S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1028–1035 (2019) УДК 512.552.4
DOI 10.33048/semi.2019.16.071 MSC 16R10

О СТЕПЕНИ МИНИМАЛЬНОГО ТОЖДЕСТВА КОНЕЧНОПОРОЖДЕННОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ С ФИКСИРОВАННЫМ ИНДЕКСОМ НИЛЬПОТЕНТНОСТИ

Е.П. ПЕТРОВ

Abstract. In this paper we find the degree of the minimal identity of a finitely generated nilpotent algebra with fixed number of generators and nilpotence index.

Keywords: generators, identity, nilpotent algebra.

1. Введение

В данной статье рассматриваются ассоциативные нильпотентные конечномерные алгебры над произвольным полем F.

Задача описания тождеств конечномерной алгебры над полем возникла довольно давно. Так, в 80-е годы в Днестровской тетради [1] Л.А. Бокутем была предложена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число).

В 1980 году С.А.Пихтильковым в работе [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n \leq 18$. В 1986 году Ю.Н.Мальцевым в статье [3] изучалось многообразие алгебр $\mathfrak{M}_n$, порожденное всеми n-мерными нильпотентными алгебрами. Такие многообразия там были описаны для $n = \overline{1,6}$, а также поставлен вопрос:

(*) *Какова степень минимального тождества в многообразии* $\mathfrak{M}_n$*?*

В 1989 г. И.Л.Гусевой в статье [4] было доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = [\frac{n}{3}] + 2$.

В 1991 г. автором в работе [5] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному

Petrov, E.P., On the degree of minimal identity of a finitely generated algebra with a fixed nilpotence index.

Поступила 25 сентября 2018 г., опубликована 6 августа 2018 г.

тождеству степени $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, и в качестве подтверждения этой гипотезы был приведен пример n-мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра R с условием $dim R^2/R^3 \leq 2$ удовлетворяет данной гипотезе. Из этого результата, в частности, следовало, что стандартное тождество степени $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$ является минимальным тождеством в $\mathfrak{M}_n$ для $n \leq 12$ и $n = 15$.

Таким образом, для малых размерностей был найден ответ на вопрос (*).

В поисках ответа на вопрос (*) автором в работах [6] – [8] проведены исследования нильпотентной конечномерной алгебры R, удовлетворяющей для некоторого натурального числа $N \geq 2$ условию $dim R^N/R^{N+1} = 2$, выясняя ее строение, определяющие соотношения и тождества. При этом, в большинстве случаев (с некоторыми ограничениями на характеристику поля, на значение числа N) найдено минимальное тождество.

Идеи, используемые в работах [7], [8], позволили автору ответить на следующий вопрос:

(*) *Какова степень минимального тождества произвольной s-порожденной нильпотентной индекса N алгебры над полем (при фиксированных s и N)?*

Этому и посвящена данная статья.

2. Предварительные замечания и определения

Напомним некоторые определения и обозначения из работ [7], [8].

Будем называть типом алгебры R следующую строчку натуральных чисел: $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{m-1})$, где $s_i = \dim R^i/R^{i+1},\ 1 \leq i \leq m-1$, m – индекс нильпотентности алгебры R.

Типу алгебры R соответствует следующая базис-таблица:

$v_1^{(1)}$	$v_1^{(2)}$	$v_1^{(3)}$	$\cdots$	$v_1^{(m-1)}$
$v_2^{(1)}$	$v_2^{(2)}$	$v_2^{(3)}$	$\cdots$	$v_2^{(m-1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_{s_1}^{(1)}$	$v_{s_2}^{(2)}$	$v_{s_3}^{(3)}$	$\cdots$	$v_{s_{m-1}}^{(m-1)}$

,

под которой мы понимаем описание базиса алгебры R, где элементы i-го столбца – базис R^i по модулю $R^{i+1},\ i = 1, \ldots, m-1$.

В работе будем рассматривать хорошо известное стандартное тождество:

$S_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum\limits_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0$, где подстановка σ пробегает симметрическую группу S_k.

Запись $\lfloor x \rfloor$ обозначает округление числа x в меньшую сторону (целая часть числа, пол), $\lceil x \rceil$ обозначает округление числа x в большую сторону (потолок).

Под минимальным тождеством, выполняющимся в алгебре с определенными условиями, будем понимать тождество, выполняющееся во всех алгебрах с этими определенными условиями, при том, что найдется такая алгебра с этими определенными условиями, в которой не выполняется никакое другое тождество строго меньшей степени.

3. Минимальное тождество в алгебре R

Заметим, что при малых значениях s и N выяснить, каково минимальное тождество в алгебре R, довольно просто.

Очевидно, что при $s = 1$ алгебра R коммутативна, а при $N = 2$ мы имеем алгебру с нулевым умножением.

При $N = 3$, рассматривая алгебру R со следующей базис-таблицей:

a	a^2
b	ab
c_1	ba
$\vdots$	b^2
c_{s-2}	

,

где $a, b, c_i,\ i \geq 0$, – порождающие, легко видеть, что она не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени 2, поскольку порождающие a, b в алгебре R ведут себя "свободно".

Вообще, необходимо сказать, что при $s \geq (N-1)$ алгебра R может не удовлетворять никакому полилинейному тождеству степени, меньшей N.

Действительно, рассмотрим свободную алгебру $F\langle x_1, x_2, \ldots x_s\rangle$, где $s \geq (N-1)$, в которой выберем идеал I, порожденный всеми словами длины не менее N. Тогда фактор-алгебра $A = F\langle x_1, x_2, \ldots x_s\rangle / I$ является s-порожденной нильпотентной индекса N алгеброй, в которой порождающие $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ \ldots \ , \overline{x_s}$ в алгебре A ведут себя "свободно". Поэтому для любого полилинейного полинома степени k, меньшей N, $\ f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ \ldots \ , \overline{x_k}) \neq 0$.

По этой причине в дальнейшем будем считать, что $s < (N-1)$.

Далее заметим, что из определения стандартного полинома следует, что он линеен по всем своим переменным и обращается в нуль, если какие-либо два аргумента равны. Поэтому всегда можно считать, что переменные стандартного полинома пробегают набор линейно-независимых элементов алгебры R.

При $N = 4$, учитывая первый из названных аргументов, заключаем, что при $s \geq 3$ алгебра R не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени, меньшей 4, а при $s = 2$ с учетом второго аргумента заключаем, что алгебра R удовлетворяет стандартному тождеству степени 3, поскольку для любых $x_1, x_2, x_3 \in R$ имеет место следующий факт: $S_3(x_1, x_2, x_3) \in R^4$.

При достаточно больших N нахождение минимального тождества, выполняющегося в алгебре R, становится довольно затруднительным.

Следующая теорема предоставляет алгоритм нахождения степени минимального тождества s-порожденной нильпотентной индекса N алгебры при $N \geq 5$.

Теорема. *Всякая s-порожденная ($s \geq 2$) нильпотентная индекса $N \geq 5$ алгебра R над произвольным полем при $s < (N-1)$ удовлетворяет стандартному тождеству $\ S_T(x_1, x_2, \ \ldots \ , x_T) = 0$, где $\ T = \left\lceil \frac{N(s-1)^2 + s^{m+1} - m(s-1)s - s}{m(s-1)^2} \right\rceil$ и параметр m вычисляется по формулам:*

$$m = \begin{cases} \left\lfloor \log_s \dfrac{\frac{N(s-1)^2 - s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2 - s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor, & \text{если } N < N^*; \\ \left\lfloor \log_s \dfrac{s\cdot\frac{N(s-1)^2 - s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2 - s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor, & \text{если } N \geq N^*, \end{cases}$$

$$N^* = \frac{\left(\left\lfloor \log_s \frac{s\cdot\frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor (s-1) - s\right)\cdot s^{\left\lfloor \log_s \frac{s\cdot\frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor} + s}{(s-1)^2}.$$

Причем это тождество минимально (при фиксированных s и N).

Доказательство. Напомним, что из определения стандартного полинома следует, что он линеен по всем своим переменным и обращается в нуль, если какие-либо два аргумента равны. Поэтому можно считать, что переменные стандартного полинома пробегают набор линейно-независимых элементов алгебры R.

Рассмотрим в алгебре R элемент

$$S = S_T(x_1, x_2, \ \ldots \ , x_T) = \sum_{\sigma \in S_T} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(T)}$$

для некоторых $x_1, x_2, , \ \ldots \ , x_T \in R$, где T – как в формулировке теоремы.

Пусть $x_1, x_2, \ \ldots \ , x_T \in R$ – различные базисные элементы алгебры R. Очевидно, можно считать, что x_j – мономы (слова) от порождающих $c_i, \ i = \overline{1,s}$.

Обозначим через $\deg(x_j)$ длину монома x_j от порождающих c_i, $1 \le i \le s$.

Тогда $\deg(x_1 x_2 \ \cdots \ x_T) = \sum\limits_{i=1}^{T} \deg x_i$, и с учетом свойств стандартного полинома получим, что $\deg S = \deg S_T(x_1, x_2, \ \ldots \ , x_T) = \sum\limits_{j=1}^{T} \deg x_j$.

Далее поставим задачу оценить минимум $\deg S$ для фиксированных N и s.

Подставляя в $S = S_T(x_1, x_2, \ \ldots \ , x_T)$ вместо $x_1, x_2, \ \ldots \ , x_T$ базисные элементы: сначала порождающие $c_i, \ 1 \le i \le s$, затем слова длины 2 от порождающих c_i, образующие базис R^2 по модулю R^3, и так далее, слова длины p от порождающих c_i, образующие базис R^p по модулю R^{p+1}, пока не дойдем до подстановки очередного базисного элемента вместо x_T, получим для некоторого n следующее равенство:

$$\min_{x_j \in R} (\deg S) = s_1 + 2 \cdot s_2 + \cdots + (n-1) \cdot s_{n-1} + n \cdot r,$$

где $s_p = \dim R^p / R^{p+1}, \ 1 \le p \le (n-1), \quad 0 \le r < \dim R^n / R^{n+1}$.

С другой стороны, заметим, что при фиксированных T и s среди всех s - порожденных нильпотентных алгебр наименьшее значение величина $\min_{x_j \in R} (\deg S)$ достигнет тогда, когда $s_p = \dim R^p / R^{p+1}$ будут максимальны, то есть, когда $s_1 = s, s_2 = s^2, s_3 = s^3, \ldots, s_{n-1} = s^{n-1}$. Таким образом, получим, что

$$\min(\deg S) = s + 2 \cdot s^2 + \cdots + (n-1) \cdot s^{n-1} + n \cdot r = \frac{(ns - n - s) \cdot s^n + s}{(s-1)^2} + n \cdot r,$$

где $0 \le r < s^n$.

В этом случае для T будет иметь место следующее равенство:

$$T = s + s^2 + \cdots + s^{n-1} + r = \frac{s^n - s}{s-1} + r, \quad 0 \le r < s^n. \tag{1}$$

Заметим, что если выполняется неравенство

$$(2)\qquad \frac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2}+nr \quad\geq\quad N,$$

то это означает, что $S=S_T(x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_T)=0$.

Наша цель: показать, что это неравенство выполняется для m и T (как в формулировке теоремы).

Исследуем, при каких n и r выполняется неравенство (2).

В предположении, что n и r являются минимальными по отношению к выполнению (2), имеем следующие неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2}+nr-(n-1)\leq N\leq \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2}+nr, \\ \hfill \text{если } r>0; \\ \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2}-(n-2)\leq N\leq \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2}, \\ \hfill \text{если } r=0. \end{cases}$$

Откуда получаем равенство

$$(3)\qquad N=\frac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2}+nr-i,$$

где $0\leq r<s^n$, $i=\overline{0,n-1}$ или $i=\overline{0,n-2}$.

Заметим, что если $N=\dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2}$, то $n>2$, иначе $N=\dfrac{(s-2)\cdot s^2+s}{(s-1)^2}=\dfrac{(s-2)\cdot s+1}{(s-1)^2}\cdot s=\dfrac{s^2-2s+1}{(s-1)^2}\cdot s=s$, противоречие с тем, что $s<(N-1)$.

Также заметим с учетом того, что $N\geq 5$, что, если $N=\dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n+s}{(s-1)^2}$, $n>2$, то имеет место равенство

$$(4)\qquad n=\left\lfloor \log_s \frac{s\cdot\frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{N(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor.$$

Доказательство этого факта следует из следующих равенств:

$$N(s-1)^2-s=(ns-n-s)s^n,$$

$$\begin{aligned}\log_s \frac{s\cdot\frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{N(s-1)^2-s}{s(s-1)}} &= \log_s \frac{s\cdot\frac{(ns-n-s)s^n}{s-1}}{\log_s\frac{(ns-n-s)s^n}{s(s-1)}}= \\ &=\log_s\frac{s^{n+1}}{\frac{s-1}{ns-n-s}\cdot\left(\log_s\frac{ns-n-s}{s-1}+\log_s s^{n-1}\right)}= \\ &=\log_s\frac{s^{n+1}}{\log_s\left(\frac{ns-n-s}{s-1}\right)^{\frac{s-1}{ns-n-s}}+\frac{(n-1)(s-1)}{ns-n-s}}= \\ &=(n+1)-\log_s\left(\log_s\left(\tfrac{(n-1)(s-1)-1}{s-1}\right)^{\frac{s-1}{ns-n-s}}+\tfrac{(n-1)(s-1)}{(n-1)(s-1)-1}\right),\end{aligned}$$

где, как легко проверить, при $n>2$ справедливо неравенство

$$0 \ < \ \log_s\left(\log_s\left(\tfrac{(n-1)(s-1)-1}{s-1}\right)^{\frac{s-1}{ns-n-s}} + \tfrac{(n-1)(s-1)}{(n-1)(s-1)-1}\right) \ \le \ 1.$$

Из чисел, которые имеют вид $N = \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2}$ для разных значений n, можно составить последовательность

$$N_1 = s,\ \ N_2 = \frac{(2s-3)\cdot s^3 + s}{(s-1)^2},\ \ N_3 = \frac{(3s-4)\cdot s^4 + s}{(s-1)^2},\ \ldots$$
$$\ldots, N_{n-1} = \frac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2},\ N_n = \frac{(ns-n-1)\cdot s^{n+1} + s}{(s-1)^2},\ \ldots.$$

Числа N, для которых $N \ne \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2}$ для любых n, попадают в интервалы между соседними членами этой последовательности.

Так, число $N = \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2} + j$, где $0 < j < ns^n$, принадлежит интервалу $\big(N_{n-1},\ N_n\big)$ и параметр n находится по формуле

$$n = \left\lfloor \log_s \frac{s\cdot \frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor,$$

а число $N = \dfrac{(ns-n-2s+1)\cdot s^{n-1} + s}{(s-1)^2} + j$, где $0 < j < (n-1)s^{n-1}$, принадлежит интервалу $\big(N_{n-2},\ N_{n-1}\big)$ и

$$n-1 = \left\lfloor \log_s \frac{s\cdot \frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \log_s \frac{\frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor.$$

Используя (4), число $N_{n-1} = \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2}$, где $n > 2$, можно представить в следующем виде:

$$N_{n-1} = \frac{\big(n(s-1)-s\big)\cdot s^n + s}{(s-1)^2} =$$
$$= \frac{\left(\left\lfloor \log_s \frac{s\cdot \frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor (s-1) - s\right)\cdot s^{\left\lfloor \log_s \frac{s\cdot \frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor} + s}{(s-1)^2}.$$

Обозначим такое представление N_{n-1} через N^*.

Рассматривая $N = \dfrac{(ls-l-s)\cdot s^l + s}{(s-1)^2} + j$, где $0 < j < l\cdot s^l$, заключаем, что если $N \in \big(N_{n-2},\ N_{n-1}\big)$, то есть $N < N^*$, то параметр параметр l находится по формуле $l = \left\lfloor \log_s \frac{\frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor$.

Если $N \in \big(N_{n-1},\ N_n\big)$, то есть $N \ge N^*$, то параметр l находится по формуле $l = \left\lfloor \log_s \frac{s\cdot\frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor$

Следовательно, для числа $N = \dfrac{(ns-n-s)\cdot s^n + s}{(s-1)^2} + j$, где $0 \le j < ns^n$, удовлетворяющему неравенству (2), параметр n находится по формуле:

$$n = \begin{cases} \left\lfloor \log_s \dfrac{\frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor, & \text{если } N < N^*; \\ \left\lfloor \log_s \dfrac{s\cdot\frac{N(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s \frac{N(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}} \right\rfloor, & \text{если } N \ge N^*. \end{cases}$$

Таким образом, доказано, что $n = m$.

Тогда, используя то, что $n = m$, с учетом (1) получим, что $T = \dfrac{s^m - s}{s-1} + r$. Следовательно, учитывая (3) имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} N &= \frac{(ms-m-s)\cdot s^m + s}{(s-1)^2} + mr - i = \frac{\big(m(s-1)-s\big)\cdot s^m + s}{(s-1)^2} + mr - i = \\ &= \frac{m(s-1)\cdot s^m - m(s-1)\cdot s + m(s-1)\cdot s - s^{m+1} + s}{(s-1)^2} + mr - i = \\ &= m\cdot\left(\frac{s^m-s}{s-1} + r\right) + \frac{-s^{m+1} + m(s-1)s + s}{(s-1)^2} - i = \\ &= m\cdot T + \frac{-s^{m+1} + m(s-1)s + s}{(s-1)^2} - i, \end{aligned}$$

где $i = \overline{0, m-1}$ или $i = \overline{0, m-2}$.

Откуда получим, что

$$\begin{aligned} T &= \frac{N(s-1)^2 + s^{m+1} - m(s-1)s - s}{m(s-1)^2} + \frac{i}{m} = \\ &= \left\lceil \frac{N(s-1)^2 + s^{m+1} - m(s-1)s - s}{m(s-1)^2} \right\rceil, \end{aligned}$$

поскольку $i \le m-1$.

Очевидно, что для подобранного таким способом числа T (и соответствующего параметра m) неравенство (2) выполняется.

Следовательно, $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = 0$ для любых $x_1, x_2, \ \dots \ , x_T \in R$.

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно доказать, что найдется такая s-порожденная нильпотентная индекса N алгебра R, не удовлетворяющая никакому полилинейному тождеству степени $(T-1)$.

Рассуждая как и ранее, рассмотрим свободную алгебру $F\langle x_1, x_2, \dots x_s\rangle$, в которой выберем идеал I, порожденный всеми словами длины не менее N. Тогда фактор-алгебра $A = F\langle x_1, x_2, \dots x_s\rangle / I$ является s-порожденной нильпотентной индекса N алгеброй.

Предположим, что алгебра A удовлетворяет некоторому полилинейному тождеству $f(z_1, z_2, \ \dots \ , z_{T-1}) = 0$ степени $(T-1)$.

Обозначая образы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \dots, \overline{x_s}$ соответственно через $c_1, \dots, c_s$, подставим, как при доказательстве первого утверждения теоремы, в $f(z_1, z_2, \ \dots \ , z_{T-1})$ вместо $z_1, z_2, \ \dots \ , z_{T-1}$ базисные элементы: сначала порождающие c_i, $1 \le i \le s$, затем слова длины 2 от порождающих c_i, образующие базис R^2 по модулю R^3, и так далее, получим, что

$$\min(degf(z_1, z_2, \ \dots \ , z_{T-1})) = \frac{(ms-m-s)\cdot s^m + s}{(s-1)^2} + m\cdot(r-1) = N - m + i,$$

когда $r \geq 1, \;\; i \leq m-1$, или

$$\min(degf(z_1, z_2, \;\ldots\;, z_{T-1})) = \frac{(ms-m-s)\cdot s^m + s}{(s-1)^2} - (m-1) = N-(m-1)+i,$$

когда $r = 0, \;\; i \leq m-2$, поскольку согласно (3):

$N = \dfrac{(ms-m-s)\cdot s^m + s}{(s-1)^2} + mr - i$, где $r \geq 1, \;\; i \leq m-1$, или

$N = \dfrac{(ms-m-s)\cdot s^m + s}{(s-1)^2} - i$, где $r = 0, \;\; i \leq m-2$.

Таким образом, так как $\min(degf(z_1, z_2, \;\ldots\;, z_{T-1})) < N$, можно подобрать такие $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \;\ldots\;, \widetilde{z}_{T-1} \;\in\; A$, что $f(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \;\ldots\;, \widetilde{z}_{T-1}) \;\notin\; A^N$.

Поскольку полином $f(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \;\ldots\;, \widetilde{z}_{T-1})$ находится в "свободной" части алгебры A, то $f(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \;\ldots\;, \widetilde{z}_{T-1}) \neq 0$, противоречие.

Теорема доказана. □

References

[1] *The Dniester Notebook (Unsolved problems in the theory of rings and modules)*, V.A. Andrunakievich (ed.), Third edition, Novosibirsk: Akad. Nauk SSSR, Sib. Otd., Inst. Mat., 1982. Zbl 0493.16001

[2] S.A. Pikhtil'kov, *On varieties generated by n-dimensional algebras*, Tula Polytechnic Inst., Tula, (1980), Manuscript deposited at VINITI, 1213-80 Dep.

[3] Yu.N. Mal'tsev, *On identities of nilpotent algebras*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., **9** (1986), 68–72. Zbl 0623.16005

[4] I.L. Guseva, *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, in: Internat. Conf. on Algebra, dedicated in the memory A.I. Mal'tsev, August 1989, Novosibirsk, 43.

[5] E.P. Petrov, *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, Algebra i Logika, **30**:5 (1991), 540–556. Zbl 0806.16025

[6] E.P. Petrov, *Defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition* $dimR^2/R^3 = 2$, S iberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1052—1066. Zbl 1370.16017

[7] E.P. Petrov, *Structure, defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition* $dimR^N/R^{N+1} = 2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 1153—1187. Zbl 1391.16026

[8] E.P. Petrov, *Defining relations and identities of finite-generated nilpotent algebra R with condition* $dimR^N/R^{N+1} = 2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1048—1064. Zbl 06969401

Evgeniy Petrovich Petrov
Altai State University,
61, Lenina ave.,
Barnaul, 656049, Russia
E-mail address: pep@email.asu.ru