S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1057–1068 (2019) УДК 517.956.45, 517.911
DOI 10.33048/semi.2019.16.073 MSC 35A09,35A10,35A24

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А.Л. КАЗАКОВ

Abstract. The paper deals with a nonlinear second order parabolic PDE, which is usually called "the nonlinear heat equation". We construct and study a particular class of solutions having the form of a heat wave that propagates on a cold (zero) background with finite velocity. The equation degenerates on the front of a heat wave and its order decreases. This fact complicates the study. We prove a new existence and uniqueness theorem for a boundary-value problem with a given heat-wave front in the class of analytical functions. Also, we are looking for exact heat-wave type solutions. The construction of these solutions is reduced to integration of the nonlinear second order ODE with singularity.

Keywords: partial differential equations, nonlinear parabolic heat equation, existence and uniqueness theorem, exact solution.

1. Введение

В данной статье рассматриваются вопросы нахождения решений нелинейного параболического уравнения теплопроводности с источником [1],

$$U_t = \Delta\Psi_1(U) + \Psi_2(U), \tag{1}$$

где Δ — лапласиан по пространственным переменным. Иногда (1) называют "generalized porous medium equation". Уравнение (1) при условии достаточной гладкости и монотонности функции $K(U) = \Psi_1'(U)$ можно после замены $u = K(U)$ путем тривиальных преобразований привести к виду

$$u_t = u\Delta u + F(u)(\nabla u)^2 + \Phi(u). \tag{2}$$

Kazakov, A.L., On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation.

Поступила 28 мая 2019 г., опубликована 7 августа 2019 г.

Здесь $F(u) = u\phi''(u)/\phi'(u) + 1$, $\Phi(u) = \Psi_2(\phi(u))/\phi'(u)$, $K(\phi(u)) = u$, т.е. $\phi(u)$ — обратная к $K(U)$ функция.

Функцию $K(U)$ иногда называют коэффициентом теплопроводности. Наиболее часто в литературе [2] встречаются случаи степенной $K(U) = U^\sigma$, логарифмической $K(U) = \sigma \ln(U + 1)$ и показательной $K(U) = \sigma[\exp(U) - 1]$ зависимостей [3, 4]. В первом случае $F(u) = 1/\sigma$, во втором — $F(u) = u/\sigma + 1$, в третьем — $F(u) = \sigma/(u + \sigma)$.

Уравнение (2) в случае, когда функции Ψ_1 и Ψ_2 удовлетворяют равенству $\Psi_1'(0) = \Psi_2(0) = 0$, обладает набором интересных свойств, в числе которых конечная скорость распространения возмущений по абсолютно холодному (нулевому) фону. Такого рода решения иногда в литературе называют "тепловым волнами" [1]. С математической точки зрения тепловая волна представляет собой совокупность двух решений (2), одно из которых является тривиальным $u \equiv 0$, а второе — неотрицательным $u \geq 0$, непрерывно состыкованных между собой вдоль некоторой гиперповерхности (в случае одной пространственной переменной последняя становится линией), именуемой фронтом тепловой волны. Отметим важное обстоятельство: на фронте тепловой волны, как легко видеть, зануляется коэффициент перед старшими производными, что приводит к вырождению типа уравнения. Именно это, по-видимому, является математической причиной появления решений со столь нетипичными для параболических уравнений свойствами.

Ранее [5] нами был рассмотрен частный случай уравнения (1) со степенной функцией $K(U)$ и нулевой функцией $\Psi_2(U)$, т.е. без источника. Настоящая работа является прямым продолжением указанной статьи. Доказана новая теорема существования и единственности решений задачи о движении тепловой волны с заданным фронтом в классе аналитических функций с построением решения в виде характеристического ряда [6]. В этой части работа развивает идеи и результаты научной школы А.Ф. Сидорова [7, 8], включая результаты авторов [9]. Также с использованием метода Кларксона —Крускалла [4, 10] найдены новые точные [11] решения рассматриваемого уравнения, имеющие вид тепловых волн, построение которых сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, наследующих особенность у исходной задачи [12].

2. Постановка задачи

Уравнение (2) в пространственно-симметричных случаях принимает вид

$$u_t = u\left(u_{\rho\rho} + \frac{\nu u_\rho}{\rho}\right) + F(u)u_\rho^2 + \Phi(u). \tag{3}$$

Здесь $\rho = (\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2)^{1/2}$ – пространственная переменная, t — время; $u(t, \rho)$ — искомая функция; $F(0) \neq 0$, $\Phi(0) = 0$; константа ν принимает значения 0,1,2 в случаях плоской, осевой и сферической симметрии соответственно. С формальной математической точки зрения можно рассматривать произвольные $\nu \in \mathbb{R}$, однако физический смысл уравнения в этом случае неочевиден.

Для уравнения (3) рассмотрим задачу построения неотрицательных решений, имеющих тип тепловой волны, распространяющейся по абсолютно холодному фону с конечной скоростью, которые удовлетворяют условию

$$u|_{\rho=a(t)} = 0, \tag{4}$$

где $a(t) > 0$ — достаточно гладкая функция. Линию $\rho = a(t)$ называют фронтом тепловой волны, на ней последняя стыкуется с тривиальным решением $u \equiv 0$, при этом искомая функция, как можно легко убедиться, непрерывна (в отличие от ее производных, которые на фронте тепловой волны, как правило, терпят разрыв).

Далее в разделе 3 формулируется и доказывается теорема существования и единственности решения задачи (3), (4) в классе аналитических функций. Под аналитической здесь и далее понимается функция действительной переменной, которая совпадает в некоторой области со своим тейлоровским разложением. Затем в разделах 4 и 5 ищутся специальные точные решения задачи (3), (4), построение которых сводится к интегрированию ОДУ второго порядка с вырождением.

3. Теорема существования

Теорема 1. *Пусть функции $F(u)$, $\Phi(u)$, $a(t)$ являются аналитическими в окрестности нуля, $F(0) > 0$, $\Phi(0) = 0$, $a(0) > 0, a'(0) \neq 0$. Тогда задача (3), (4) имеет в некоторой окрестности т. $t = 0, \rho = a(0)$ два аналитических решения, одно их которых – тривиальное, а второе – нетривиальное.*

Доказательство. Процедура доказательства теоремы 1 является стандартной для научной школы А.Ф. Сидорова [7, 13], поэтому излагается относительно кратко, без некоторых технических деталей. Доказательство состоит из двух этапов. Не первом строится решение в виде специального [8] (характеристического) ряда по степеням переменной $x - a(t)$ с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами. На втором — сходимость построенного ряда доказывается методом мажорант. Выполним этапы последовательно.

1. Вначале сделаем в задаче (3), (4) замену независимых переменных

$$z = \rho - a(t), t' = t,$$

после которой перепишем задачу в виде

$$u_t - a'(t)u_z = u\left(u_{zz} + \frac{\nu u_z}{z + a(t)}\right) + F(u)u_z^2 + \Phi(u),\ u|_{z=0}. \tag{5}$$

Здесь и далее штрих у переменной t' для удобства написания опущен.

Решение задачи (5) будем строить в виде ряда

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(t)z^k}{k!},\ u_k(t) = \left.\frac{\partial^k u}{\partial z^k}\right|_{z=0}, \tag{6}$$

коэффициенты которого определяются по следующей рекуррентной процедуре: из начального условия (5) имеем, что $u_0 \equiv 0$. Для нахождения u_1 положим $z = u = 0$ в обеих частях уравнения (5). Получим алгебраическое уравнение второй степени

$$-a'(t)u_1 = F(0)u_1^2,$$

которое имеет два корня: $u_1 \equiv 0$ и $u_1 = -a'(t)/F_0$. Первый из них соответствует тривиальному решению: можно без труда убедиться, что в этом случае все прочие коэффициенты ряда (6) будут также равны нулю; далее он не рассматривается. Второму соответствует нетривиальное решение, построение которого продолжим. Для нахождения u_2 продифференцируем уравнение (5) по z и положим $z = u = 0$. После приведения подобных и разрешения относительно искомой величины получим соотношение

$$u_2 = \frac{1}{1+F(0)}\left(\frac{a''}{a'} + \frac{\nu a'}{F(0)a} - \frac{F'(0)(a')^2}{F^2(0)} - \Phi'(0)\right).$$

Для удобства дальнейших выкладок запишем уравнение (5) в виде

$$ru_t - a'ru_z + au_t - a'au_z = ruu_{zz} + auu_{zz} + \nu uu_z + rF(u)u_z^2 + aFu_z^2 + rF(u) + aF(u). \tag{7}$$

Пусть найдены коэффициенты ряда (5) до n-го включительно.

Введем обозначения

$$F_k(t) = \left.\frac{d^kF(u)}{dz^k}\right|_{u=z=0},\ \Phi_k(t) = \left.\frac{d^k\Phi(u)}{dz^k}\right|_{u=z=0},\ k = 0, 1, \ldots, n, \ldots.$$

Здесь $F(u), \Phi(u)$ дифференцируются как сложные функции, $u = u(t, z)$. Можно видеть, что

$$F_0 = F(0), \Phi_0 = \Phi(0), F_1 = -\frac{a'(t)}{F_0}F'(0), \Phi_1 = -\frac{a'(t)}{F_0}\Phi'(0),$$

и так далее. Явные выражения для F_k, Φ_k в общем случае являются громоздкими и здесь не приводятся.

Для того, чтобы найти u_{n+1}, продифференцируем уравнение (7) n раз по z и положим $z = u = 0$. Получим следующее равенство:

$$nu'_{n-1} - a'nu_n + au'_n - a'au_{n+1} =$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u_k u_{n-k+1} + a\sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k u_{n-k+2} + \nu\sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k u_{n-k+1} +$$

$$+ n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i u_{i+1} u_{k-i+1}\right) F_{n-k-1} + a\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i u_{i+1} u_{k-i+1}\right) F_{n-k} +$$

$$+ n\Phi_{n-1} + a\Phi_n.$$

Выразим из последнего равенства коэффициент

$$u_{n+1} = \frac{F_0}{aa'(F_0+n)}\left[nu'_{n-1} - a'nu_n + au'_n + n\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k u_k u_{n-k+1} + \right.$$

$$+ a\sum_{k=2}^{n} C_n^k u_k u_{n-k+2} + \nu\sum_{k=1}^{n} C_n^k u_k u_{n-k+1} + n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i u_{i+1} u_{k-i+1}\right) F_{n-k-1} +$$

$$\left. + a\sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i u_{i+1} u_{k-i+1}\right) F_{n-k} + n\Phi_{n-1} + a\Phi_n\right].$$

В правой части последнего выражение присутствуют u_k при $k \le n$.

Таким образом, установлено, что решение задачи (3), (4) может быть записано в виде ряда (6) с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами, которые, начиная со второго, определяются однозначно. Тем самым, первый этап доказательства завершен.

2. Доказательство сходимости (6) проводится классическим методом мажорант с использованием теоремы Коши-Ковалевской [6, 14]. Для удобства построения мажоранты введем новую искомую функцию V с использованием построенного выше разложения u в ряд Тейлора (6)

$$u(t,z) = u_0(t) + zu_1(t) + z^2V(t,z) = -\mu_0 a'(t)z + z^2V(t,z), \tag{8}$$

где $\mu_0 = 1/F_0$. Учитывая равенства $F(0) = F_0 \neq 0, \Phi(0) = 0$ и аналитичность функций $F(u), \Phi(u)$, можем представить последние в виде

$$F(u) = F_0 + uF_*(u),\ \Phi(u) = u\Phi_*(u), \tag{9}$$

где $F_*(u), \Phi_*(u)$ — аналитические в окрестности $u = 0$ функция. После подстановки (8) и (9) в уравнение (5) имеем, что

$$\begin{gathered}(z+a)\left[-\mu_0 a''z + z^2V_t - a'(-\mu_0 a' + 2zV + z^2V_z)\right] = \\ = (z+a)(-\mu_0 a'z+z^2V)(2V+4zV_z+z^2V_{zz})+\nu(-\mu_0 a'+2zV+z^2V_z)(-\mu_0 a'z+z^2V)+ \\ +(z+a)\left[F_0 + (-\mu_0 a'z + z^2V)F^*(t,z,V)\right](-\mu_0 a' + 2zV + z^2V_z)^2+ \\ +(z+a)(-\mu_0 a'z + z^2V)\Phi^*(t,z,V),\end{gathered} \tag{10}$$

где $F^*(t,z,V), \Phi^*(t,z,V)$ получаются из $F_*(u), \Phi_*(u)$ после замены (8). После приведения подобных и деления на $z\mu_0 a(a')^2$ уравнение (10) примет вид

$$2(1+\mu_0)V + (1+4\mu_0)zV_z + \mu_0 z^2V_{zz} = g_0 + zg_1 + z^2g_2 + z^3g_3. \tag{11}$$

Явные выражения для функций $g_i,\ i = 0,\dots,3$ не приводятся, поскольку являются громоздкими и не имеют принципиального значения для последующих рассуждений. Достаточно указать, что это аналитические функции своих переменных, а также, что

$$g_0 = g_0(t,z), g_1 = g_1(t,V,V_t), g_2 = g_2(t,V,V_t,V_z), g_3 = g_3(t,z,V,V_t,V_z,V_{zz}).$$

Если уравнение (11) имеет в окрестности $z = 0$ аналитическое решение (любое), то отсюда следует аналитическая разрешимость исходной задачи, т.е. сходимость ряда (6). Докажем, что такое решение существует и, более того, оно единственное (факт довольно любопытный, поскольку для (11) при $z = 0$ не заданы условия Коши).

Сначала построим решение (11) в виде ряда Тейлора по степеням z

$$V(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)\frac{z^n}{n!},\ V_n(t) = \left.\frac{\partial^n V}{\partial z^n}\right|_{z=0}. \tag{12}$$

Пусть $g_{i,n} = (\partial^n g_i/\partial z^n)|_{z=0},\ i = 0,\dots 3$. Тогда, последовательно дифференцируя (11) по z и полагая $z = 0$, получаем для коэффициентов $V_n(t)$ следующие выражения:

$$\begin{gathered}V_0(t) = \frac{g_{0,0}}{2(1+\mu_0)},\ V_1(t) = \frac{g_{0,1}+g_{1,0}}{3(1+2\mu_0)},\ V_2(t) = \frac{g_{0,2}+2g_{1,1}+2g_{2,0}}{4(1+3\mu_0)}, \\ \dots \\ V_n(t) = \frac{g_{0,n}+ng_{1,n-1}+n(n-1)g_{2,n-2}+n(n-1)(n-2)g_{3,n-3}}{2(1+\mu_0)+(1+4\mu_0)n+\mu_0 n(n-1)},\dots,\end{gathered} \tag{13}$$

в которых в выражении для V_0 правая часть известна и однозначно определена, а во всех прочих — правые части зависят от величин, определенных на предыдущем шаге. Иначе говоря, это рекуррентные соотношения с ненулевыми (в силу $F_0 = 1/\mu_0 > 0$) знаменателями, которые позволяют однозначно построить ряд (12). При этом, поскольку правые части в (13) являются конечными суммами аналитических функций, то они также являются аналитическими функциями от t в некоторой окрестности $t = 0$.

В силу аналитичности функций $V_k,\ k = 0, 1\ldots,$ и $g_i,\ i = 0, \ldots, 3$ для них можно подобрать мажоранты

$$V_0(t) \ll W_0(t), V_1(t) \ll W_1(t), g_1(t, V, V_t) \ll H_1(t, W, W_t),$$

$$g_2(t, V, V_t, V_z) \ll H_2(t, W, W_t, W_z), g_3(t, z, V, V_t, V_z, V_{zz}) \ll H_3(t, z, W, W_t, W_z, W_{zz}).$$

Покажем, что при выполнении указанных оценок, задача

$$W_{zz} = F_0\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial z^2} + \frac{\partial H_1}{\partial z} + H_2 + zH_3\right),\ W(t, 0) = W_0(t), W_z(t, 0) = W_1(t) \tag{14}$$

является мажорантной для уравнения (11).

В самом деле, построим решение в виде ряда Тейлора по степеням z

$$W(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t)\frac{z^n}{n!},\ W_n(t) = \left.\frac{\partial^n W}{\partial z^n}\right|_{z=0}, \tag{15}$$

коэффициенты которого определим, последовательно дифференцируя уравнение (14) по z и полагая $z = 0$. Получим следующие соотношения:

$$W_2 = F_0(H_{0,2} + H_{1,1} + H_{2,0}),\ W_3 = F_0(H_{0,3} + H_{1,2} + H_{2,1} + H_{3,0}), \ldots,$$

$$W_n = F_0[H_{0,n} + H_{1,n-1} + H_{2,n-2} + (n-2)H_{3,n-3}], \ldots,$$

где $H_{i,n} = (\partial^n h_i)/(\partial z^n)|_{z=0},\ i = 0, \ldots, 3$.

При $n \geq 2$ справедливы очевидные неравенства

$$\frac{1}{\mu_n} < \frac{n}{\mu_n} \leq \frac{n(n-1)}{\mu_n} < \frac{n(n-1)}{\mu_0 n(n-1)} = \frac{1}{\mu_0} = F_0,$$

где $\mu_n = 2(1 + \mu_0) + (1 + 4\mu_0)n + \mu_0 n(n-1)$. Из приведенных оценок, (13) и (14) следует, что $V_n(t) \ll W_n(t)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. аналитическое решение задачи (14) мажорирует решение (11), если ряд (14) сходится.

В вою очередь, сходимость (14) доказывается без большого труда: если продифференцировать уравнение (14) по z и разрешить его относительно W_{zzz}, то получается задача

$$W_{zzz} = \frac{1}{\mu_0 - z\frac{\partial H_3}{\partial W_{zz}}}\left(\frac{\partial^3 H_0}{\partial z^3} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + \frac{\partial H_2}{\partial z} + H_3 + \frac{\partial H_3}{\partial z} + \frac{\partial H_3}{\partial W}W_z + \frac{\partial H_3}{\partial W_z}W_{zz}\right),$$

$$W(t, 0) = W_0(t),\ W_z(t, 0) = W_1(t),\ W_{zz}(t, 0) = W_2(t),$$

которая имеет тип Коши —Ковалевской, и по одноименной теореме [6, 14] имеет единственное аналитическое решение, причем выбор правой части обеспечивает мажорирование им нуля. Теорема доказана. □

Процедура построения решения задачи (3), (4), примененная в ходе доказательства теоремы 1, является довольно громоздкой, кроме того ряд (6) зачастую имеет малый радиус сходимости. По-видимому, именно в этом заключается причина того, что, как показала практика, отрезки ряда (6) плохо подходят для верификации численных расчетов, которые выполняются нами с использованием авторской методики, основанной на применении граничноэлементного подхода [15] (ее обсуждение выходит за рамки данной статьи, см. [16, 17]). Для преодоления указанной трудности используются специальные точные решения задачи (3), (4).

4. Точные решения для случая степенной зависимости

Рассмотрим вначале уравнение (3) в случае степенной нелинейности, когда $F(u) = 1/\sigma$. Пусть также $\Phi(u) = \alpha u^\beta$. В этом случае задача (3), (4) имеет вид

$$u_t = u\left(u_{\rho\rho} + \frac{\nu u_\rho}{\rho}\right) + \frac{u_\rho^2}{\sigma} + \alpha u^\beta, u|_{\rho=a(t)} = 0. \tag{16}$$

Будем искать решения задачи (16) с помощью метода Клаксона —Крускалла [4, 10], т.е. в виде

$$u = \varphi(t)v(z),\ z = \rho/a_1(t) + a_2(t),\ v(0) = 0. \tag{17}$$

Обычно указанный метод предполагает в правой части выражения для u наличие слагаемого $g(t,\rho)$, но, учитывая специфику задачи, удобнее сразу принять $g(t,\rho) \equiv 0$. Можно убедиться, что в этом случае $z = 0 \Leftrightarrow \rho = -a_1(t)a_2(t)$, т.е. фронт тепловой волны (4) задается соотношением

$$a(t) = -a_1(t)a_2(t), \tag{18}$$

Отметим важные частные случаи: когда $a_1'(t) \neq 0, a_2'(t) = 0$, имеем обобщенно-автомодельное решение; когда $a_1'(t) = 0, a_2'(t) \neq 0$ — обобщенную бегущую волну; когда $a_1'(t) = a_2'(t) = 0$ — классическое разделение переменных [4], которое дает стоящую тепловую волну [1].

Подставим выражение (17) в уравнение (16). После приведения подобных слагаемых и умножения обеих частей на $a_1^2(t)/\varphi^2(t)$ получим следующее равенство:

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \frac{\nu}{z - a_2}vv' + \alpha\frac{a_1^2\varphi^\beta}{\varphi^2}v^\beta + \frac{a_1(a_1'z - a_1'a_2 - a_1a_2')}{\varphi}v' - \frac{a_1^2\varphi'}{\varphi^2}v = 0. \tag{19}$$

Лемма 1. *Необходимыми условием обращения* (19) *в ОДУ относительно искомой функции* $v(z)$ *являются выполнение одного из следующих равенств: а)* $a_2' = 0$ *при* $\nu \neq 0$*; б) либо* $a_1'(t)a_2'(t) = 0$*, либо* $a_1a_2' + a_1'a_2 = \epsilon a_1'$*,* $\epsilon \in \mathbb{R}$ *при* $\nu = 0$*.*

Доказательство. Очевидно, что необходимым и достаточным условием того, чтобы (19) стало ОДУ, является превращение коэффициентов перед vv', v^β, v', v в функции, зависящие только от z, либо в константы. Будем рассматривать среди указанных только слагаемые, содержащие v', поскольку в остальных переменная z отсутствует, а условия превращения соответствующих множителей в константы будут рассмотрены особо.

Если $\nu \neq 0$, то необходимым и достаточным условием того, чтобы функция $\nu/(z - a_2)$ зависела только от z, является $a_2 = \text{const}$, т.е. $a_2' = 0$. Это же условие обеспечивает возможность в коэффициенте перед v' разделить z и t, т.е. представить указанный коэффициент в виде произведения двух сомножителей, каждый из которых зависит только от одной из переменных.

Если же $\nu = 0$, то переменная z имеется только в коэффициенте перед v'. Можно убедиться, что при выполнении условий пункта б) либо слагаемое, содержащее z, обращается в нуль, либо есть возможность разделить переменные z и t. □

Из приведенного доказательства следует, что в предположениях леммы 1 задача определения условий, при которых (19) становится ОДУ относительно функции $v(z)$, сводится к интегрированию системы ОДУ относительно функций $a_1(t), a_2(t), \varphi(t)$, имеющей следующий вид:

$$\frac{a_3'}{\varphi} = \alpha_1,\ \frac{a_1^2\varphi^\beta}{\varphi^2} = \alpha_2,\ \frac{a_1^2\varphi'}{\varphi^2} = \alpha_3, \tag{20}$$

где $a_3 = a_2$ при $a_1' = 0$, $a_3 = a_1^2$ при $a_1' \neq 0$; $\alpha_i = \mathrm{const},\ i = 1,2,3$.

Система (20), очевидно, переопределенная, однако при некоторых условиях становится совместной.

Лемма 2. *Система* (20) *при выполнении условий леммы 1 имеет следующие нетривиальные решения:*
1) $a_1 = const \neq 0$, $a_2 = const$, $\varphi = const \neq 0$ *(при любых* ν *и* β*);*
2) $a_1 = const \neq 0$, $a_2 = const$, $\varphi = 1/(A_1t + A_2)$ *(при любых* ν, $\beta = 2$*);*
3) $a_1 = const \neq 0$, $a_2 = A_3t + A_4$, $\varphi = const \neq 0$ *(при* $\nu = 0$, *любых* β*);*
4) $a_1 = const \neq 0$, $a_2 = \ln(A_5t + A_6)^{A_7}$, $\varphi = 1/(A_5t + A_6)$ *(при* $\nu = 0$, $\beta = 2$*);*
5) $a_1 = \exp(B_1t + B_2)$, $a_2 = const$, $\varphi = \exp(2B_1t + 2B_2)$ *(при любых* ν, $\beta = 1$*);*
6) $a_1 = (B_3t + B_4)^\omega$, $a_2 = const$, $\varphi = (B_3t + B_4)^{2\omega-1}$ *(при любых* ν, $\omega = (\beta - 2)/(2\beta - 2)$, $\beta \neq 1, 2$*);*
7) $a_1 = \exp(B_5t + B_6)$, $a_2 = C_1 + C_2\exp(-B_5t - B_6)$, $\varphi = \exp(2B_5t + 2B_6)$ *(при* $\nu = 0$, $\beta = 1$*);*
8) $a_1 = (B_7t + B_8)^\omega$, $a_2 = C_3 + C_4(B_7t + B_8)^{-\omega}$, $\varphi = (B_7t + B_8)^{2\omega-1}$ *(при* $\nu = 0$, $\omega = (\beta - 2)/(2\beta - 2)$, $\beta \neq 1, 2$*).*
Для произвольных констант $A_i,\ i = 1, \dots, 7$*;* $B_j,\ j = 1, \dots, 8$*;* $C_k,\ k = 1, \dots, 4$ *выполняются естественные ограничения.*

Доказательство. Доказательство леммы проводится интегрированием системы (20) во всех восьми случаях. При этом функция $\varphi(t)$, исходя из ее математического смысла (см. (17)), определяется с точностью до постоянного множителя. Доказательство носит технический характер, при этом оно достаточно громоздкое, поэтому здесь не приводится. При желании читатель может проверить справедливость утверждения леммы 2 прямой подстановкой представленных функций в систему. □

Лемма 3. *При выполнении условий леммы 2 уравнение* (20) *имеет следующий вид (нумерация пунктов сохраняется):*
1) $vv'' + (v')^2/\sigma + \nu vv'/(z - a_2) + b_1v^\beta = 0,\ b_1 = \alpha a_1^2\varphi^{\beta-2}$*;*
2) $vv'' + (v')^2/\sigma + \nu vv'/(z - a_2) + b_2v^2 + b_3v = 0,\ b_2 = \alpha a_1^2,\ b_3 = A_1a_2^2$*;*
3) $vv'' + (v')^2/\sigma + b_4v' + b_1v^\beta = 0,\ b_4 = a_1A_3/\varphi$*;*
4) $vv'' + (v')^2/\sigma + b_5v' + b_2v^2 + b_6v = 0,\ b_5 = a_1^2A_5A_7,\ b_6 = a_1A_5$*;*
5) $vv'' + (v')^2/\sigma + \nu vv'/(z - a_2) + B_1(z - a_2)v' + b_7v = 0,\ b_7 = \alpha - 2B_1$*;*
6) $vv'' + (v')^2/\sigma + \nu vv'/(z - a_2) + b_8(z - a_2)v' + \alpha v^\beta + b_9v = 0$, $b_8 = B_3(\beta - 2)/(2\beta - 2)$, $b_9 = -B_3/(\beta - 1)$*;*
7) $vv'' + (v')^2/\sigma + B_5(z - a_2)v' + b_{10}v = 0,\ b_{10} = \alpha - 2B_5$*;*
8) $vv'' + (v')^2/\sigma + b_{11}(z - a_2)v' + \alpha v^\beta + b_{12}v = 0,\ b_{11} = B_7(\beta - 2)/(2\beta - 2)$, $b_{12} = -B_7/(\beta - 1)$.

Доказательство. Лемма доказывается подстановкой выражений для a_1, a_2 и φ в уравнение (20). При этом в случаях 5) и 7), а также 6) и 8) уравнения для v при $\nu = 0$ совпадают с точностью до обозначений. □

Можно видеть, что при $v = 0$ в уравнении (20) обращается в нуль коэффициент перед старшей производной. Поэтому соответствующее условие для производной в точке $z = 0$ может иметь вид а) $v'(0) = -\sigma$ или б) $v'(0) = 0$ — во всех прочих случаях задача будет несовместной.

Таким образом, имеем задачу Коши, которую в общем виде можно представить, как

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \frac{\nu}{z-a_2}vv' + \gamma_1 v^\beta + (\gamma_2 z + \gamma_3)v' + \gamma_4 v = 0, \; v(0) = 0, v'(0) = \eta, \tag{21}$$

где $\gamma_i, \; i = 1, \ldots, 4$ — константы; $\eta = -\sigma$ в случае а), $\eta = 0$ в случае б).

Из лемм 1-3 вытекает справедливость следующего утверждения, являющегося основным в настоящем разделе:

Теорема 2. *Пусть справедливо одно из условий леммы 1 и соответствующая ему задача Коши* (21) *имеет достаточно гладкое (классическое) решение. Тогда задача* (16) *имеет классическое решение вида* (17)*, при этом фронт тепловой волны задается равенством* (18).

При натуральных β задача (21) в силу теоремы 1 имеет единственное нетривиальное аналитическое решение. Вопрос о разрешимости задачи (21) при нецелых $\beta > 0$ остается пока открытым.

В случае б) уравнение (21), очевидно, имеет тривиальное решение. Проведенное ранее исследование показывает [5], что по крайней мере при некоторых значениях входных параметров существует также нетривиальное решение.

Отметим, что с точки зрения возможных приложений именно случай а) является наиболее интересным, поскольку отличие от нуля производной означает ненулевой тепловой поток на фронте тепловой волны.

Интерпретируем полученные решения с точки зрения исходной постановки задачи (16) (нумерация пунктов соответствует леммам 1 и 2). Можно убедиться, что в случаях 7) и 8) $z = (\rho + C_i)/a_1(t) + C_{i-1}, \; i = 2, 4$ и они могут быть сведены соответственно к 5) и 6). Итак, получены следующие решения:

1) стационарная стоящая тепловая волна;
2) нестационарная (с обострением) стоящая тепловая волна;
3) бегущая волна (фронт тепловой волны имеет постоянную скорость);
4) обобщенная бегущая волна с логарифмическим фронтом;
5), 7) обобщенно-автомодельное решение с экспоненциальным фронтом;
6), 8) обобщенно-автомодельное решение со степенным фронтом.

5. Точные решения в общем случае

В общем случае, при произвольных достаточно гладких функциях $F(u)$, $F(0) \neq 0$ и $\Phi(u), \Phi(0) = 0$, семейство точных решений задачи (3), (4) вида (17) значительно беднее. В частности, можно видеть, что, если функция $\varphi(t)$ отлична от константы, то редукция к ОДУ становится, вообще говоря, невозможной. Поэтому положим $\varphi \equiv 1$, т.е. будем искать точные решения в виде

$$u = u(z), \; z = \rho/a_1(t) + a_2(t), \; u(0) = 0. \tag{22}$$

Поскольку дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему пункту, будем кратки. Подстановка (22) в (3) приводит при $a_1 \neq 0$ к равенству

$$uu'' + F(u)(u')^2 + \frac{\nu}{z-a_2}uu' + a_1^2\Phi(u) + a_1(a_1' z - a_1' a_2 - a_1 a_2')u' = 0, \tag{23}$$

которое и будет объектом подробного рассмотрения.

Предложение 1. *Уравнение* (23) *обращается при произвольных* $F(u)$, $F(0) > 0$ *и* $\Phi(u)$, $\Phi(0) = 0$ *в ОДУ относительно искомой функции* $u(z)$ *только в двух следующих случаях: а)* $a_1' = 0, a_2' = 0$, *что соответствует стоящей стационарной тепловой волне; б)* $\nu = 0$, $a_1' = 0, a_2 = a_2 = A_3 t + A_4$, *что соответствует бегущей волне, фронт которой имеет постоянную скорость.*

Доказательство. Рассмотрим случаи последовательно. В случае а) можно без труда убедиться, что все множители перед искомой функцией и ее производными от t не зависят, что и доказывает предложение. В случае б) третье слагаемое в правой части (23) пропадает (при $\nu \neq 0$ пришлось бы требовать, чтобы $a_2 = const$, т.е. вернуться к уже рассмотренному случаю), а пятое — принимает вид $-a_1^2 a_2' u'$. Можно видеть, что множитель перед u' становится константой тогда (и только тогда), когда $a_2(t)$ — линейная функция, что также доказывает предложение.

Докажем обратное утверждение. В самом деле, если $a_1(t)' \neq 0$, то невозможно избавиться от множителя $a_1^2(t)$, который имеется в четвертом слагаемом правой части (23). Если же $a_1(t) = 0$, то легко убедиться, что все возможные случаи уже были рассмотрены ранее. □

В условиях предложения 1 уравнение (23) имеет вид

$$uu'' + F(u)(u')^2 + \frac{\nu}{z - a_2} uu' + a_1^2 \Phi(u) - a_1^2 a_2' u' = 0. \tag{24}$$

Рассмотрим для него условия Коши

$$u(0) = 0, u'(0) = -1/F(0). \tag{25}$$

Напомним, что первое из них является следствием условия на фронте тепловой волны, а второе — обеспечивает совместность уравнения (24), которое при $u = 0$ вырождается.

Из теоремы 1 следует, что при условии аналитичности функций $F(u)$, $\Phi(u)$ и $a(t)$ задача (24), (25) имеет в данном случае единственное аналитическое решение. В настоящее время остается открытым вопрос о разрешимости в случае, когда требование аналитичности указанных функций не выполнено.

6. Заключение

Подводя итог данной работы, отметим, что для квазилинейного параболического уравнения теплопроводности, зависящего от одной пространственной переменной, при коэффициенте теплопроводности и источнике общего вида, исследованы решения типа тепловой волны, распространяющейся по абсолютно холодному (нулевому) фону с конечной скоростью. Доказана новая теорема существования и единственности указанных решений в классе аналитических функций с построением последних в виде характеристических рядов с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами.

Для случая степенной нелинейности (наиболее интересного с точки зрения приложений и распространенного в научной литературе) получены новые классы точных решений, имеющих тип тепловой волны, построение которых проводится по методу Клаксона —Крускалла и сводится в конечном итоге к интегрированию ОДУ второго порядка с особенностью. Наконец, показано, что в общем случае метод Клаксона —Крускалла позволяет найти только известные стационарные решения и простые бегущие волны.

Дальнейшие исследования по тематике статьи могут быть направлены на качественный анализ ОДУ, к которым сводится построение решений исходного уравнения с частными производными, для установления свойств последних. Пример подобного анализа был приведен в работе [5]. Также представляется уместным рассмотреть, помимо степенного, другие частые случаи зависимости коэффициента теплопроводности и источника от искомой функции.

Автор признателен к.ф.-м.н. П.А. Кузнецову, при участии которого была доказана теорема 1.

References

[1] A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov, A.P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, Berlin–New York: Walter de Gruyte, 1995. Zbl 1020.35001

[2] S.N. Antontsev, S.I. Shmarev, *Evolution PDEs with nonstandard growth conditions. Existence, uniqueness, localization, blow-up*, Amsterdam: Atlantis Press, 2015. Zbl 1410.35001

[3] J.L. Vazquez, *The porous medium equation: mathematical theory*, Oxford: Clarendon Press, 2007. Zbl 1157.35061

[4] A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev, *Handbook of nonlinear partial differential equations*, Boca Raton-London-New York: Chapman and Hall/CRC, 2011. Zbl 1243.35001

[5] A.L. Kazakov, S.S. Orlov, S.S. Orlov, *Construction and study of exact solutions to a nonlinear heat equation* Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 427–441. Zbl 1397.35054

[6] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, New York: Interscience, 2008.

[7] M.Yu. Filimonov, L.G. Korzunin, A.F. Sidorov, *Approximate methods for solving nonlinear initial boundary–value problems based on special construction of series*, Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **8**:2 (1993), 101–125. Zbl 0820.76079

[8] M.Yu. Filimonov, *Application of method of special series for solution of nonlinear partial differential equations*, AIP Conference Proceeding, **40** (2014), 218–223.

[9] A.L. Kazakov, A.A. Lempert, *Existence and uniqueness of the solution of the boundary-value problem for a parabolic equation of unsteady filtration*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **54**:2 (2013), 251–258. Zbl 1298.76180

[10] P.J. Olver, *Direct reduction and differential constraints*, Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A, **444**:1922 (1994), 509–523. Zbl 0814.35003

[11] A.A. Kosov, E.I. Semenov, *Exact solutions of the nonlinear diffusion equation*, Siberian Mathematical Journal, **60**:1 (2019), 93–107. Zbl 07079964

[12] A.L. Kazakov, S.S. Orlov, *On some exact solutions of the nonlinear heat equation*, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **22**:1 (2016), 112–123.

[13] A.L. Kazakov, P.A. Kuznetsov, L.F. Spevak, *Analytical and numerical construction of heat wave type solutions to the nonlinear heat equation with a source*, Journal of Mathematical Sciences, **2**39:2 (2019), 111–122. Zbl 07084256

[14] L.C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010. Zbl 1194.35001

[15] P.K. Banerjee, R. Butterfield, *Boundary element methods in engineering science*, McGraw-Hill Book Company Limited, UK, 1981. Zbl 0499.73070

[16] A.L. Kazakov, L.F. Spevak, *Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form*, App. Math. Modelling, **37**:10–11 (2013), 6918–6928. Zbl 06949406

[17] A.L. Kazakov, L.F. Spevak, *An analytical and numerical study of a nonlinear parabolic equation with degeneration for the cases of circular and spherical symmetry*, Appl. Math. Modelling, **40**:2 (2016), 1333–1343.

Alexander Leonidovich Kazakov
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
134, Lermontova str.,
Irkutsk, 664033, Russia
E-mail address: kazakov@icc.ru