_2 \in \Gamma_j$. Тогда пользуясь теоремой 3 главы III работы [14] и формулами (54), (56) получим, что для угловой плотности

$$\Delta(\theta_1, \theta_2) := \lim_{r \to \infty} \frac{n(r, \theta_1, \theta_2)}{r} \tag{57}$$

нулей функции $D_0(\lambda)$ внутри угла (θ_1, θ_2) справедливы следующие формулы

$$\Delta(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\pi} \left(\left.\frac{dH}{d\psi}\right|_{\psi = \pi/2 - \omega_j + 0} - \left.\frac{dH}{d\psi}\right|_{\psi = \pi/2 - \omega_j - 0} \right) = \frac{\chi_j^{(0)}}{\pi}. \tag{58}$$

Здесь первое равенство получается после подстановки (56) в формулы (3.25), (3.26) работы [14], а второе равенство следует из того, что в силу (54) для любого $j \in \{1, \dots, J\}$

$$H(\psi) = h^{(j)}(\psi) + \begin{cases} \chi_j^{(0)} \cos(\psi + \omega_j), & \text{если } \psi \in (\pi/2 - \omega_{j+1}; \pi/2 - \omega_j); \\ -\chi_j^{(0)} \cos(\psi + \omega_j), & \text{если } \psi \in (\pi/2 - \omega_j; \pi/2 - \omega_{j-1}), \end{cases}$$

где функция $h^{(j)}(\psi)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(\pi/2 - \omega_{j+1}; \pi/2 - \omega_{j-1})$.

Предложение 1. *Пусть $F(\rho)$ — целая функция ρ порядка $1/2$. Тогда если $\rho = \lambda^2$, то функция $F_\lambda(\lambda) := F(\lambda^2)$ — четная целая функция λ первого порядка. При этом, если в секторе $\theta_1 \le \arg\lambda \le \theta_2$ $(0 \le \theta_2 - \theta_1 < \pi)$, $0 < |\lambda| \le r$ комплексной λ−плоскости функция F_λ имеет M_0 нулей некоторой кратности, то столько же нулей такой же кратности функция $F(\rho)$ имеет в секторе $2\theta_1 \le \arg\rho \le 2\theta_2$, $0 < |\rho| \le r^2$ комплексной ρ-плоскости.*

Формула (58) с учётом формулы (49) и предложения 1 доказывает теорему 4, сформулированную в конце раздела 2.

8. Доказательство теоремы 5

Из формул (49) и (58) следует, что при выполнении условий (18) нули характеристической функции $D_0(\lambda)$ краевой задачи класса D на простой кривой γ асимптотически (при $|\lambda| \to \infty$) лежат в окрестностях конечного числа J $(1 \le J \le N+1)$ различных прямых, параметрически задаваемых функциями $\lambda = \lambda^{(j)}(t) := t\exp\{i(\pi/2 - \omega_j)\}$ $(t \in \mathbf{R},\ j = \overline{1, J})$, где величины ω_j определены в соотношениях (53) и перед ними. Заметим, что в силу формул (48), (50) и (53) множество прямых, заданных параметрически соотношениями $z = t\exp\{i\omega_j\}$ $(t \in \mathbf{R},\ j = \overline{1, J})$ совпадает с множеством всех прямых, проходящих через начало координат комплексной плоскости z, каждая из которых параллельна хотя бы одному из отрезков L_m $(m = \overline{0, N})$, соединяющих последовательные характеристические точки простой кривой.

Для более детального изучения особенностей асимптотики спектра вблизи конкретной прямой $\lambda = \lambda^{(j)}(t)$ $(t \in \mathbf{R},\ j \in \{1, \dots, J\})$ полезно выделить в формуле (46) члены, которые являются главными в некоторой окрестности этой прямой. Поскольку $D_0(\lambda)$ является четной функцией λ, то можно ограничиться рассмотрением окрестности луча $\lambda = t\exp\{i(\pi/2 - \omega_j)\}$, $t > 0$.

Лемма 16. *Пусть $\varepsilon_1^{(j)} := \min\{\omega_j - \omega_{j-1},\ \omega_{j+1} - \omega_j\}$ и $\delta \in [-\varepsilon_1^{(j)}/2, \varepsilon_1^{(j)}/2]$ $(j \in \{1, \dots, J\})$. Тогда при $J \ge 2$ для любого числа $\kappa \in \{1, \dots, J\} \backslash \{j\}$*

$$|\sin(\omega_j - \delta - \omega_\kappa)| \ge \sin\left(\varepsilon_1^{(j)}/2\right) > 0. \tag{59}$$

Доказательство. Пусть для определённости $j > \kappa$. Тогда, учитывая соотношения (53), (55), определение величины $\varepsilon_1^{(j)}$ и ограничение на область изменения переменной δ, имеем: $0 < \varepsilon_1^{(j)}/2 \le (\omega_j - \omega_{j-1})/2 \le (\omega_j - \omega_{j-1})/2 + \omega_{j-1} - \omega_\kappa = \omega_j - (\omega_j - \omega_{j-1})/2 - \omega_\kappa \le \omega_j - \varepsilon_1^{(j)}/2 - \omega_\kappa \le \omega_j - \delta - \omega_\kappa \le \omega_j + \varepsilon_1^{(j)}/2 - \omega_\kappa \le \omega_j + (\omega_{j+1} - \omega_j)/2 - \omega_\kappa = \omega_{j+1} - \omega_\kappa - (\omega_{j+1} - \omega_j)/2 \le \omega_{J+1} - \omega_1 - (\omega_{j+1} - \omega_j)/2 = \pi - (\omega_{j+1} - \omega_j)/2 \le \pi - \varepsilon_1^{(j)}/2 < \pi$. Таким образом,

$\omega_j - \delta - \omega_\kappa \in \left[\varepsilon_1^{(j)}/2, \pi - \varepsilon_1^{(j)}/2\right] \subset (0, \pi)$, что и доказывает лемму. Аналогично рассматривается случай $j < \kappa$. $\square$

Пусть

$$\lambda = |\lambda| \exp\{i(\pi/2 - \omega_j + \delta)\},\ j \in \{1, \ldots, J\},\ |\lambda| \geq \lambda_0 > 0,$$
$$\delta \in [-\varepsilon^{(j)}, \varepsilon^{(j)}],\ \ 0 < \varepsilon^{(j)} \leq \varepsilon_1^{(j)}/2. \tag{60}$$

Положим

$$\alpha_{m,j}^{(0)} := \operatorname{sign}\left\{\sin\left(\omega_j - \psi_m\right)\right\},\ \ S_0^{(j)} := 1 + \sum_{m=0, m \notin N_j}^{N} \left(1 + \alpha_{m,j}^{(0)}\right) 2^{m-1}.$$

Заметим, что $S_0^{(1)} = 1$ при $J = 1$. Если значение индекса s принадлежит множеству чисел

$$S_j := \left\{ S_0^{(j)} + \sum_{n \in N_j} \left(1 + \alpha_n^{(s)}\right) 2^{n-1}, \alpha_n^{(s)} \in \{-1, 1\} \right\}, \tag{61}$$

то, учитывая формулу (39), устанавливающую взаимно однозначное соответствие значения индекса s со значениями всех компонент вектора $\vec{\alpha}_s$, получим, что коэффициент $h_s = \left(\vec{\alpha}_s, \vec{\Delta} z\right)$ можно представить в виде

$$h_s = \sum_{m=0, m \notin N_j}^{N} \alpha_{m,j}^{(0)} \Delta z_m + \sum_{n \in N_j} \alpha_n^{(s)} \Delta z_n = H_0^{(j)} + \Delta h_s^{(j)}\ \ (s \in S_j). \tag{62}$$

Здесь

$$H_0^{(j)} := \sum_{m=0, m \notin N_j}^{N} \alpha_{m,j}^{(0)} \Delta z_m - \sum_{n \in N_j} \beta_n \Delta z_n, \tag{63}$$

$$\beta_n := \begin{cases} 1, & \text{если}\ \ \psi_n \in [0; \pi); \\ -1, & \text{если}\ \ \psi_n \in [-\pi; 0) \end{cases} \ \ (n \in N_j),$$

$$\Delta h_s^{(j)} := \sum_{n \in N_j} (\alpha_n^{(s)} + \beta_n) \Delta z_n = \exp\left\{i\omega_j\right\} \Psi_s^{(j)},\ \ \Psi_s^{(j)} := \sum_{n \in N_j} (\widetilde{\alpha}_n^{(s)} + 1) \chi_n. \tag{64}$$

При получении последней формулы учтены соотношения (48), (50) и определение множества чисел N_j, данное после (53).

При $J \geq 2$ наложим на $\varepsilon^{(j)}$ дополнительное к (60) ограничение:

$$0 < \varepsilon^{(j)} \leq \varepsilon_2^{(j)}, \tag{65}$$

где $\varepsilon_2^{(j)} := \arcsin\left(\min\left\{1, \chi_j^{(out)} \sin\left(\varepsilon_1^{(j)}/2\right) \Big/ \left(2\chi_j^{(0)}\right)\right\}\right) > 0$, величина $\chi_j^{(0)}$ была определена в формуле (54), $\chi_j^{(out)} := \min\{\chi_m, m \in \{0, \ldots, N\} \backslash N_j\} > 0$.

Пусть $p \in \{1, \ldots, 2^{N+1}\} \backslash S_j$. Тогда по построению множества S_j (см. формулы (39), (61)) существует минимум одно значение $m \in N_\kappa$ ($\kappa \neq j$) такое, что

$\alpha_m^{(s)} = -\alpha_{m,j}^{(0)}$, и, значит, при выполнении условий (60), (65) из неравенства (59) и соотношений (48), (50), (51), (53), (54), (63) получим:

$$\begin{gathered}\frac{\Re\{\lambda(h_p - H_0^{(j)})\}}{|\lambda|} \le -2\chi^{(m)} \left|\cos(\pi/2 - \omega_j + \delta + \psi_m)\right| + \\ \sum_{n\in N_j} 2\chi^{(n)}|\cos(\pi/2+\delta)| = -2\chi^{(m)}|\sin(\omega_j - \delta - \omega_\kappa)| + 2\chi_j^{(0)}|\sin\delta| \le \\ -2\chi_j^{(out)}\sin\left(\varepsilon_1^{(j)}/2\right) + 2\chi_j^{(0)}|\sin\delta| \le -\delta^{(j)} \quad (p \in \{1,\dots,2^{N+1}\}\backslash S_j),\end{gathered} \tag{66}$$

где $\delta^{(j)} = \chi_j^{(out)}\sin\left(\varepsilon_1^{(j)}/2\right) > 0$.

Положим

$$r^{(j)}(\lambda) := \sum_{s\in S_j} d_r^{(s)}(\lambda)\exp\left\{\lambda\Delta h_s^{(j)}\right\} \equiv \sum_{s\in S_j} d_r^{(s)}(\lambda)\exp\left\{\Psi_s^{(j)}\lambda_1\right\}. \tag{67}$$

Здесь $\lambda_1 := \lambda\exp\{i\omega_j\} = i|\lambda|\exp\{i\delta\}$, а величины $\Psi_s^{(j)}$ $(s \in S_j)$ были определены в (64). Очевидно, что все $\Psi_s^{(j)}$ действительные неотрицательные числа, часть из которых может совпадать. Однако, в силу (39), (50), (61) и (64) существует ровно одно число $k_{0,j} \in S_j$, такое, что $\Psi_{k_{0,j}}^{(j)} = 0$.

При выполнении условий (60) и (65), пользуясь соотношениями (47), (62), (64) и (66), формулу (46) для $r_{11} = D_0$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} r_{11}\exp\left\{-\lambda H_0^{(j)}\right\} = d_r^{(k_{0,j})}(\lambda)\left(1 + O(1)\lambda^{M_j}\exp(-\delta^{(j)}|\lambda|)\right) + \\ + \sum_{s\in S_j\backslash\{k_{0,j}\}} d_r^{(s)}(\lambda)\exp\left\{\Psi_s^{(j)}\lambda_1\right\}, \end{aligned} \tag{68}$$

где $M_j = \min\left\{m_r^{(s)}, s \in \left\{1,\dots,2^{N+1}\right\}\setminus S_j\right\} - m_r^{(k_{0,j})}$.

Теорема 5 является прямым следствием формул (47), (67), (68) и теоремы 12.10, доказанной в работе [15] (гл. 12, §8).

9. Типы асимптотики счётного спектра

Выражения вида (46), (67) и (68) часто называют квазиполиномами. В результате их детального изучения, которое имеет давнюю историю [17, 18, 19, 20], было установлено в каких случаях расположение корней квазиполиномов асимптотически определено, получены формулы для первых членов соответствующих асимптотических разложений по $1/|\lambda|$ [15] (глава 12) и рекуррентные формулы для последующих членов [21, 22].

Таким образом, анализ асимптотики нулей целых функций, представимых в виде (46), (67) или (68), давно сделан и нет смысла его повторять. Однако представляет интерес установление связи конкретных особенностей спектра краевой задачи D с особенностями характеристических данных (5) простой кривой γ, на которой она рассматривается. Наиболее простая и общая связь такого типа была установлена в разделе 7: при выполнении условий (18) спектр на комплексной плоскости параметра λ асимптотически локализуется в направлениях перпендикулярных отрезкам $z_n^* z_{n+1}^*$, где $\{z_n\}_0^{N+1}$ — набор характеристических точек кривой γ, а звёздочка означает комплексное сопряжение. Однако характер этой локализации может быть разным.

Если среди отрезков L_m $(m = \overline{0,N})$, соединяющих последовательные характеристические точки простой кривой, нет параллельных, то $J = N + 1$, множество N_j при любом значении $j \in \{1, \dots, N+1\}$ состоит из одного элемента, и сумма в формуле (67) содержит ровно два слагаемых. В этом случае в окрестности каждого луча $\rho = -t \exp\{-2i\omega_j\}$ $(t > 0)$ спектр краевой задачи D является асимптотически определенным и состоит из одной асимптотической последовательности точек [15]. Как уже говорилось в конце раздела 2, одна из возможных реализаций этого случая была исследована в [10].

Пусть теперь среди отрезков L_m $(m = \overline{0, N})$ есть параллельные, и, например, N_{j_0} $(j_0 \in \{1, \dots, J\})$ содержит более одного числа. В этом случае спектр краевой задачи D в окрестности луча $\rho = -t \exp\{-2i\omega_{j_0}\}$ $(t > 0)$ может состоять из нескольких, возможно, разнотипных последовательностей точек, а особенности его асимптотического поведения сильно зависят от соотношений величин всех коэффициентов $\Psi_s^{(j_0)}$ $(s \in S_{j_0})$, а также целых чисел $m_r^{(s)}$ и комплексных чисел $\delta_r^{(s)}$, входящих в асимптотическое разложение (47) множителей $d_r^{(s)}$, стоящих перед экспонентами в (67). Более того, при определённых соотношениях между значениями всех коэффициентов $\Psi_s^{(j_0)}$ и всех чисел $m_r^{(s)}$ $(s \in S_{j_0})$ указанный спектр может содержать последовательность точек, которая не будет асимптотически определённой, не считая, конечно, общей закономерности вида (58). Последнюю в этом случае можно лишь слегка уточнить, зажав асимптотически неопределённую последовательность точек между двумя прямыми, параллельными лучу $\rho = -t \exp\{-2i\omega_{j_0}\}$ $(t > 0)$.

Подробный разбор всех описанных выше ситуаций и соответствующие формулы для первых членов асимптотического разложения приведены в [15] (глава 12). Однако для установления связи условий реализации каждого из этих случаев с особенностями набора характеристических данных простой кривой γ необходимо более конкретно связать числа $m_r^{(s)}$, $\delta_r^{(s)}$ $(s \in S_{j_0})$ с видом матриц перехода $\hat{\eta}^{(n)}$ и всеми числами m_n, δ_n $(n = \overline{1, N})$ (см. формулы (30), (31)). В конкретных ситуациях это можно сделать с помощью формулы (45) и лемм 8, 9, 12. Но наибольший интерес представлял бы анализ указанной связи либо в общем случае краевых задач класса D, либо для каких-то подклассов этих задач. Напомним, что числа m_n и δ_n равны соответственно минимальному порядку производной от потенциала вдоль кривой γ, которая имеет скачок в точке z_n, и величине этого скачка ([12], формулы (18), (19)). При этом случай $m_n = 0$ соответствует скачку самого потенциала.

Общий анализ связи особенностей спектра с параметрами набора характеристических данных простой кривой, на которой рассматривается краевая задача, представляет интерес, прежде всего, с точки зрения решения обратных задач. При этом особенно ценными его результаты могут оказаться при доказательстве теорем существования решений обратных задач для уравнения (1) класса D по спектрам, поскольку для доказательства теорем единственности в работе [11] был разработан значительно более простой и очень эффективный метод единичной передаточной матрицы, который с небольшими изменениями может быть обобщен на рассматриваемый в настоящей работе случай уравнения (1) с условиями разрывов (3).

References

[1] J. Walter, *Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition*, Mathematische Zeitschrift, **133**:4 (1973), 301–312. Zbl 0246.47058

[2] B.M. Levitan and I. S. Sargsjan, *Sturm-Liouville and Dirac Operators*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series), v. 59, Kluwer Academic Publishers, 1991.

[3] V.A. Yurko, *Boundary value problems with discontinuity conditions in an interior point of the interval*, Differential Equations, **36**:8 (2000), 1266–1269. Zbl 0991.34028

[4] R. Mennicken and M. Möller, *Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems*, North-Holland Mathematic Studies, **192**, Amsterdam: Elsevier, 2003. Zbl 1033.34001

[5] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York: McGraw-Hill Book Company, 1955. Zbl 0064.33002

[6] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, New York: Dover Publications, 1988.

[7] M.V. Fedoryuk, *Asymptotic Analysis: Linear Ordinary Differential Equations*, Berlin: Springer-Verlag, 1993. Zbl 0782.34001

[8] Kh.K. Ishkin, *On localization of the spectrum of the problem with complex weight*, Journal of Mathematical Sciences, **150**:6 (2008), 2488—2499. Zbl 1151.34339

[9] Kh.K. Ishkin, *Localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve*, St. Petersburg Math. J., **28**:1 (2017), 37—63. Zbl 1367.34024

[10] Kh.K. Ishkin, A.V.Rezbaev, *To the Davies's formula on the distribution of eigenvalues of a non-self-adjoint differential operator*, Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory, **153** (2018), 84—93 (in Russian).

[11] A.A. Golubkov, *Inverse problem for Sturm–Liouville operators in the complex plane*, Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., **18**:2 (2018), 144—156 (in Russian).

[12] A.A. Golubkov, *Sturm—Liouville equation with piecewise entire potential function on a curve: transfer matrix asymptotics*, Moscow University Mathematics Bulletin, **74**:2 (2019), 65–69. (Translated from Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika. Mekhanika, **74**:2 (2019), 37—41).

[13] J.J. Duistermaat, F.A. Grünbaum, *Differential equations in the spectral parameter*, Communications in Mathematical Physics, **103**:2 (1986), 177–240. Zbl 0625.34007

[14] B.Ja. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Translations of Mathematical Monographs, **5**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.

[15] R. Bellman and K.L. Cooke, *Differential-Difference Equations*, Mathematics in Science and Engineering, **6**, New York–London: Academic Press, 1963. Zbl 0105.06402

[16] A. F. Leont'ev, *Entire Functions. Series of Exponentials*, Moscow: Nauka, 1983 (in Russian). Zbl 0547.30003

[17] J. Horn *Verwendung asymptotischer darstellungen zur untersuchung der integrale einer speciellen linearen differentialgleichung. II.*, Math. Ann., **49**:(3-4) (1897), 473—496.

[18] R. E. Langer, *On the zeros of exponential sums and integrals*, Bulletin of the American Mathematical Society, **37** (1931), 213—239. Zbl 0001.34403

[19] H. L. Turrittin, *Asymptotic distribution of zeros for certain exponential sums*, American Journal of Mathematics, **66**:2 (1944), 199—228. Zbl 0063.07890

[20] D. G. Dickson, *Expansions in Series of Solutions of Linear Difference-Differential and Infinite Order Differential Equations with Constant Coefficients*, Memoirs of the American Mathematical Society, **23** (1957). Zbl 0079.11305

[21] V. B. Lidskiĭ and V. A. Sadovnichiĭ, *Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions*, Mathematics of the USSR-Sbornik, **4**:4 (1968), 519—528 (Translated from Matematicheskiĭ Sbornik, **75(117)**:4 (1968), 558—566). Zbl 0176.37002

[22] V. A. Sadovnichii, V. A. Lyubishkin, and Yu. Belabbasi, *Zeros of entire functions of a certain class*, Journal of Soviet Mathematics, **32**:4 (1986), 383—388 (Translated from Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo, **8** (1982), 211—217).

Andrey Alexandrovich Golubkov

Advanced Educational and Scientific Center, M.V. Lomonosov Moscow State University,

11, Kremenchugskaya str.,

Moscow, 121357, Russia

E-mail address: andrej2501@yandex.ru