S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1091–1132 (2019) УДК 517.9

DOI 10.33048/semi.2019.16.076 MSC 35L75

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

И.А.КРИШТАЛ, Н.Б. УСКОВА

Abstract. Several mixed problems for the differential equations with an involution are considered in this work. The spectral properties of the corresponding differential operators are studied. The operator groups generated by the differential operators with an involution are constructed.

Keywords: method of similar operators, differential operator with an involution, spectrum, group of operators.

1. Введение

В работе рассматриваются следующие три смешанные задачи для гиперболических уравнений:

$$\frac{\partial u(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial u(t,s)}{\partial s} - a_1 u(t,s) - v_1(s)u(t,\omega - s) + f(t,s), \quad a_1 \in \mathbb{C},$$
$$u(t,0) = u(t,\omega), \quad u(0,s) = \varphi(s), \quad t \in \mathbb{J}, \quad s \in [0,\omega]; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial u(t,s)}{\partial s} - q_0(s)u(t,s) - q_1(s)u(t,\omega - s) + f(t,s),$$
$$u(t,0) = u(t,\omega), \quad u(0,s) = \varphi(s), \quad t \in \mathbb{J}, \quad s \in [0,\omega]; \tag{2}$$

Krishtal, I.A., Uskova, N.B., Spectral properties of first-order differential operators with an involution and groups of operators.

The first author is supported by NSF, grant DMS 1322127. The second author is supported by RFBR (project 19-01-00732).

Received March, 15, 2019, published August, 16, 2019.

$$\frac{\partial u(t,s)}{\partial t} = i\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=\omega-s} - g_0(s)u(t,s) - g_1(s)u(t,\omega-s) + f(t,s),$$
$$u(t,0) = u(t,\omega), \quad u(0,s) = \varphi(s), \quad t \in \mathbb{J}, \quad s \in [0,\omega]. \tag{3}$$

Здесь символом $\mathbb{J}$ обозначен один из промежутков вида $(-\infty,\infty)$, $(-\infty,\beta]$, $[\alpha,\infty)$, $[\alpha,\beta]$, содержащий точку нуль.

Символ $\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=\omega-s}$ означает функцию, которая получается из функции $\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial \xi}$ заменой ξ на $\omega - s$, т. е. сначала берется первая частная производная по второму аргументу, а потом к ней применяется операция инволюции.

Для постановки задачи введем в рассмотрение следующие функциональные пространства. Символом $L_2[0,\omega]$ обозначим гильбертово пространство измеримых по Лебегу на $[0,\omega]$ со значениями в $\mathbb{C}$ и суммируемых с квадратом модуля (классов эквивалентности) функций. Скалярное произведение в $L_2[0,\omega]$ задается формулой

$$(x,y) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(s)\overline{y(s)}\,ds, \quad x,y \in L_2[0,\omega],$$

и норма порождается этим скалярным произведением.

Через $W_2^1[0,\omega]$ обозначим пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $L_2[0,\omega]$ с производными из $L_2[0,\omega]$ и скалярным произведением $\langle x,y\rangle = (x,y) + (x',y')$, x, $y \in L_2[0,\omega]$.

Всюду в статье предполагается, что потенциалы v_1, q_0, q_1, g_0, g_1, принадлежат пространству $L_2[0,\omega]$.

Символом $C(\mathbb{J}, L_2[0,\omega])$ обозначим линейное пространство функций $u : \mathbb{J} \times [0,\omega] \to \mathbb{C}$ со следующими свойствами. При фиксированном $t \in \mathbb{J}$ функция $s \mapsto u(t,s)$ принадлежит пространству $L_2[0,\omega]$, и функция $\widetilde{u} : \mathbb{J} \to L_2[0,\omega]$, определенная равенством $(\widetilde{u}(t))(s) = u(t,s)$, $t \in \mathbb{J}$, $s \in [0,\omega]$, непрерывна.

Если $\mathbb{J}$ — конечный промежуток, то введенное пространство $C(\mathbb{J}, L_2[0,\omega])$ является банаховым. В этом случае норма определяется формулой $\|u\|_\infty = \max\limits_{t\in\mathbb{J}} \|\widetilde{u}(t)\|_2$. Функцию $\widetilde{u}$ назовем ассоциированной с функцией u, в дальнейшем, они будут отождествляться.

Предполагается, что функция $f : \mathbb{J} \times [0,\omega] \to \mathbb{C}$ принадлежит $C(\mathbb{J}, L_2[0,\omega])$. Задачи (1), (2), (3) в гильбертовом пространстве $L_2[0,\omega]$ записываются соответственно в виде

$$\widetilde{u}_t = L\widetilde{u} + \widetilde{f}, \quad \widetilde{u}(0) = \varphi, \tag{4}$$

где символом L обозначен один из операторов L_1, L_2, L_3, определенных формулами

$$(L_1x)(s) = \frac{dx}{ds} - a_1x(s) - v_1(s)x(\omega-s), \tag{5}$$

$$(L_2x)(s) = \frac{dx}{ds} - q_0(s)x(s) - q_1(s)x(\omega-s), \tag{6}$$

$$(L_3x)(s) = i\frac{dx}{d\xi}\Big|_{\xi=\omega-s} - g_0(s)x(s) - g_1(s)x(\omega-s). \tag{7}$$

Область определения $D(L)$ задается следующим образом: $D(L) = \{x \in W_2^1[0,\omega] : x(0) = x(\omega)\}$.

Таким образом, изучение смешанных задач (1) – (3) сводится к изучению спектральных свойств операторов L_i, $i = 1, 2, 3$, и построению групп, генераторами которых они являются. С помощью этих групп описываются решения соответствующих смешанных задач.

Преобразованием подобия операторы L_2 и L_3 приводятся к оператору L_1 с подходящими числами a_2, $a_3 \in \mathbb{C}$ и функциями v_2, $v_3 \in L_2[0, \omega]$.

Остановимся еще на одном терминологическом вопросе. Гомеоморфизм $\alpha^2(s) = \alpha(\alpha(s)) = s$, $s \in [0, \omega]$, в литературе [1] – [3] иногда носит название карлемановского сдвига. Используется также для его обозначения термин “инволютивное отклонение”. Мы будем пользоваться термином “инволюция”. Соответственно, обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых наряду с искомой функцией $y(s)$ присутствует $y(\alpha(s))$ называют уравнениями с отклоняющимся аргументом. Уравнения, содержащие инволюцию (сдвиг Карлемана, инволютивное отклонение), можно трактовать как уравнение со знакопеременным отклонением: при $s < s^*$, где s^* — неподвижная точка отображения $\alpha(s)$, это уравнение с отражающим аргументом, а при $s > s^*$ — с запаздывающим аргументом [2].

Скалярные дифференциальные операторы с инволюцией и гладким потенциалом изучались в обширной серии статей А.П. Хромова и М.Ш. Бурлуцкой (см. [4] – [18] в хронологическом порядке). В этих работах рассматривались операторы не только с периодическими краевыми условиями [15] – [18], но и с интегральными [4], с нулевым начальным условием [6] – [11], с квазипериодическими начальными условиями [5], [9], [11], [14], [18]. Операция инволюции была как при потенциале [15], [17], так и при производной [6] – [13], [16], [18]. Кроме того, рассматривались операторы более сложного вида [4], [5], [11], [14], с операцией инволюции и при производной, и при потенциале, мы такие операторы в настоящей работе не рассматриваем. Исследования проводились сведением оператора с инволюцией к подходящему оператору Дирака. В них резольвентным методом (с помощью контурного интегрирования) рассматривалась задача обоснования метода Фурье. Кроме того, была выписана асимптотика собственных значений операторов L_i, $i = 1, 3$, и установлена равносходимость спектральных разложений. Отметим также работу [19], в которой рассматривалась полнота системы собственных и присоединенных функций краевой задачи на конечном симметричном отрезке с оператором отражения и непрерывным потенциалом. Исследование в [19] проводилось с помощью замены Крылова-Боголюбова. Используемый нами в настоящей работе метод исследования, метод подобных операторов, также опирается на замену Крылова-Боголюбова (см. § 3). Дифференциальные операторы второго порядка с инволюцией изучались в статьях А.М. Сарсенби и Л.В. Крицкова (см. [20] и библиографический обзор, приведенный в ней). В серии работ А.Г. Баскакова с соавторами [21] – [26] также изучались дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией при потенциале. В [21] для системы дифференциальных уравнений (для матричного потенциала) с инволюцией получены оценки взвешенных средних и доказана равносходимость спектральных разложений. В [22] для того же оператора получена теорема о подобии исходного оператора оператору, который является прямой ортогональной суммой (см. определение 2) операторов конечного ранга. На ее основе выписана группа операторов, генератором которой является рассматриваемый оператор. В работе [23] рассматривается оператор более сложного вида в абстрактном гильбертовом пространстве (в отличие от [21], [22]), и также выписана группа операторов, используемая при описании решений. Наконец, в [24] для скалярного дифференциального оператора L_1 произведено обоснование метода Фурье для смешанной задачи (1) и приведены соответствующие оценки.

В данной работе исследования проводятся в русле подходов статьи [24], опираясь на метод подобных операторов (см. [27] – [30]). Во-первых, для оператора L_1, исследуемого в [24], улучшается асимптотика собственных значений и, следовательно, получена асимптотика собственных значений для операторов L_2 и L_3. Во-вторых, выписываются асимптотические формулы для групп операторов, генераторами которых являются исследуемые операторы L_i, $i = 1, 2, 3$. В-третьих, с использованием построенных групп операторов получены представления слабых решений неоднородных смешанных задач. В-четвертых, получены асимптотические оценки собственных векторов и равносходимости спектральных разложений. Результаты данной работы были частично анонсированы в [26].

Все основные результаты статьи, касающиеся спектральных характеристик (асимптотика спектра, равноходимость спектральных разложений и асимптотические оценки собственных векторов) операторов L_i, $i = 1, 2, 3$, а также построение групп операторов, генераторами которых они являются, получены на основе применения метода подобных операторов (см. теорему 1 о подобии исследуемых операторов оператору, являющемуся прямой ортогональной суммой оператора конечного ранга и операторов ранга 1).

Заметим, что операторы с инволюцией возникают в теории фильтрации, теории прогнозирования и при изучении субгармонических колебаний [31] – [34]. Интересные результаты, касающиеся дифференциальных операторов с инволюцией первого и второго порядка, можно найти в работах [35] – [44]. Операторы с инволюцией также интересны сведением к операторам Дирака (см. [4] – [18]).

Статья организована следующим образом. Во втором параграфе приводятся основные понятия, определения, касающиеся подобия операторов, и сформулированы основные результаты работы (теоремы 1 – 6). В частности, сформулирована теорема 1 о подобии операторов L_i, $i = 1, 2, 3$, операторам, которые являются прямой ортогональной суммой оператора конечного ранга и операторов ранга 1. Из этой теоремы вытекают теоремы 2, 3, 4 об асимптотике собственных значений, собственных векторов и спектральных проекторов операторов L_i, $i = 1, 2, 3$, а также выписан вид групп операторов, генераторами которых являются исследуемые операторы L_i, $i = 1, 2, 3$. В третьем параграфе сформулированы понятия сильных и слабых решений рассматриваемых задач Коши. В последующих параграфах производится доказательство и уточнение основных результатов. В четвертом параграфе приводится краткая схема основного метода получения оценок — метода подобных операторов, адаптированного к рассматриваемому классу операторов. В пятом параграфе, состоящем из трех пунктов, производится спектральный анализ абстрактных операторов в гильбертовом пространстве, близких к оператору L_1. В этот класс попадает оператор L_1 (и, соответственно, операторы L_2, L_3) после предварительного преобразования подобия. В пунктах 5.1 и 5.2 строятся используемые допустимые тройки (см. определение 17), в пункте 5.2 доказана основная теорема этого параграфа (теорема 19) о подобии оператора оператору, являющемуся прямой ортогональной суммой оператора ранга $2k+1$, $k \geqslant 0$, и операторов ранга 1. На основе теоремы 19 в пункте 5.3 получены асимптотические оценки собственных значений и собственных векторов исследуемого оператора и выписана группа операторов, генератором которой он является. В пункте 5.4 выводятся оценки спектральных проекторов. Далее, в шестом параграфе показывается, каким именно преобразованием подобия операторы L_2, L_3 приводятся к оператору вида L_1. В седьмом параграфе проводится предварительное преобразование подобия оператора L_1 в оператор, который является возмущением оператора дифференцирования оператором Гильберта-Шмидта (что позволит применить к нему результаты § 5). В восьмом параграфе доказываются основные результаты, сформулированные в § 2.

2. Подобные операторы и прямые суммы. Основная теорема о подобии и спектральные свойства операторов L_i, $i = 1, 2, 3$

Прежде чем сформулировать основные определения и результаты настоящего параграфа, введем в рассмотрение используемые далее пространства операторов. Символом $\operatorname{End}\mathcal{H}$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с нормой $\|X\| = \|X\|_\infty = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Xx\|$, $x \in \mathcal{H}$, $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$. Символом I обозначим тождественный оператор в алгебре $\operatorname{End}\mathcal{H}$. Далее символ $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ означает двусторонний идеал операторов Гильберта-Шмидта из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{H}$. Норма $\|X\|_2$ оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ задается равенством $\|X\|_2 = (\operatorname{tr} XX^*)^{1/2}$. Здесь $\operatorname{tr}(XX^*)$ — след оператора XX^*, принадлежащего двустороннему идеалу $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ ядерных операторов из $\operatorname{End}\mathcal{H}$ (см. [45]). Нормой в $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ является $\|X\|_1 = \operatorname{tr}(XX^*) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} s_n$, где (s_n) — последовательность s-чисел оператора X. Формула $(X,Y) = \operatorname{tr}(XY^*)$, X, $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, задает скалярное произведение в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Определение 1 ([49])**.** *Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются* подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ такой, что $A_1Ux = UA_2x$, $x \in D(A_2)$, $UD(A_2) = D(A_1)$. Оператор U называется* оператором преобразования *оператора A_1 в A_2.*

Пусть пространство $\mathcal{H}$ представимо в виде прямой суммы взаимно ортогональных ненулевых замкнутых подпространств $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е.

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n, \tag{8}$$

где $\mathcal{H}_i$ ортогонально $\mathcal{H}_j$ при $i \neq j$, i, $j \in \mathbb{Z}$, и $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n$, $x_n \in \mathcal{H}_n$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|^2$. В этом случае, последовательность $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ принято называть *ортогональным базисом из подпространств* пространства $\mathcal{H}$ [45, 46]. Такое представление пространства $\mathcal{H}$ ведет к существованию разложения единицы системой ортопроекторов $\mathcal{P} = \{P_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. При этом проекторы P_n, $n \in \mathbb{Z}$, обладают следующими свойствами: $P_n^* = P_n$, $n \in \mathbb{Z}$; $P_iP_j = 0$ при $i \neq j$, i, $j \in \mathbb{Z}$; ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} P_nx$ безусловно сходится к $x \in \mathcal{H}$ и $\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|P_nx\|^2$; из равенств $P_kx = 0$, $k \in \mathbb{Z}$ следует, что вектор x нулевой; $\mathcal{H}_k = \operatorname{Im} P_k$, $x_k = P_kx$, $k \in \mathbb{Z}$.

Определение 2 ([23], [24]). *Линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется* ортогональной прямой суммой *ограниченных операторов $A_n \in \operatorname{End} \mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, относительно разложения (8), при этом используется запись*

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n, \tag{9}$$

если

1) $\mathcal{H}_n \subset D(A) = \{x \in \mathcal{H} : \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \|A_k x_k\|^2 < \infty, x_k = P_k x, k \in \mathbb{Z}\}$, для всех $n \in \mathbb{Z}$;

2) каждое подпространство $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, инвариантно относительно оператора A и A_n, $n \in \mathbb{Z}$, есть сужение оператора A на $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$;

3) $Ax = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} A_k x_k$, $x \in D(A)$, где $x_k = P_k x$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если для последовательности подпространств $(\widetilde{\mathcal{H}}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ существует такой линейный ограниченный непрерывно обратимый оператор U и такой ортогональный базис из подпространств $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, что $\widetilde{\mathcal{H}}_n = U \mathcal{H}_n$, то $(\widetilde{\mathcal{H}}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, очевидно, тоже является базисом. Его принято называть *базисом Рисса из подпространств* (см. [46, 47]). Если, кроме того, оператор U представим в виде $U = I + W$, где $W \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то базис Рисса будем называть *базисом Бари* (см. [47, 48]). Для базисов Рисса будем использовать запись

$$\mathcal{H} = \biguplus_{k \in \mathbb{Z}} U \mathcal{H}_k = \biguplus_{k \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{H}}_k. \tag{10}$$

Разложение (10) будем называть *квазиортогональным* или *U-ортогональным.*

Определение 3 ([23], [24]). *Линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ назовем* квазиортогональной (U-ортогональной) прямой суммой *ограниченных операторов A_k, $k \in \mathbb{Z}$, относительно квазиортогонального разложения пространства $\mathcal{H}$ вида (10), если для некоторого обратимого оператора $U \in \operatorname{End} \mathcal{H}$ имеет место разложение $U^{-1} A U = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}} U^{-1} A_n U$ вида* (9). *При этом используется запись $A = \biguplus\limits_{k \in \mathbb{Z}} A_k$.*

Предположим, что операторы A и $\widetilde{A}$ подобны, и оператор U является оператором преобразования A в $\widetilde{A}$. Пусть также оператор $\widetilde{A}$ является ортогональной прямой суммой $\widetilde{A} = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{A}_k$. Из определений 1–3 немедленно вытекает, что в этом случае оператор A является U-ортогональной прямой суммой $A = \biguplus\limits_{k \in \mathbb{Z}} A_k$, где $A_k = U \widetilde{A}_k U^{-1}$. Более подробно свойства подобных операторов приведены ниже в лемме 1.

Также введем в рассмотрение оператор дифференцирования $L_0 : D(L_0) = D(L) \subset L_2[0, \omega] \to L_2[0, \omega]$, $L_0 = d/ds$. Отметим, что оператор L_1 представим в виде $L_1 = L_0 - a_1 I - V_1$, где

$$(V_1 y)(s) = v_1(s) y(\omega - s). \tag{11}$$

Оператор V_1 корректно определен ввиду включения $D(L_0) \subset D(V_1)$. Оператор L_0 теперь будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор V_1 — роль возмущения.

Пространство $L_2[0,\omega]$ изометрически изоморфно гильбертову пространству $L_{2,\omega}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ периодических периода ω, определенных на всей оси $\mathbb{R}$ и суммируемых с квадратом модуля на $[0,\omega]$ комплексных функций. В дальнейшем каждая функция $x \in L_2[0,\omega]$ будет отождествляться с ее периодическим периода ω продолжением на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим невозмущенный оператор L_0 и опишем его спектральные свойства. Спектр $\sigma(L_0)$ оператора L_0 представим в виде

$$\sigma(L_0) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k,$$

где $\sigma_k = \{\lambda_k\}$, $\lambda_k = \frac{i2\pi k}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$, — простые изолированные собственные значения. Соответствующими собственными векторами являются функции $e_k(s) = e^{i\frac{2\pi k}{\omega}s}$, $s \in [0,\omega]$, $k \in \mathbb{Z}$, образующие в пространстве $L_2[0,\omega]$ ортонормированный базис (с учетом введенного в $L_2[0,\omega]$ скалярного произведения). Соответствующий спектральный проектор $P_n = P(\sigma_n, L_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, (проектор Рисса) определяется формулой

$$(P_n x)(s) = \frac{1}{\omega}\biggl(\int_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}\,d\tau\biggr)e^{i\frac{2\pi k}{\omega}s} = \widehat{x}(n)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}s},\ x \in L_2[0,\omega],\ s \in [0,\omega].$$

Здесь $\widehat{x}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициент Фурье периодической функции $x \in L_2[0,\omega]$, определенный формулой

$$\widehat{x}(n) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}\,d\tau.$$

Отметим, что невозмущенный оператор L_0 есть ортогональная прямая сумма одномерных операторов $(L_0)_k = L_0|\mathcal{H}_k = \frac{i2\pi k}{\omega}I_k$, где I_k обозначает тождественный оператор в одномерном подпространстве $\mathcal{H}_k = \operatorname{Im} P_k$, т. е. $L_0 = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(L_0)_k$.

Пусть $P_{(k)} = \sum\limits_{|j|\leqslant k} P_j$, $k \geqslant 0$, и $(L_0)_{(k)}$ — сужение оператора L_0 на подпространство $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im} P_{(k)}$. Тогда оператор L_0 также есть ортогональная прямая сумма операторов

$$L_0 = (L_0)_{(k)} \oplus \biggl(\bigoplus_{|j|>k}(L_0)_j\biggr) = (L_0)_{(k)} \oplus \biggl(\bigoplus_{|j|>k} i\frac{2\pi j}{\omega}I_j\biggr), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \mathbb{Z}$$

относительно представления пространства $L_2[0,\omega]$ в виде

$$L_2[0,\omega] = \mathcal{H}_{(k)} \oplus \biggl(\bigoplus_{|j|>k}\mathcal{H}_j\biggr). \tag{12}$$

Отметим, что $(L_0)_{(k)} = \bigoplus\limits_{|j|\leqslant k}\frac{i2\pi j}{\omega}I_j$ относительно ортогонального разложения $\mathcal{H}_{(k)} = \bigoplus\limits_{|j|\leqslant k}\mathcal{H}_j$.

Перед тем как сформулировать основной результат — теорему 1 о подобии исследуемых операторов операторам, представимым в виде прямой ортогональной суммы операторов конечного ранга, введем необходимые обозначения. Пусть

$$\lambda_j = \frac{i2\pi j}{\omega}, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

(14) $$a_2 = \widehat{q}_0(0),$$

(15) $$v_2(s) = q_1(s)\exp\Big(\int_s^{\omega-s}(q_0(\tau)-a_2)\,d\tau\Big) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{v}_2(l)e^{\lambda_l s}, \quad s\in[0,\omega],$$

(16) $$\widetilde{q}_0(s) = \frac{1}{2}(g_0(s)+g_0(\omega-s)) + \frac{i}{2}(g_1(s)-g_1(\omega-s)), \quad s\in[0,\omega],$$

(17) $$\widetilde{q}_1(s) = \frac{i}{2}(g_0(s)-g_0(\omega-s)) + \frac{1}{2}(g_1(s)+g_1(\omega-s)), \quad s\in[0,\omega],$$

(18) $$a_3 = \widehat{\widetilde{q}}_0(0),$$

(19) $$v_3(s) = \widetilde{q}_1(s)\exp\left(\int_s^{\omega-s}(\widetilde{q}_0(\tau)-a_3)\,d\tau\right) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{v}_3(l)e^{\lambda_l s}, \quad s\in[0,\omega].$$

В основе всех приводимых в статье результатов и оценок лежит

Теорема 1. *Существует такое число* $k\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$, *что каждый из операторов* L_i, $i=1,2,3$, *подобен оператору* $L_0-a_iI-\widetilde{V}_i$, $i=1,2,3$, *где операторы* $\widetilde{V}_i$, $i=1,2,3$, *принадлежат идеалу операторов Гильберта-Шмидта* $\mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$ *и имеют место равенства*

$$L_iU_i = U_i(L_0-a_iI-\widetilde{V}_i), \quad i=1,2,3,$$

подпространства $\mathcal{H}_{(k)}=\operatorname{Im}P_{(k)}$ *и* $\mathcal{H}_j=\operatorname{Im}P_j$, $|j|>k$, *являются инвариантными относительно операторов* L_0, $\widetilde{V}_i$, $i=1,2,3$. *Более того, операторы* L_i, $i=1,2,3$, *есть* U_i*-ортогональная прямая сумма вида*

$$L_i = U_i\left(\left((L_0)_{(k)}-a_iI_{(k)}-\widetilde{V}_{i(k)}\right)\oplus\left(\bigoplus_{|j|>k}(\widetilde{V}_{ij}+(\lambda_j-a_i)I_j)\right)\right)U_i^{-1},\ i=1,2,3,$$

относительно U_i*-ортогонального разложения пространства* $L_2[0,\omega]$ *вида*

(20) $$L_2[0,\omega] = U_i\mathcal{H}_{(k)}\uplus\biguplus_{|j|>k}U_i\mathcal{H}_j.$$

Каждый из операторов $\widetilde{V}_{i(k)}$ *имеет ранг не более* $2k+1$, *а операторы* $\widetilde{V}_{ij}$, $|j|>k$, $i=1,2,3$, *— ранг* 1 *или* 0. *Обратимые операторы преобразования* U_i, $i=1,2,3$, *принадлежат* $\operatorname{End}L_2[0,\omega]$ *и* $U_1-I\in\mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$.

Конкретный вид операторов U_i и $\widetilde{V}_i$, $i=1,2,3$, будет приведен далее в § 8, см. формулы (73) – (75) и лемму 13.

Далее символом ℓ_p, $p\in[1,\infty)$, будет обозначаться банахово пространство суммируемых со степенью p двусторонних последовательностей комплексных чисел с нормой $\|y\|=(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|y(i)|^p)^{1/p}$.

В условиях следующей теоремы 2 будет получено асимптотическое представление спектра каждого из операторов L_i, $i=1,2,3$, вида

(21) $$\widetilde{\sigma}_{(k)}\cup\left(\bigcup_{|j|>k}\{\widetilde{\lambda}_j(L_i)\}\right),$$

где

(22) $$\widetilde{\lambda}_j(L_i) = \lambda_j - a_i - \mu_j(L_i), \quad i=1,2,3,$$

и числа $\mu_j(L_i)$, $|j| > k$, $i = 1,2,3$, имеют асимптотику

$$\mu_j(L_i) = \widehat{v}_i(2j) + \delta_{ij}, \quad i = 1,2,3, \tag{23}$$

где последовательности $(\delta_{ij}, |j| > k)$, $i = 1,2,3$, принадлежат ℓ_p при любом $p > 1$ и

$$\mu_j(L_i) = \widehat{v}_i(2j) + \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{j\neq n}\frac{(\widehat{v}_i(n+j))^2}{n-j} + \delta'_{ij}, \quad i = 1,2,3, \tag{24}$$

где последовательности $(\delta'_{ij}, |j| > k)$, $i = 1,2,3$, принадлежат ℓ_1.

Теорема 2. *Пусть число k удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда спектр $\sigma(L_i)$, $i = 1,2,3$, каждого из операторов L_i, $i = 1,2,3$, допускает представление вида (21), (22), и последовательность $(\mu_j(L_i))$, $|j| > k$, принадлежит ℓ_2. Кроме того, имеют место асимптотические формулы (23), (24). Если v_i, $i = 1,2,3$, — функции ограниченной вариации, то $|\mu_j(L_i)| \leqslant C/j$, $|j| > k$, и $C > 0$ — некоторая постоянная.*

Теорема 3. *Собственные векторы операторов L_i, $i = 1,2,3$, образуют в пространстве $L_2[0,\omega]$ базис Рисса. Для собственных векторов $\widetilde{e}_j$, $|j| \geq k$, оператора L_1 имеют место следующие оценки:*

1) $\|\widetilde{e}_j - e_j\|_2 \leq \beta_j$, где последовательность $(\beta_j, |j| > k)$ принадлежит ℓ_2;

2) $\Big\|\widetilde{e}_j - e_j - \sum\limits_{n\neq j}\frac{\widehat{v}_1(n+j)}{n-j}e_n - \widehat{v}_1(2j)e_j + \frac{\omega}{2\pi i}\sum\limits_{n\neq j}\Big(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\frac{\widehat{v}_1(n+l)\widehat{v}_1(n+j)}{j-n}\Big)e_n\Big\|_2 \leq \beta'_j$,
где последовательность $(\beta'_j, |j| > n)$, принадлежит ℓ_1;

Для собственных векторов f_j, $|j| > k$, оператора L_2 и собственных векторов w_j, $|j| > k$, оператора L_3 имеют место следующие оценки: $\|f_j - \widetilde{f}_j\|_2 \leq \gamma_j$, $\|w_j - \widetilde{w}_j\| \leq \gamma'_j$, где $\widetilde{f}_j(s) = \exp\left(\int_0^s (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\right) e^{\lambda_j s}$,

$$\widetilde{w}_j(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(\lambda_j s + \int_0^s (\widetilde{q}_0(\tau) - a_3)\,d\tau\right) + i\exp\left(\int_0^{\omega - s}(\widetilde{q}_0(\tau) - a_3)\,d\tau - \lambda_j s\right)\right),$$

и последовательности $(\gamma_j, |j| > k)$, $(\gamma'_j, |j| > k)$ принадлежат ℓ_2.

Определение 4. *Две системы проекторов (P_n) и $(\widetilde{P}_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, назовем* равносходящимися относительно разложения *(10) гильбертова пространства $\mathcal{H}$ или U*-равносходящимися*, если*

$$\lim_{N\to\infty}\Big\|\sum_{|n|\leqslant N}(\widetilde{P}_n - UP_nU^{-1})\Big\| = 0.$$

Если $U = I$, то две системы называются равносходящимися.

Введем в рассмотрение два обратимых оператора W_2, $W_3 \in \operatorname{End} L_2[0,\omega]$, задаваемых формулами

$$(W_2 y)(s) = \exp\Big(\int_0^s (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\Big)y(s), \quad s \in [0,\omega], \quad y \in L_2[0,\omega], \tag{25}$$

$$(W_3 y)(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(y(s) + iy(\omega - s)), \quad s \in [0,\omega], \quad y \in L_2[0,\omega]. \tag{26}$$

Теорема 4. *В условиях теоремы 1, имеют место следующе предельные соотношения:*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\widetilde{P}_{(k)}(L_1)+\sum_{|j|\geqslant k+1}^{n}\widetilde{P}_j(L_1)-\sum_{|j|\leqslant n}P_j\right\|_2=0, \tag{27}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\widetilde{P}_{(k)}(L_2)+\sum_{|j|\geqslant k+1}^{n}\widetilde{P}_j(L_2)-\sum_{|j|\leqslant n}W_2P_jW_2^{-1}\right\|_2=0, \tag{28}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\widetilde{P}_{(k)}(L_3)+\sum_{|j|\geqslant k+1}^{n}\widetilde{P}_j(L_3)-\sum_{|j|\leqslant n}W_3W_2P_jW_2^{-1}W_3^{-1}\right\|_2=0, \tag{29}$$

где $\widetilde{P}_{(k)}(L_i)=U_iP_{(k)}U_i^{-1}$ *и* $\widetilde{P}_j(L_i)=U_iP_jU_i^{-1}$, $j,k\in\mathbb{Z}$, *– спектральные проекторы оператора* L_i, $i=1,2,3$.

Из теоремы 4 следует, что системы проекторов $(\widetilde{P}_{(k)}(L_1),\widetilde{P}_j(L_1),|j|>k)$ и (P_n) являются равносходящимися, а пары систем проекторов $(\widetilde{P}_{(k)}(L_2),\widetilde{P}_j(L_2),$ $|j|>k)$ и (P_n), $(\widetilde{P}_{(k)}(L_3),\widetilde{P}_j(L_3),|j|>k)$ и (P_n) являются W_2-равносходящимися и W_3W_2 -равносходящимися соответственно.

Теорема 5. *Дифференциальные операторы* L_i, $i=1,2,3$, *являются генераторами сильно непрерывных групп операторов* $T_i:\mathbb{R}\to\operatorname{End}L_2$, $i=1,2,3$. *Существует такое* $k\in\mathbb{Z}_+$, *что каждая из этих групп* $T_i:\mathbb{R}\to\operatorname{End}L_2$, $i=1,2,3$, *подобна соответствующей группе* $\widetilde{T}_i:\mathbb{R}\to\operatorname{End}L_2$, $i=1,2,3$, *для которых имеют место ортогональные разложение вида*

$$\widetilde{T}_i(t)=\bigoplus_{j=-\infty}^{-k-1}e^{t(\lambda_j-\mu_j(L_i)-a_i)I_j}\oplus e^{t(L_{0(k)}-a_iI_{(k)}-\widetilde{V}_{i(k)})}\bigoplus_{j=k+1}^{\infty}e^{t(\lambda_j-\mu_j(L_i)-a_i)I_j}, \tag{30}$$

$t\in\mathbb{R}$, *относительно разложения пространства* $L_2[0,\omega]$ *вида (21), причем*

$$T_i(t)=U_i\widetilde{T}_i(t)U_i^{-1},\quad t\in\mathbb{R},\quad i=1,2,3, \tag{31}$$

где U_i, $i=1,2,3$, *– операторы из теоремы 1. Операторы* $\widetilde{V}_{i(k)}$, $i=1,2,3$, *принадлежат* $\operatorname{End}\mathcal{H}_{(k)}$ *и числа* $\mu_j(L_i)$, $|j|>k$, $i=1,2,3$, *определены в теореме 2. Группы операторов* $T_i(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $i=1,2,3$, *допускают* U_i*-ортогональные разложения относительно* U_i*-ортогональных разложений пространства* $L_2[0,\omega]$ *вида (20),* $i=1,2,3$.

Теорема 6. *Группы операторов* $\widetilde{T}_i$, $i=1,2,3$, *допускают представления вида*

$$\widetilde{T}_i(t)=e^{t((L_0)_{(k)}-\widetilde{V}_{i(k)}-a_iI_{(k)})}P_{(k)}+\sum_{|j|>k}e^{t(\lambda_j-\mu_j(L_i)-a_i)}P_j,\ t\in\mathbb{R},\ i=1,2,3. \tag{32}$$

Определение 5. *Полугруппа (группа)* $T_0:\widetilde{\mathbb{J}}\to\operatorname{End}\mathcal{H}$, $\widetilde{\mathbb{J}}=\{\mathbb{R},\mathbb{R}_+\}$, *называется* базовой для сильно непрерывной полугруппы (группы) $T:\widetilde{\mathbb{J}}\to\operatorname{End}\mathcal{H}$, *если существует сильно непрерывная операторнозначная функция* $Y:\widetilde{\mathbb{J}}\to$ $\operatorname{End}\mathcal{H}$ *и обратимый оператор* $U\in\operatorname{End}\mathcal{H}$, *такие что* $T(t)=UT_0(t)Y(t)U^{-1}$ *и*

$$\lim_{t\to\infty}\|Y(t)\|=0. \tag{33}$$

Полугруппа (группа) $T_0 : \widetilde{\mathbb{J}} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ *называется* экспоненциально базовой*, если, кроме того,*

$$\|Y(t)\| \leqslant Ce^{-\beta t}, \quad \beta > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Из теоремы 6 вытекает, что при выполнении условий

$$\operatorname{Re} a_i > 0, \quad i = 1,2,3, \tag{34}$$

базовыми для групп T_i, $i = 1,2,3$, являются группы $T_{0i} : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$:

$$T_{0i}(t) = e^{t(L_{0(k)} - \widetilde{V}_{i(k)} - a_i I_{(k)})} P_{(k)} + \sum_{|j|>k} e^{\lambda_j t} P_j, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3.$$

Соответственно, операторнозначные функции $Y_i : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ на подпространстве $\mathcal{H}_{(k)}$ равны нулю, а на подпространстве $\operatorname{Im}(I - P_{(k)})$ представляются в виде прямой ортогональной суммы

$$Y_i(t) = \bigoplus_{|j|\geqslant k+1} e^{t(-a_i - \mu_j(L_i))I_j}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3,$$

или

$$Y_i(t) = \sum_{|j|\geqslant k+1} e^{t(-a_i - \mu_j(L_i))} P_j, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3.$$

При этом условие (34) гарантирует выполнение предельного соотношения (33) для операторнозначных функций $Y_i(t)$, $i = 1,2,3$.

Важно также отметить тот факт, что операторы L_i, $i = 1,2,3$, и iL_i, $i = 1,2,3$, в отличие от рассматриваемого оператора L из статьи [24], могут быть обратимыми. Такое возможно при $\operatorname{Re} a_i \neq 0$, $i = 1,2,3$. Одно из условий обратимости приведено в следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть потенциал* v_i, $i = 1,2,3$*, удовлетворяет условию*

$$\sqrt{|\operatorname{Re} a_i|} > \|v_i\|_2 \sqrt{\omega/2}.$$

Тогда соответствующий оператор L_i *обратим.*

В заключение этого параграфа отметим, что понятийный аппарат, связанный с ортогональной прямой суммой, был введен впервые в работе [22], продолжил развиваться в [23], [24], [26], [50], а также использовался в работах [51], [52], в применении к разностным операторам.

3. Сильные и слабые решения

Наряду с неоднородной задачей (4) рассмотрим однородные задачи

$$\widetilde{u}'_t = Lu, \quad \widetilde{u}(0) = \varphi, \tag{35}$$

$$\widetilde{u}'_t = iLu, \quad \widetilde{u}(0) = \varphi, \tag{36}$$

где, напомним, символом L обозначен один из операторов L_i, $i = 1,2,3$. Сформулируем определения, связанные с понятием решений рассматриваемых однородных и неоднородных задач Коши.

Определение 6. *(*[53]*)* Классическим решением *для каждой из задач (1), (2) или (3) называется непрерывно дифференцируемая функция* $u : \mathcal{J} \times [0,\omega] \to \mathbb{C}$*, принадлежащая пространству* $C(\mathcal{J}, L_2[0,\omega])$*, такая, что ассоциированная с ней функция* $\widetilde{u} : \mathcal{J} \to L_2[0,\omega]$ *является непрерывно дифференцируемой, для любого* $t \in \mathcal{J}$ *удовлетворяет условию* $\widetilde{u}(t) \in D(L)$ *и уравнению (4).*

Определение 7. *(*[53, § 3.1]*) Функция $u \in C(\mathcal{J}, L_2[0,\omega])$ называется* слабым решением (mild solution) *задачи (4), если $\int_0^t \widetilde{u}(s)\,ds \in D(L)$ для любого $t \in \mathcal{J}$ и*

$$\widetilde{u}(t) = \varphi + L\left(\int_0^t \widetilde{u}(s)\,ds\right) + \int_0^t \widetilde{f}(s)\,ds, \quad t \in \mathcal{J},$$

где интегралы Римана рассматриваются для непрерывных функций, определенных на $\mathcal{J}$ со значением в гильбертовом пространстве $L_2[0,\omega]$.

Определениям 6 и 7 естественным образом соотвтетствют

Определение 8. Классическим решением *задачи (35), где $\varphi \in W_2^1[0,\omega]$, называется функция $u : \mathcal{J} \times [0,\omega] \to \mathbb{C}$, принадлежащая пространству $C(\mathcal{J}, L_2[0,\omega])$, такая, что ассоциированная с ней функция $\widetilde{u} : \mathcal{J} \to L_2[0,\omega]$ является непрерывно-дифференцируемой и удовлетворяет задаче (35).*

Определение 9. *Функция $\widetilde{u} : \mathcal{J} \to L_2[0,\omega]$ называется* слабым решением (mild solution) *задачи (35), если она является равномерным пределом (на каждом конечном промежутке из $\mathcal{J}$) классических решений $(\widetilde{u}_n)$, $n \geqslant 1$, для которых $\widetilde{u}_n(0) = \varphi_n \in W_2^1[0,\omega]$, $n \geqslant 1$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$.*

Определение 10. *Говорят, что задача (35)* равномерно корректна*, если для любого начального условия $\varphi \in L_2[0,\omega]$ существует единственное слабое решение $x \in C(\mathcal{J}, L_2[0,\omega])$, удовлетворяющее условию $\widetilde{x}(0) = \varphi$.*

Близкое определение корректной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с постоянным операторным коэффициентом дано в монографии [54, Гл. II, § 3]. Отметим, что определение равномерно корректной разрешимости задачи эквивалентно тому, что оператор L является генератором сильно непрерывной группы операторов. Необходимые сведения из теории полугрупп можно найти в [55], [56].

Теорема 8. *Задача (35) равномерно корректна. Дифференциальный оператор L является генератором сильно непрерывной группы операторов*

$$T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L_2[0,\omega],$$

определенной формулами (30) – (32). Каждое классическое решение $u \in C(\mathcal{J}, L_2[0,\omega])$ задачи (35) задается формулой

$$u(t,s) = (T(t)\varphi)(s), \quad s \in [0,\omega], \quad t \in \mathcal{J}, \tag{37}$$

где $\varphi \in W_2^1[0,\omega]$ и $\varphi(0) = \varphi(\omega)$. Каждое слабое решение записывается в виде (37), где $\varphi \in L_2[0,\omega]$.

Следует отметить, что теорема 8 (по крайней мере для ограниченной функции v) может быть получена на основе общих теорем о возмущенных полугруппах (группах) операторов (см. [55], [56]).

Теорема 9. *Задача (36) не является равномерно корректной.*

Замечание 1. *Из* [53, Proposition 3.1.16] *следует, что любое слабое решение $u \in C(\mathcal{J}, L_2[0,\omega])$ задачи (4) допускает представление*

$$\widetilde{u}(t) = T(t-t_0)\widetilde{u}(t_0) - \int_{t_0}^t T(t-\tau)\widetilde{f}(\tau)\,d\tau, \quad t \in \mathcal{J}, \tag{38}$$

где $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} L_2[0,\omega]$ — группа операторов из теоремы 8, генератором которой является оператор L.

Из замечания 1 вытекает, что следующее определение классического решения эквивалентно определению 6.

Определение 11. Классическим решением *каждой из задач (1), (2), (3) называется функция* $u \in C(\mathcal{J}, L_2[0,\omega])$, *удовлетворяющая равенству (38) (интегральному уравнению), такая, что* $\widetilde{u}(t) \in D(L) \subset W_2^1[0,\omega]$.

Таким образом, для классического решения выполняется равенство (4).

Определение 12. *Представление группы операторов (слабых решений) вида*

$$
\begin{aligned}
&T_i(t)\varphi = U_i\widetilde{T}_i(t)U_i^{-1}\varphi = \\
(39)\qquad &= U_i e^{(L_{0(k)}-a_iI_{(k)}-\widetilde{V}_{i(k)})t}P_{(k)}U_i^{-1}\varphi + \sum_{|j|>k} e^{(\frac{i2\pi j}{\omega}-a_i-\mu_j(L_i))t}U_iP_jU_i^{-1}\varphi, \\
&\varphi \in L_2[0,\omega], \quad i = 1,2,3,
\end{aligned}
$$

назовем рядом Фурье слабого решения $u(t,s) = (T_i(t)\varphi)(s)$, $t \in \mathbb{J}$, $s \in [0,\omega]$, $\varphi \in L_2$, *задачи (35).*

Далее удобно обозначить $\psi = U_i^{-1}\varphi$. Пусть $\psi(s) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(n)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}s}$, $s \in [0,\omega]$.

Рассмотрим последовательности чисел $\beta_l = \|P_lW\|_2$, $\alpha_{il} = \sup\limits_{|j|\geqslant l} |\mu_j(L_i)|$, $l \in \mathbb{Z}$. Они обладают свойствами: $\lim\limits_{l\to\infty} \alpha_{il} = 0$ и (β_l) — суммируемая с квадратом последовательность.

Из представления решения в виде (39) для оператора L_1 следует

Теорема 10. *Пусть* $a_1 = 0$. *Для любой функции* $\varphi \in L_2[0,\omega]$ *имеют место оценки*

$$
\begin{aligned}
&\Big\| T_1(t)\varphi - U_1 e^{(L_{0(k)}-\widetilde{V}_{1(k)})t}P_{(k)}\psi - \sum_{k\leqslant|j|\leqslant N} e^{(\frac{i2\pi j}{\omega}-\mu_j(L_1))t}UP_j\psi \Big\|_2 \leqslant \\
&\leqslant C\bigg(\sum_{|j|\geqslant N+1} e^{2\mu_j(L_1)|t|}(|\widehat{\psi}(j)|^2 + \beta_j^2\|\psi\|^2)\bigg)^{\frac12} \leqslant \\
&\leqslant Ce^{\alpha_{1(N+1)}|t|}\bigg(\sum_{|j|\geqslant N+1}(|\widehat{\psi}(j)|^2 + \beta_j^2\|\psi\|^2)\bigg)^{\frac12}, \quad t \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

для $N > k$ *и некоторой постоянной* $C > 0$.

Теорема 11. *Пусть* $a_2 = a_3 = 0$. *Для любой функции* $\varphi \in L_2[0,\omega]$ *и операторов* L_2 *и* L_3 *имеют место оценки*

$$
\begin{aligned}
&\Big\| T_i(t)\varphi - U_i e^{(L_{0(k)}-\widetilde{V}_{i(k)})t}P_{(k)}\psi - \sum_{k\leqslant|j|\leqslant N} e^{(\frac{i2\pi j}{\omega}-\mu_j(L_i))t}U_iP_j\psi \Big\|_2 \leqslant \\
&\leqslant C\bigg(\sum_{|j|\geqslant N+1} e^{2|\mu_j(L_i)||t|}\|U_iP_j\psi\|_2)\bigg)^{\frac12} \leqslant \\
&\leqslant C_ie^{\alpha_{i(N+1)}|t|}\sum_{|j|\geqslant N+1}\|U_iP_j\psi\|_2^{1/2}, \quad t \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

для $N > k$ *и некоторых постоянных* $C_i > 0$, $i = 1,2$.

Для доказательства теорем 10 и 11 используются формулы (30) и (32) и равенство Парсеваля. Производимые оценки фактически помещены в формулах.

Наличие группы операторов T позволяет корректно определить оператор $\frac{d}{dt} - L$ в ряде функциональных пространств. Тем самым появляется возможность использовать результаты работ [57] – [60]. Символом $C_b = C_b(\mathcal{J}, L_2[0,\omega])$ обозначено банахово пространство непрерывных ограниченных на $\mathcal{J}$ функций со значениями в $L_2[0,\omega]$ и нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathcal{J}} \|x(t)\|_2$, $x \in C_b$. Из теоремы 2 следует, что $\sigma(L) \cap i\mathbb{R}$ есть не более чем счетное множество, не имеющее конечных предельных точек. Поэтому непосредственно из [61] следует

Теорема 12. *Каждое слабое ограниченное решение $\widetilde{u} \in C_b$ задачи (35) является почти периодической функцией Бора (см.* [62]*).*

Далее и до конца параграфа предполагается, что $\mathbb{J}$ совпадает с одним из множеств $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}$.

Определение 13 ([63], [64])**.** *Функция $x_0 \in C_b$ называется* медленно меняющейся на бесконечности*, если* $\lim\limits_{|s|\to\infty} \|x_0(t+s) - x_0(s)\|_2 = 0.$

Определение 14 ([63], [64])**.** *Равномерно непрерывная функция $x \in C_b$ называется* почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать (обобщенный) тригонометрический многочлен вида*

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) e^{i\lambda_k t}, \quad t \in \mathbb{J},$$

где x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, — медленно меняющиеся на бесконечности функции и λ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, — вещественные числа, такой, что

$$\sup_{t\in\mathbb{J}} \left\| x(t) - \sum_{k=1}^{n} x_k(t) e^{i\lambda_k t} \right\| < \varepsilon.$$

Определение 15 ([63], [64])**.** *Функция $x \in C_b$ называется* исчезающей на бесконечности*, если* $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\|_2 = 0.$

Символом $C_0 = C_0(\mathbb{J}, L_2[0,\omega])$ обозначим пространство функций, исчезающих на бесконечности.

Непосредственно из [64, Теорема 6.3] вытекает

Теорема 13. *Пусть $\widetilde{u} \in C_0$ — слабое решение неоднородной задачи (4) и $\widetilde{f} \in C_0$. Тогда $\widetilde{u}$ — является почти периодической на бесконечности.*

4. Метод подобных операторов. Абстрактная схема

В этом параграфе кратко рассматривается абстрактная схема метода подобных операторов, адаптированная к изучаемому классу операторов.

Метод подобных операторов является одним из самых эффективных методов исследования спектральных свойств возмущенных линейных операторов. Впервые преобразование подобия осуществлялось К.О. Фридрихсом [65] для исследования возмущенных самосопряженных операторов с непрерывным спектром и возникающих соответствующих линейных уравнений. Метод подобных операторов также опирается на метод Пуанкаре нормальных форм, используемый в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, метод Ляпунова кинематического подобия дифференциальных операторов и абстрактную замену Крылова-Боголюбова [66]. Также предшественником данного метода является метод Р. Тернера [67], для возмущенных нормальных компактных операторов в гильбертовом пространстве. Метод Тернера с точки зрения метода подобных операторов подробно анализировался в [68]. Окончательно метод подобных операторов оформляется в работах А.Г. Баскакова (см., например, [69] – [74]). Метод подобных операторов используется в спектральном анализе различных классов дифференциальных [27] – [30], [75] – [78] и разностных [51], [52], [79] операторов.

Мы будем в основном придерживаться в изложении работ [28, 29, 80].

Основная идея метода состоит в преобразовании подобия исследуемого (возмущенного) оператора к оператору, спектральные свойства которого легко изучать. В рассматриваемом случае преобразованный оператор будет являться ортогональной прямой суммой операторов конечного ранга, действующего в конечномерных инвариантных относительно невозмущенного оператора подпространствах.

Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств. Соответствующее утверждение удобно формулировать в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, — два подобных оператора и $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$, $\sigma_r(A_i)$, $i = 1, 2$, — спектр, дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов A_i, $i = 1, 2$, соответственно;

2) если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A_2|\mathcal{H}_k$, $k = 1, 2$, — сужение A_2 на $\mathcal{H}_k$ относительно прямой суммы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, то подпространства $\widetilde{\mathcal{H}}_k = U(\mathcal{H}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \uplus A_{12}$, где $A_{1k} = A_1|\widetilde{\mathcal{H}}_k$, $k = 1, 2$, при этом $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 \uplus \widetilde{\mathcal{H}}_2$. Кроме того, если P — проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ (т. е. $\mathcal{H}_1 = \operatorname{Im} P$ — образ проектора P, $\mathcal{H}_2 = \operatorname{Im}(I - P)$ — образ дополнительного проектора $I - P$), то проектор $\widetilde{P} \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 \uplus \widetilde{\mathcal{H}}_2$, определяется формулой

$$\widetilde{P} = UPU^{-1}.$$

3) если a — собственный вектор оператора A_2, отвечающий собственному значению λ_0, то $b = Ua$ — собственный вектор оператора A_1, отвечающий тому же собственному значению λ_0.

4) если оператор A_2 является генератором сильно непрерывной полугруппы (группы) операторов $T_2 : \mathbb{J} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ (класса C_0), то оператор A_1 является генератором сильно непрерывной полугруппы (группы) операторов

$$T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}, \quad t \in \mathbb{J}, \quad T_1 : \mathbb{J} \to \operatorname{End}\mathcal{H},$$

где $\mathbb{J} = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$.

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный замкнутый оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и имеющий плотную область определения $D(A)$.

Определение 16 ([49])**.** *Оператор $B : D(B) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется* подчиненным *оператору A, если $D(B) \supseteq D(A)$ и существует такая постоянная $C > 0$, что $\|Bx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|)$ для любого $x \in D(A)$.*

Множество операторов, подчиненных оператору A, обозначим через $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Если определить в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ норму формулой

$$\|B\|_A = \inf\{C > 0 : \|Bx\| \leqslant C(\|x\| + \|Ax\|)\},$$

то $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ является банаховым пространством. Обычно, без ограничения общности, считается $D(A) = D(B)$.

Рассмотрим возмущенный оператор $A - B : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, где $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, и спектральные свойства линейного замкнутого оператора A известны.

Определим трансформатор (т. е. линейный оператор в пространствах операторов; терминология М.Г. Крейна [45]) $\mathrm{ad}_A : D(\mathrm{ad}_A) \subset \mathrm{End}\,\mathcal{H} \to \mathrm{End}\,\mathcal{H}$ формулой

$$\mathrm{ad}_A X = AX - XA, \quad X \in D(\mathrm{ad}_A),$$

с областью определения $D(\mathrm{ad}_A)$, состоящей из операторов $X \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}$, обладающих свойствами:

1) $XD(A) \subset D(A)$;

2) оператор $\mathrm{ad}_A X : D(A) \to \mathcal{H}$ допускает ограниченное расширение Y на $\mathcal{H}$ и полагается $\mathrm{ad}_A X = Y$.

Наиболее важным понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки.

Определение 17 ([28, 29, 80])**.** *Пусть $\mathcal{M}$ — линейное подпространство из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и $J : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\Gamma : \mathcal{M} \to \mathrm{End}\,\mathcal{H}$ — трансформаторы. Тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ назовем* допустимой тройкой *для оператора A, а $\mathcal{M}$ —* пространством допустимых возмущений*, если:*

1) $\mathcal{M}$ — банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|_*$, непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, т. е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|X\|_A \leqslant C\|X\|_*$ для любого $X \in \mathcal{M}$;

2) J и Γ — ограниченные линейные операторы, причем J — проектор;

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и имеют место равенства

$$(\mathrm{ad}_A \Gamma X)x = (X - JX)x, \quad x \in D(A), \quad X \in \mathcal{M},$$

и $\Gamma X \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}$ — единственное решение уравнения

$$\mathrm{ad}_A Y = AY - YA = X - JX, \tag{40}$$

удовлетворяющее условию $JY = 0$;

4) $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y \in \mathcal{M}$ для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\|\Gamma\| \leqslant \gamma, \quad \max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leqslant \gamma\|X\|_*\|Y\|_*; \tag{41}$$

5) $J((\Gamma X)JY) = 0$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}$;

6) для любых $X \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$ существует такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что

$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty < \varepsilon. \tag{42}$$

Теперь зафиксируем некоторую допустимую тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ для невозмущенного оператора A.

Теорема 14 ([28, 29, 80])**.** *Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ тройка и B — некоторый оператор из $\mathcal{M}$. Тогда, если*

$$4\|J\|\|B\|_*\gamma < 1, \tag{43}$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathcal{M}$ является решением нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X). \tag{44}$$

Решение X_* может быть найдено методом простых итераций, положив $X_0 = 0$, $X_1 = B$, ... Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma X_* \in \operatorname{End}\mathcal{H}$. Отображение $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \mathcal{M} : \|X - B\|_* \leqslant 3\|B\|_*\}$.

Из леммы 1 и теоремы 14 следует

Теорема 15 ([29])**.** *Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая тройка для оператора $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, оператор $B \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условию (43) и оператор $A - JX_*$ является генератором сильно непрерывной группы операторов $\widetilde{T} : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$. Тогда оператор $A - B$ является генератором группы операторов $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, определенной равенствами:*

$$T(t) = (I + \Gamma X_*)\widetilde{T}(t)(I + \Gamma X_*)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где X_* — решение уравнения (44).

Часто бывает сложно построить пространство допустимых возмущений, содержащее рассматриваемое возмущение. В таком случае осуществляется предварительное преобразование подобия исследуемого оператора в оператор, возмущение которого принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathcal{M}$ из некоторой допустимой тройки $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$. Такое преобразование возможно в условиях следующего предположения.

Предположение 1 ([29, 80])**.** *Для оператора $C \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ существуют операторы ΓC, JC, удовлетворяющие условиям:*

1) $\Gamma C \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ и $\|\Gamma C\| < 1$;

2) $(\Gamma C)D(A) \subset D(A)$;

3) $C\Gamma C$, $(\Gamma C)JC \in \mathcal{M}$;

4) $A(\Gamma C)x - (\Gamma C)Ax = Cx - (JC)x$, $x \in D(A)$;

5) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|C(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Теорема 16 ([29, 80])**.** *При выполнении условий предположения 1 оператор $A - C$ подобен оператору $A - JC - C_0$, где $C_0 = (I + \Gamma C)^{-1}(C\Gamma C - (\Gamma C)JC)$, причем имеет место равенство*

$$(A - C)(I + \Gamma C) = (I + \Gamma C)(A - JC - C_0). \tag{45}$$

5. Спектральный анализ абстрактных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$

Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное комплексное гильбертово пространство. В данном параграфе метод подобных операторов применяется к абстрактным линейным операторам, действующим в $\mathcal{H}$.

Определение 18 ([81]). *Линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется нормальным, если $D(A) = D(A^*)$ и $\|A^*x\| = \|Ax\|$ для $x \in D(A)$, где через A^* обозначен сопряженный к A оператор.*

В качестве невозмущенного оператора будет выступать линейный замкнутый нормальный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Спектр $\sigma(A)$ оператора A представим в виде $\sigma(A) = \cup_{j\in\mathbb{Z}}\{\lambda_j\}$, где λ_j — простые изолированные собственные значения, $\lambda_j = ibj + c$, $j \in \mathbb{Z}$, b, $c \in \mathbb{R}$, — некоторые постоянные величины. Соответствующие собственные векторы e_j, $j \in \mathbb{Z}$, образуют в $\mathcal{H}$ ортонормированный базис и удобно все операторы из $\operatorname{End}\mathcal{H}$ считать заданными своими матрицами в этом базисе. Спектральные проекторы P_j невозмущенного оператора A определяются формулой $P_jx = (x, e_j)e_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Оператор-возмущение B принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Приводимые в этом параграфе результаты существенным образом используются в спектральном анализе оператора L_1 и, следовательно, операторов L_2, L_3 следующим образом. В § 6 осуществляется предварительное преобразование подобия операторов L_i, $i = 1, 2, 3$, в оператор $L_0 - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тем самым изучение спектральных свойств операторов L_i, $i = 1, 2, 3$, сводится к изучению спектральных свойств оператора $L_0 - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, класс изучаемых в этом параграфе операторов содержит преобразованный оператор $L_0 - \widetilde{B}$.

Отличительной особенностью невозмущенного оператора A является то, что его собственные значения λ_n “не разбегаются” при $n \to \infty$. Другими словами, $\operatorname{dist}\{\lambda_n, \sigma(A)\backslash\{\lambda_n\}\} = |b|$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Это затрудняет применение стандартной схемы метода подобных операторов и приводит к необходимости построения специального пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$ из гильбертова пространства $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

5.1. Построение первой допустимой тройки $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J_k, \Gamma_k)$.

В этом параграфе в качестве пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$ из определения 17 выступает идеал операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{H}$.

В работе рассматриваются матрицы операторов из $\operatorname{End}\mathcal{H}$ двух видов: операторные и числовые. Каждому оператору $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ ставится в соответствие его операторная матрица $X \sim (X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, где $X_{ij} = P_iXP_j$, i, $j \in \mathbb{Z}$, и числовая матрица $X \sim (x_{ij})$, i, $j \in \mathbb{Z}$, $x_{ij} = (Xe_j, e_i)$, где ортонормированный базис $\{e_j, j \in \mathbb{Z}\}$ и система спектральных проекторов $\{P_j, j \in \mathbb{Z}\}$ введены выше, в начале § 5. Отметим, что в рассматриваемом случае $X_{ij}x = (P_iXP_j)x = (Xe_j, e_i)(x, e_j)e_i = x_{ij}(x, e_j)e_i$, i, $j \in \mathbb{Z}$.

В статье используются матрицы Гильберта-Шмидта с нормой $\|(a_{ij})\|_2 = \Big(\sum\limits_{i,j\in\mathbb{Z}} |a_{ij}|^2\Big)^{1/2}$ для матрицы (a_{ij}), i, $j \in \mathbb{Z}$. Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ его норма совпадает с нормой матрицы Гильберта-Шмидта $(x_{lk}) = (Xg_k, g_l)$, $l, k \in \mathbb{Z}$, относительно любого ортонормированного базиса $\{g_k, k \in \mathbb{Z}\}$ в $\mathcal{H}$.

Отметим используемые далее следующие свойства идеала $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ (см. [45]):
1) оператор $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ является оператором Гильберта-Шмидта тогда и только тогда, когда его матрица $x_{kn} = (Xg_n, g_k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$, является матрицей Гильберта-Шмидта для некоторого ортонормированного базиса $\{g_k, k \in \mathbb{Z}\}$ и $\|X\|_2 = \|(x_{kn})\|_2$.
2) произведение XY операторов $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является ядерным оператором и $\|XY\|_1 \leqslant \|X\|_2\|Y\|_2$.
3) пусть $\{Q_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — система ортопроекторов из $\operatorname{End}\mathcal{H}$, образующая разложение единицы, т. е. обладающая свойствами: а) $Q_nQ_m = Q_mQ_n = 0$ для $n \neq m$; б) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} Qx = x$ для любого $x \in \mathcal{H}$. Тогда $\|X\|_2^2 = \sum\limits_{n,m\in\mathbb{Z}} \|Q_nXQ_m\|_2^2$.

Без ограничения общности можно считать невозмущенный оператор A обратимым оператором. Если же изначально A необратим, то вместо него для построения допустимой тройки рассмотрим оператор $A - \mu I$, где $\mu \in \rho(A)$. Допустимая тройка для операторов A и $A - \mu I$ будет одинаковой.

Очевидно, что $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и

$$\|Xx\| = \|XA^{-1}Ax\| \leqslant \|XA^{-1}\|_\infty\|Ax\|, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad x \in D(A).$$

Таким образом, $\|X\|_A \leqslant \|XA^{-1}\|_\infty$.

Определим трансформатор $J \in \operatorname{End}\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ формулой

$$JX = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_nXP_n, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}). \tag{46}$$

Трансформатор J определен корректно, выписанный ряд сходится в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Рассмотрим уравнение (40) определения 17 и применим к нему слева проектор P_i, $i \in \mathbb{Z}$, и справа проектор P_j, $j \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что $P_i(X - JX)P_j = P_iXP_j$ при $i \neq j$, и нуль при $i = j$. Также отметим, что $AP_i = P_iA = \lambda_iP_i$, $i \in \mathbb{Z}$. Получим

$$\lambda_lY_{lj} - \lambda_jY_{lj} = X_{lj}, \quad l, j \in \mathbb{Z}, \quad l \neq j,$$

откуда $Y_{lj} = X_{lj}/(\lambda_l - \lambda_j) = X_{lj}/(ib(l - j))$, $l \neq j$.

Положим $(\Gamma X)_{ij} = Y_{ij}$, $i \neq j$, и $(\Gamma X)_{ii} = 0$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Соберем оператор ΓX из операторных блоков $(\Gamma X)_{ij}$ и покажем, что он принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Пусть

$$\Gamma X = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} (\Gamma X)_{ij}. \tag{47}$$

Тогда

$$\|\Gamma X\|_2^2 = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \|(\Gamma X)_{ij}\|_2^2 = \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i\neq j}} \frac{\|X_{ij}\|_2^2}{|\lambda_i - \lambda_j|^2} \leqslant \frac{1}{b^2} \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i\neq j}} \|X_{ij}\|_2^2 = \frac{1}{b^2}\|X\|_2^2. \tag{48}$$

Кроме того,

$$\Gamma X = \frac{1}{ib} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{n} \sum_{p-j=n} X_{pj}.$$

Наряду с трансформаторами J, $\Gamma \in \operatorname{End}\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ введем в рассмотрение семейства трансформаторов J_k, $\Gamma_k \in \operatorname{End}\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $k \geqslant 0$, формулами

$$J_kX = P_{(k)}XP_{(k)} + \sum_{|i|>k} P_iXP_i, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \tag{49}$$

$$\Gamma_kX = \Gamma X - P_{(k)}(\Gamma X)P_{(k)}, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}). \tag{50}$$

При этом $J_0X = JX$, $\Gamma_0 X = \Gamma X$. Трансформаторы $J_k, \Gamma_k \in \operatorname{End}\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определены корректно, все выписанные ряды сходятся в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Отметим, что относительно рассматриваемой системы проекторов элементы $(J_kX)_{ij} = P_i(J_kX)P_j$ и $(\Gamma_kX)_{ij} = P_i(\Gamma_kX)P_j$ операторных матриц операторов J_kX и Γ_kX задаются формулами

$$(J_kX)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i=j \quad \text{или} \quad \max\{|i|,|j|\} \leqslant k, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$(\Gamma_kX)_{ij} = \begin{cases} 0, & i=j \quad \text{или} \quad \max\{|i|,|j|\} \leqslant k \\ \frac{1}{ib}\frac{X_{ij}}{i-j}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание 2. *Очевидно, что операторы JX и ΓX отличаются от операторов J_kX и Γ_kX на оператор ранга не более $2k+1$.*

Теорема 17. *Тройка $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J_k, \Gamma_k)$ является допустимой тройкой для оператора A при любом $k \geqslant 0$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо проверить выполнение условий определения 17. Для простоты сделаем проверку при $k=0$ и учтем приведенное перед теоремой 17 замечание.

Выполнение свойства 1) проверено выше. Непрерывность трансформаторов J, $\Gamma \in \operatorname{End}\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует из их построения. Норма $\|J\|$ трансформатора J равна 1, что следует из оценок:

$$\|JX\|_2^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \|X_{ii}\|_2^2 \leqslant \|X\|_2^2.$$

Причем, если изначально оператор X такой, что $X = \sum_{i\in\mathbb{Z}} X_{ii}$, то $\|JX\|_2^2 = \|X\|_2^2$. Оператор J является проектором, так как

$$J(JX) = J\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} P_iXP_i\Big) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} P_m\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} P_iXP_i\Big)P_m = \sum_{i\in\mathbb{Z}} P_iXP_i = JX.$$

Перейдем к свойству 3). Осталось показать, что $(\Gamma_kX)D(A) \subset D(A)$. Рассмотрим последовательность проекторов $Q_n = \sum_{|i|\leqslant n} P_i$, где $n > k$ и $n \to \infty$. Пусть $x \in \mathcal{H}$, тогда $A^{-1}x \in D(A)$. Пусть $x_0 = \Gamma_kXA^{-1}x$. Покажем, что $x_0 \in D(A)$. Для этого рассмотрим семейство операторов $A(Q_n\Gamma_kX)A^{-1}$ и представим их на векторе $x \in \mathcal{H}$ в виде $A(Q_n\Gamma_kX)A^{-1}x = Q_n\Gamma_kXx + Q_n(X - J_kX)A^{-1}x$. Так как операторы Γ_kX и $X - J_kX$ ограничены и $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n\Gamma_kXx = \Gamma_kXx$, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(X-J_kX)A^{-1}x = (X-J_kX)A^{-1}x$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} A(Q_n\Gamma X)A^{-1}x = A\Gamma_kXA^{-1}x = y_0$, $y_0 \in \mathcal{H}$. Тогда в силу замкнутости оператора A имеем $x_0 = \Gamma_kXA^{-1}y \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$.

Проверим выполнение свойства 4). Из формулы (48) следует, что $\|\Gamma\| \leqslant 1/b$, т. е. $\gamma = 1/b$. Операторы $X(\Gamma Y)$ и $(\Gamma Y)X$ для X, $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ принадлежат идеалу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, как произведение двух операторов Гильберта-Шмидта. Очевидно, что $\|X\Gamma Y\|_2 \leqslant \|X\|_2\|\Gamma Y\|_2 \leqslant \|X\|_2\|Y\|_2/b$.

Для проверки условия 5) посчитаем операторную матрицу оператора $Z = (\Gamma X)(JY)$ и покажем, что $Z_{ii} = 0$. Имеют место соотношения

$$Z_{nj} = \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq i}} (\Gamma X)_{il}(JY)_{lj} = \frac{1}{ib}\frac{X_{nj}}{n-j}Y_{jj}, \quad n \neq j.$$

Поэтому $Z_{jj} = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$, т. е. $J((\Gamma X)(JY)) = 0$.

Пусть $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$. Оператор $X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеет операторную матрицу, состоящую из элементов $X_{ij}/(\lambda_j - \lambda_\varepsilon)$, поэтому

$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{j\in\mathbb{Z}} (\lambda_j - \lambda_\varepsilon)^{-1} \|X\|_2.$$

Последнюю величину можно сделать сколь угодно малой, взяв в качестве λ_ε число $\lambda_\varepsilon = p$, $p \in \mathbb{N}$, где p — достаточно большое натуральное число. Теорема доказана. □

Так как оператор ΓX принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то имеет место

Лемма 2. $\lim\limits_{k\to\infty} \|\Gamma_k X\|_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \|\Gamma X - P_{(k)}(\Gamma X)P_{(k)}\|_2 = 0.$

5.2. **Построение допустимой тройки** $(\mathcal{M}, J_k, \Gamma_k)$**.** В п. 5.1 была построена допустимая тройка с пространством допустимых возмущений $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Эта тройка не подходит для применения теоремы 14, так как величина γ равна $1/b$ и условие (43) не может быть выполнено за счет малости величины γ. Поэтому в качестве пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$ рассмотрим “более узкое” множество операторов из идеала операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Впервые представленное ниже пространство допустимых возмущений вводилось в [28]. Результаты работ [21] – [26], [50], также получены с использованием этого пространства. Для его описания для любого ненулевого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ введем в рассмотрение двустороннюю последовательность вещественных чисел вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-\frac{1}{2}} \max\left\{ \Bigg(\sum_{\substack{|k|\geqslant n\\ k\in\mathbb{Z}}} \|P_k X\|_2^2 \Bigg)^{\frac14}, \Bigg(\sum_{\substack{|k|\geqslant n\\ k\in\mathbb{Z}}} \|X P_k\|_2^2 \Bigg)^{\frac14} \right\},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{51}$$

Последовательность $(\alpha_n(X))$, $n \in \mathbb{Z}$, обладает следующими свойствами:

1) $\alpha_n(X) = \alpha_{-n}(X)$, $n \in \mathbb{Z}$;
2) $\lim\limits_{|n|\to\infty} \alpha_n(X) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$;
3) $\alpha_n(X) \leqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$;
4) $\alpha_n(X) \geqslant \alpha_{n+1}(X)$, $n \geqslant 0$;
5) $\alpha_n(X) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, если $P_{(m)} X P_{(m)} \neq X$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$;
6) конечна величина

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|XP_n\|_2^2 + \|P_n X\|_2^2}{(\alpha_n(X))^2}.$$

Свойства 1) – 5) последовательности $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ очевидны и следуют из ее определения. Свойство 6) вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть ряд* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$*, где* $a_n > 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$*, сходится. Тогда ряд* $\sum_{m\in\mathbb{N}} a_m s_m^{-1/2}$*, где* $s_m = \sum_{i=1}^m a_i$ *— частичная сумма первоначального ряда, тоже сходится.*

Доказательство. Пусть $s_0 = 0$ и $s_m = \sum_{i=1}^m a_i$, $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{a_m}{s_m^{1/2}} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{s_m - s_{m-1}}{s_m^{1/2}}$$

и представим его в виде

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{(s_m^{1/2} - s_{m-1}^{1/2})(s_m^{1/2} + s_{m-1}^{1/2})}{s_m^{1/2}} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \Big(s_m^{1/2} - s_{m-1}^{1/2}\Big)\Big(1 + \Big(\frac{s_{m-1}}{s_m}\Big)^{1/2}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{m\in\mathbb{N}} (s_m^{1/2} - s_{m-1}^{1/2}) = 2s^{1/2},$$

где $s = \sum_{m\in\mathbb{N}} a_m$. Следовательно, рассматриваемый ряд сходится. Лемма доказана. □

Без ограничения общности можно в дальнейшем считать, что $P_{(n)}BP_{(n)} \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. В противном случае оператор $A-B$ есть ортогональная сумма оператора конечного ранга $(A-B)|\mathcal{H}_{(n)}$ для некоторого $n \geqslant 0$ и оператора $A|\mathcal{H}^{(n)}$, где $\mathcal{H}^{(n)} = I - \mathcal{H}_{(n)}$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим самосопряженный компактный оператор F_X, определяемый формулой

$$F_X = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n(X) P_n.$$

Отметим, что $F_X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ есть функция от нормального оператора A вида $F_X = f_X(A)$, где $f_X : \sigma(L_0) \to \mathbb{R}_+$, $f_X(\lambda_n) = \alpha_n(X)$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\|F_X\|_\infty = \max\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n(X)| = 1$.

Для упрощения дальнейшей записи оператор F_B обозначим через F.

Введем множество операторов $\mathcal{M}$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, допускающих представление вида

$$X = X_l F, \quad X = F X_r,$$

где X_l, $X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Положим $\|X\|_{\mathcal{M}} = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$. Очевидно, что $\|X\|_2 \leqslant \|X\|_{\mathcal{M}}$, $X \in \mathcal{M}$.

Свойство $\operatorname{Ker} F = 0$ (см. свойство 5 последовательности $\alpha_n(X)$) позволяет заключить, что введенное множество операторов $\mathcal{M}$ является банаховым пространством.

Очевидно, что для любого оператора X из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеет место представление

$$X = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n(X)} X P_n\Big) F_X = F_X \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n(X)} P_n X\Big).$$

Поэтому возмущение B принадлежит пространству $\mathcal{M}$.

Поскольку $\mathcal{M} \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то трансформаторы J_k и Γ_k, $k \geqslant 0$, задаваемые формулами (46), (47), (49), (50) определены и для операторов из $\mathcal{M}$. Более того, подпространство $\mathcal{M}$ инвариантно относительно J_k и Γ_k, $k \geqslant 0$, и

$$J_k(X_l F) = (J_k X_l)F, \quad J_k(F X_r) = F(J_k X_r),$$

$$\Gamma_k(X_l F) = (\Gamma_k X_l)F, \quad \Gamma_k(F X_r) = F(\Gamma_k X_r),$$

где X_r, $X_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Для оценки норм $\|\Gamma_k(XF)\|_2$ и $\|\Gamma_k(FX)\|_2$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, рассмотрим две последовательности (α'_n), $n \in \mathbb{N}$, и $(\widetilde{\alpha}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, определенные формулами

$$\alpha'_n = \max_{\substack{|i|\geqslant n\\ |j|<n}} \frac{|\alpha_i - \alpha_j|}{|i-j|}, \quad \widetilde{\alpha}_n = \frac{1}{b}(\alpha_n + \alpha'_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последовательности (α'_n) и $(\widetilde{\alpha}_n)$ принадлежат пространству $c_0(N)$ сходящихся к нулю последовательностей.

Следующая лемма является аналогом леммы 3 из [28].

Лемма 4. *Для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеют место оценки:*

$$\max\{\|\Gamma_k(XF)\|_2, \|\Gamma_k(FX)\|_2\} \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}\|X\|_2.$$

Доказательство. Пусть $P^{(k)} = I - P_{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, дополнительный к $P_{(k)}$ проектор. Тогда $\|FP^{(k)}\|_\infty = \|\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n P_n P^{(k)}\|_\infty \leqslant \alpha_{k+1}$. Из определения трансформатора Γ_k следует оценка

$$\|\Gamma_k(XF)\|_2 = \|\Gamma_k(XFP^{(k)}) + \Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)})\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{b}\alpha_{k+1}\|X\|_2 + \|\Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)})\|_2.$$

Представим оператор $\Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)})$ в виде

$$\Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)}) = \Gamma_k(P^{(k)}FXP_{(k)}) + \Gamma_k(P^{(k)}(XF - FX)P_{(k)}).$$

При этом последний оператор имеет операторную матрицу $(P_i Z_{(k)} P_j)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$, где $Z_{(k)} = \Gamma_k(P^{(k)}(XF - FX)P_{(k)})$, составленную из элементов вида

$$P_i Z_{(k)} P_j = \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} P_i X P_j = \frac{1}{b}\frac{\alpha_i - \alpha_j}{i - j} P_i X P_j,$$

где $|i| \geqslant k+1$, $|j| \leqslant k$, и $P_i Z_{(k)} P_j = 0$ в остальных случаях. Таким образом,

$$\|\Gamma_k(P^{(k)}XFP_{(k)})\|_2 \leqslant \frac{1}{b}\alpha_{k+1}\|X\|_2 + \frac{1}{b}\max_{\substack{|i|\geqslant k+1\\|j|\leqslant k}} \frac{|\alpha_i - \alpha_j|}{|i-j|}\|X\|_2 =$$
$$= \frac{1}{b}(\alpha_{k+1} + \alpha'_{k+1})\|X\|_2 = \widetilde{\alpha}_{k+1}\|X\|_2.$$

Аналогичным образом и той же величиной оценивается норма $\Gamma_k(FX)$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Лемма 4 доказана. $\square$

Теорема 18. *Тройка $(\mathcal{M}, J_k, \Gamma_k)$ является допустимой тройкой для невозмущенного оператора A при любом $k \geqslant 0$ и постоянная $\gamma = \gamma_k$ из определения 17 допускает оценку*

$$\gamma_k \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Выше было установлено, что введенное пространство допустимых возмущений $\mathcal{M}$ является банаховым пространством. Из вложения $\mathcal{M} \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует, что $\mathcal{M}$ вложено в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, так как любой ограниченный оператор является подчиненным невозмущенному оператору A. Поэтому свойство 1) определения 17 выполнено.

Выполнение свойств 2) и 5) следует из построения трансформаторов J_k, Γ_k, $k \geqslant 0$.

Свойства 3) и 6) проверяются также как были установлены соответствующие свойства в теореме 17.

Перейдем к доказательству свойства 4). Пусть $X = X_l F \in \mathcal{M}$, $Y = Y_l F \in \mathcal{M}$, где X_l, $Y_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда $X\Gamma_k Y = Z_l F$, где $Z_l = X_l \Gamma_k(FY_l)$. Из леммы 4 следует, что

$$\|Z_l\|_2 \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}\|X_l\|_2\|Y_l\|_2 \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}\|X\|_{\mathcal{M}}\|Y\|_{\mathcal{M}}.$$

Пусть теперь $X = FX_r$, $Y = FY_r$, X_r, $Y_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда $X\Gamma_k Y = FZ_r$, где $Z_r = X_r\Gamma_k(FY_r)$, и опять же из леммы 4 следует, что

$$\|Z_r\|_2 \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}\|X_r\|_2\|Y_r\|_2 \leqslant \widetilde{\alpha}_{k+1}\|X\|_{\mathcal{M}}\|Y\|_{\mathcal{M}}.$$

Аналогичная оценка имеет место и для нормы оператора $(\Gamma_k X)Y$. Теорема 18 доказана. □

Теорема 19. *Пусть целое число $k \geqslant 0$ такое, что выполнено условие*

$$4\widetilde{\alpha}_{k+1}\|B\|_{\mathcal{M}} < 1.$$

Тогда оператор $A-B$ подобен оператору $A-J_kX_* = A-X_0$, где оператор $X_* \in \mathcal{M}$ есть решение нелинейного операторного уравнения (44) из теоремы 14 с трансформаторами $J = J_k$ и $\Gamma = \Gamma_k$, определенными формулами (46), (47), (49), (50). Более того, оператор X_0 есть прямая ортогональная сумма

$$X_0 = X_{0(k)} \oplus \bigoplus_{|i|>k} X_{0i}$$

относительно представления пространства $\mathcal{H}$ вида

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(k)} \oplus \bigoplus_{|i|>k} \mathcal{H}_i, \tag{52}$$

где $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im} P_{(k)}$, $\mathcal{H}_i = \operatorname{Im} P_i$, $|i| > k$, и проекторы $P_{(k)}$, P_i, $|i| > k$, есть спектральные проекторы невозмущенного оператора A. Оператором преобразования оператора $A - B$, $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, в $A - X_0$ является оператор $I + \Gamma_k X$, где $X \in \mathcal{M} \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\Gamma_k X \in \mathcal{M} \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Утверждение теоремы 19 следует из теоремы 17, 18 и свойства $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{\alpha}_k = 0$, что гарантирует выполнение условия (43) теоремы 14.

Обозначим оператор $A - JX_*$ через A_0. Для операторов A_0 имеет место следующая

Лемма 5. *Для того чтобы оператор A_0 был генератором некоторой сильно непрерывной группы $T_0 : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sup_{|t|\leqslant \mathbf{t}} \sup_{|n|>k} \left\{ \left\|e^{tA_{0,n}}\right\|_{\operatorname{End}\mathcal{H}_n}, \left\|e^{tA_{0,(k)}}\right\|_{\operatorname{End}\mathcal{H}_{(k)}} \right\} = C(\mathbf{t}) < \infty, \tag{53}$$

где $\mathbf{t} \geqslant 1$. Если условие (53) выполнено, то оператор $T_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, представим в виде ортогональной прямой суммы

$$T_0(t) = \left(\bigoplus_{|n|>k} e^{tA_{0,n}} \right) \oplus e^{tA_{0,(k)}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{54}$$

относительно разложения пространства $\mathcal{H}$ вида (52).

Доказательство. Если выполнено условие (52), то формула (54) определяет ограниченный оператор, что следует из равенства Парсеваля и оценки

$$\|T_0(t)x\|^2 = \sum_{|n|>k} \|e^{tA_{0,n}}P_nx\|^2 + \|e^{tA_{0,(k)}}P_{(k)}x\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant C^2(\mathbf{t}) \sum_{|n|>k} \|P_nx\|^2 + \|P_{(k)}x\|^2 = C^2(\mathbf{t})\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}, \quad |t| \leqslant \mathbf{t}.$$

Непосредственно проверяется, что операторы $T_0(t) \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$, образуют группу операторов. Ввиду того, что она сильно непрерывна на плотном подпространстве векторов, представимых в виде $x = \sum\limits_{|n|\leqslant m} P_n x$, $m \in \mathbb{Z}_+$, то она сильно непрерывна на всем пространстве $\mathcal{H}$.

Обратное утверждение очевидно. Лемма доказана. □

5.3. **Оценки собственных значений и собственных векторов оператора $A - B$.**

Определение 19 ([47]). *Пусть $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Базис $\{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$ квадратично близкий к e_n, т. е. $\|e_n - f_n\|_2 \leqslant \zeta_n$, где последовательность $\{\zeta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ принадлежит ℓ_2, называется* базисом Бари. *Если $f_n = Ue_n$, где обратимый оператор U принадлежит $\operatorname{End}\mathcal{H}$, то базис $\{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$ называется* базисом Рисса.

Из леммы 1 и теоремы 19 непосредственно вытекает

Лемма 6. *В условиях теоремы 19, имеют место следующие утверждения. Существует такое число $k_0 \geqslant k$, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, что спектр $\sigma(A - B)$ оператора $A - B$ представим в виде объединения взаимно непересекающихся множеств $\sigma_{(k_0)}$ и σ_n, $|n| > k_0$:*

$$\sigma(A-B) = \sigma(A_{0,(k_0)}) \cup \Big(\bigcup_{|n|>k_0} \sigma(A_n)\Big) = \sigma_{(k_0)} \cup \Big(\bigcup_{n>k_0} \widetilde{\sigma}_n\Big), \tag{55}$$

где множество $\sigma_{(k_0)}$ содержит не более $2k_0 + 1$ собственных значений, множества $\widetilde{\sigma}_n = \{\widetilde{\lambda}_n\}$ одноточечны. Собственные векторы $\widetilde{e}_n$, $|n| > k$, оператора $A - B$ связаны с собственными векторами оператора A равенством $\widetilde{e}_n = (I + \Gamma X_*)e_n$, $|n| > k$, при этом $\|\widetilde{e}_n - e_n\| \leqslant \beta_n$, $|n| > k$, где последовательность $\{\beta_n\}$ суммируема с квадратом, и они образуют базис Бари (и базис Рисса) в пространстве $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{(k)}$.

Перейдем к более точной оценке собственных значений и собственных векторов оператора $A - B$ (или $A - J_k X_*$). Отметим, что собственными значениями оператора $(A - J_k X_*)|\mathcal{H}^{(k)}$, где $\mathcal{H}^{(k)} = \operatorname{Ran}(I - P_{(k)})$, являются числа $\widetilde{\lambda}_j = ibj + c + x_{jj}$, $|j| > k$, где x_{jj} — элементы числовой матрицы оператора X_*, который является решением нелинейного оператора уравнения (44), в базисе из собственных векторов оператора A. Но нам известен не сам оператор X_*, а последовательные приближения к нему по методу простых итераций, причем нулевым приближением является нулевой оператор, первым приближением $X_{(1)}$ — оператор B, вторым — оператор $X_{(2)} = B\Gamma_k B - (\Gamma_k B)(J_k B) - (\Gamma_k B)J_k(B\Gamma_k B) + B$. При этом $J_k X_{(1)} = J_k B$, $J_k X_{(2)} = J_{(k)}(B\Gamma_k B) + J_k B$. Приближения более высокого порядка не используются ввиду их громоздкости.

Отметим также, что из уравнения (44) следует

$$X - X_{(1)} = X - B = B\Gamma_k X - (\Gamma_k B)J_k X - (\Gamma_k B)J_k(B\Gamma_k X) \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}),$$

и $J_k(X - B) = J_k(B\Gamma_k X)$, $J_k(X - X_{(2)}) = J_k(B\Gamma_k(X - B))$. Рассматривая вместо x_{jj}, $|j| > k$, первое и второе приближение к нему, получаем асимптотические оценки

$$\widetilde{\lambda}_j = ibj + c - (Be_j, e_j) + \zeta'_j, \quad |j| > k, \tag{56}$$

где последовательность $\{\zeta'_j, |j| > k\}$ принадлежит ℓ_1.

Перейдем к собственным векторам. Представим $\widetilde{e}_j$ в виде $\widetilde{e}_j = (I+\Gamma_k X_*)e_j = e_j + \Gamma_k B e_j + \Gamma_k(X-B)e_j$, $|j|>k$, откуда

$$\|\widetilde{e}_j - e_j\|_2 = \|\Gamma_k B e_j\|_2 = \varepsilon_j, \quad |j|>k,$$
$$\|\widetilde{e}_j - e_j - \Gamma_k B e_j\|_2 = \|\Gamma_k(X-B)e_j\|_2 = \varepsilon'_j, \quad |j|>k,$$

где последовательность $\{\varepsilon_j, |j|>k\}$ принадлежит ℓ_2, а последовательность $\{\varepsilon'_j, |j|>k\}$ принадлежит ℓ_1. При этом $\Gamma_k B e_j = \frac{1}{ib}\sum\limits_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{l-j}e_l$. Следовательно,

$$\left\|\widetilde{e}_j - e_j - \frac{1}{ib}\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{l-j}e_l\right\|_2 = \varepsilon_j, \quad |j|>k. \tag{57}$$

Таким образом, доказана

Теорема 20. *Для собственных значений и собственных векторов оператора $A-B$ имеют место асимптотические формулы (56) – (57).*

В заключение этого пункта приведем еще одну теорему, вытекающую из леммы 1 и теорем 14, 19, 20.

Теорема 21. *Оператор $A-B$ является генератором сильно непрерывной группы операторов $T:\mathbb{R}\to \operatorname{End}\mathcal{H}$. Группа $T:\mathbb{R}\to\operatorname{End}\mathcal{H}$ подобна группе $\widetilde{T}:\mathbb{R}\to\operatorname{End}\mathcal{H}$, которая допускает ортогональное разложение вида*

$$\widetilde{T}(t) = \left(\bigoplus_{|j|>k} e^{t\widetilde{\lambda}_j I_j}\right)\oplus e^{tA_{0(k)}}, \quad t\in\mathbb{R},$$

относительно разложения пространства $\mathcal{H}$ вида (52) для некоторого целого $k\geqslant 0$, и числа $\widetilde{\lambda}_j$, $|j|>k$, определены формулой (56). При этом $T(t) = (I+\Gamma_k X_*)\widetilde{T}(t)(I+\Gamma_k X_*)^{-1}$, $t\in\mathbb{R}$, и оператор $A_{0(k)} = (A-P_{(k)}X_*P_{(k)})|\mathcal{H}_{(k)}$ имеет ранг не более $2k+1$.

Таким образом, группа операторов $T(t)$, $t\in\mathbb{R}$, допускает $(I+\Gamma_k X_*)$ - ортогональное разложение относительно $(I+\Gamma_k X_*)$-ортогонального разложения пространства $\mathcal{H}$.

5.4. **Оценки спектральных проекторов.** В этом пункте считается выполненным условия теоремы 19. Пусть $\widetilde{P}_{(k)}$ и $\widetilde{P}_i$, $|i|>k$, — спектральные проекторы Рисса, построенные по спектральным множествам $\widetilde{\sigma}_{(k)}$, $\widetilde{\sigma}_i$, $|i|>k$, из леммы 6 для оператора $A-B$, соответственно. Для любого подмножества $\Omega\subset\mathbb{Z}\setminus\{-k,\dots,-1,\ 0,1,\dots,k\}$ (не обязательно конечного) через $P(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum\limits_{j\in\Omega}P_j$, а через $\widetilde{P}(\Omega)$ — спектральный проектор $\sum\limits_{j\in\Omega}\widetilde{P}_j$. Отметим, что мы приходим к двум разложениям единицы

$$I = P_{(k)} + \sum_{|j|>k}P_j, \quad I = \widetilde{P}_{(k)} + \sum_{|j|>k}\widetilde{P}_j.$$

Для любого $X\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определим величину

$$\alpha(\Omega,X) = \max_{n\in\Omega}\alpha_n(X), \quad \Omega\subset\mathbb{Z},$$

где последовательность $\alpha_n(X)$, $n\in\mathbb{Z}$, определена формулой (51).

Лемма 7. *Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \{-k, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k\}$ имеет место оценка*

$$\max\{\|P(\Omega)X\|_2, \|XP(\Omega)\|_2\} \leqslant C(X)\alpha(\Omega, X),$$

где величина $C(X) > 0$ зависит от оператора X и не зависит от выбора Ω.

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{M}$, т. е. $X = X_l F_X = F_X X_r$, X_r, $X_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Оценим норму

$$\|P(\Omega)X\|_2 = \|P(\Omega)F_X X_r\|_2 = \left\|\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n(X)P_n\Big)X_r\right\| \leqslant \alpha(\Omega, X)\|X\|_2.$$

Аналогичным образом получается оценка для оператора $XP(\Omega)$. Таким образом, утверждение леммы имеет место с $C(X) = \|X\|_2$. □

Также из определения последовательности α_n, $n \in \mathbb{Z}$, вытекают следующие свойства (см. [50, Lemma 8.3]):

1) Если $X = \sum\limits_{l\geqslant 1} X_l$, где $X_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то этот ряд сходится абсолютно и

$$\|X\|_2^{1/2}\alpha_n(X) \leqslant \sum_{l\geqslant 1} \|X_l\|_2^{1/2}\alpha_n(X_l).$$

2) Если $X = X_1, \ldots, X_l$, $X_j \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $1 \leqslant j \leqslant l$, то

$$\|X\|_2^{1/2}\alpha_n(X) \leqslant \min_{1\leqslant j\leqslant l} \alpha(\Omega, X_j) \prod_{j=1}^{l} \|X_j\|_2^{1/2}.$$

Лемма 8. *Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеет место оценка*

$$\max\{\|P(\Omega)\Gamma_k X\|_2, \|\Gamma_k XP(\Omega)\|_2\} \leqslant b^{-1}\alpha^2(\Omega, X)\|X\|_2$$

Доказательство. Оценим величины $\|P(\Omega)\Gamma_k X\|_2$, $\|\Gamma_k XP(\Omega)\|_2$. Имеют место соотношения:

$$\|P(\Omega)\Gamma_k X\|_2^2 = \sum_{\substack{i\in\Omega, j\in\mathbb{Z}\\ i\neq j}} \frac{\|P_i P(\Omega)XP_j\|_2^2}{|\lambda_i - \lambda_j|^2} \leqslant \Big(\frac{1}{b}\Big)^2 \sum_{i\in\Omega} \|P_i X\|_2^2 \leqslant b^{-2}\alpha^4(\Omega, X)\|X\|_2^2.$$

Таким образом, $\|P(\Omega)\Gamma_k X\|_2 \leqslant b^{-1}\alpha^2(\Omega, X)\|X\|_2$. Аналогичным образом и той же величиной оценивается величина $\|\Gamma_k XP(\Omega)\|_2$. Лемма доказана. □

Отметим, что из определения последовательности α и построения пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$ следуют равенства $\|FP(\Omega)\| = \|P(\Omega)F\| = \alpha(\Omega, B)$. Поэтому $\alpha(\Omega, X) \leqslant \|X\|_{\mathcal{M}}\alpha(\Omega, B)$.

Перейдем к оценке нормы $\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \{-k, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k\}$. Напомним, что оператор, осуществляющих преобразования подобия оператора $A - B$ в оператор $A - J_k X_*$ есть оператор $I + \Gamma_k X_*$. При этом

$$(I + \Gamma_k X_*)^{-1} = I + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l (\Gamma_k X_*)^l.$$

Поэтому

$$\|(I + \Gamma_k X_*)^{-1} - I\|_2 \leqslant \frac{\|\Gamma_k X_*\|_2}{1 - \|\Gamma_k X_*\|_2} = C(X_*).$$

Из леммы 1 следуют равенства:

$$\widetilde{P}(\Omega) = (I + \Gamma_k X_*)P(\Omega)(I + \Gamma_k X_*)^{-1},$$
$$\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = (\Gamma_k X_* P(\Omega) - P(\Omega)\Gamma_k X_*)(I + \Gamma_k X_*)^{-1}.$$

Тогда

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant 2b^{-2}\alpha^2(\Omega, X_*)\|X_*\|_2 C(X_*) \leqslant C_1\alpha^2(\Omega, B),$$

где константа C_1 не зависит от Ω.

Итак, доказана

Теорема 22. *Для спектральных проекторов $P(\Omega)$ оператора $A - B$ и $P(\Omega)$ оператора A, где $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \{-k, \dots, k\}$ имеет место оценка*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant C\alpha^2(\Omega, B).$$

Если $\Omega = \{n \in \mathbb{Z}, |n| > N\}$, где N — достаточно большое число, то имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \widetilde{P}_{(k)} + \sum_{|j|>k}^{n} \widetilde{P}_j - P_{(k)} - \sum_{|j|>k}^{n} P_j \right\|_2 = 0.$$

Определение 20 ([83]). *Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный оператор, спектр которого представим в виде объединения взаимно непересекающихся компактных множеств σ_k, $k \in \mathbb{J}$, т. е.*

$$\sigma(A) = \bigcup_{k\in\mathbb{J}} \sigma_k, \quad \mathbb{J} = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}. \tag{58}$$

Пусть P_k — проектор Рисса, построенный по множеству σ_k, $k \in \mathbb{J}$. Оператор A называется спектральным относительно разложения *(58) (или* обобщенно спектральным*), если ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{J}} P_k x$ безусловно сходится для любого вектора $x \in \mathcal{H}$.*

Если $\sigma_k = \{\lambda_k\}$, $k \in \mathbb{J}$, — одноточечные множества и проекторы P_k, $k \in \mathbb{J}$, обладают свойством $AP_k = \lambda_k P_k$ для всех $k \in \mathbb{J}$, исключая конечное число, то спектральный относительно разложения (58) оператор A является спектральным (по Данфорду; см. [83]) оператором, причем A — спектральный оператор скалярного типа, если $AP_k = \lambda_k P_k$, $k \in \mathbb{J}$.

Теорема 23. *Оператор $A - B$ является спектральным оператором.*

6. Преобразование подобия операторов L_2 и L_3

В этом параграфе рассматривается преобразование подобия, не относящееся к методу подобных операторов, которое позволяет свести изучение операторов L_2 и L_3 к изучению более простого оператора L_1.

Всюду далее предполагается, что $\mathcal{H} = L_2[0, \omega]$. Введем в рассмотрение оператор инволюции $\mathfrak{J} \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, определяемый формулой $(\mathfrak{J}y)(s) = y(\omega - s)$. В стандартном базисе e_n, $n \in \mathbb{Z}$, $e_n(t) = e^{i2\pi nt/\omega}$, матрица оператора $\mathfrak{J}$ состоит из элементов

$$\mathfrak{J}_{nm} = \begin{cases} 1, & n = -m, \\ 0, & n \neq -m. \end{cases}$$

Отметим важные свойства оператора инволюции: 1) $\mathfrak{J}^2 = I$; 2) $\mathfrak{J}L_0 = -L_0\mathfrak{J}$. С помощью оператора $\mathfrak{J}$ операторы (5) – (7) перепишутся, соответственно, в виде

$$L_1 = L_0 - V_1\mathfrak{J} - a_1 I,$$
$$L_2 = L_0 - Q_1\mathfrak{J} - Q_0,$$
$$L_3 = i\mathfrak{J}L_0 - G_1\mathfrak{J} - G_0,$$

где $V_1 y = v_1 y$, $Q_i y = q_i y$, $G_i y = g_i y$, $i = 0, 1$, $y \in L_2[0,\omega]$.

Теорема 24. *Операторы L_2 и L_3 подобны операторам вида $L_0 - V_2\mathfrak{J} - a_2 I$ и $L_0 - V_3\mathfrak{J} - a_3 I$, где числа $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 2, 3$, и функции $v_i \in L_2[0,\omega]$, $i = 2, 3$, определяются формулами (14) – (19). Преобразование подобия оператора L_2 в оператор L_1 осуществляет оператор W_2 из формулы (25), а оператора L_3 в оператор L_1 — оператор W_2W_3, где W_3 определен формулой (26).*

Заметим, что с использованием оператора инволюции $\mathfrak{J}$ оператор W_3 можно задать формулой $W_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + i\mathfrak{J})$.

Доказательство. Рассмотрим оператор L_2 и покажем, что с помощью обратимого ограниченного оператора W_2 из формулы (25) оператор L_2 переводится в оператор L_1 с константой $a_2 \in \mathbb{C}$ и функцией $v_2 \in L_2[0,\omega]$, определяемой равенствами (14) и (15). Очевидно, что $(W_2^{-1}y)(s) = \exp\big(-\int_0^s (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\big)y(s)$.

Действительно,

$$(L_2W_2x)(s) = L_2\Big(\exp\big(\int_0^s (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\big)x(s)\Big) =$$
$$= (q_0(s) - a_2)\exp\big(\int_0^s (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\big)x(s) + \exp\big(\int_0^s (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\big)\frac{dx}{ds} -$$
$$- q_1(s)\exp\big(\int_0^{\omega - s} (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\big)x(\omega - s) -$$
$$- q_0(s)\exp\big(\int_0^s (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\big)x(s) = \exp\big(\int_0^s (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\big)\frac{dx}{ds} -$$
$$- q_1(s)\exp\big(\int_0^{\omega - s} (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\big)x(\omega - s) - a_2\exp\big(\int_0^s (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\big)x(s),$$

и

$$(W_2^{-1}L_2W_2x)(s) = \frac{dx}{ds} -$$
$$- q_1(s)\exp\big(-\int_0^s (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\big)\exp\big(\int_0^{\omega - s} (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\big)x(\omega - s) - a_2 x(s) =$$
$$= \frac{dx}{ds} - q_1(s)\exp\big(\int_s^{\omega - s} (q_0(\tau) - a_2)\,d\tau\big)x(\omega - s) - a_2 x(s) =$$
$$= \frac{dx}{ds} - v_2(s)x(\omega - s) - a_2 x(s),$$

где v_2 определена формулой (15) и a_2 определено формулой (14).

Итак, оператор W_2 переводит оператор L_2 в оператор вида L_1. Покажем, что введенное преобразование подобия не изменяет граничных условий (или, что равносильно, $W_2D(L_2) = D(L_2)$). Пусть $z(s) = (Wy)(s)$, где $y(0) = y(\omega)$. Тогда

$$z(0) = \exp\big(\int_0^s (q_0(\tau) - a_2)\, d\tau\big) y(0) = y(0),$$
$$z(\omega) = \exp\big(\int_0^\omega (q_0(\tau) - a_2)\, d\tau\big) y(\omega) = \exp(a_2 - a_2) y(\omega) = y(\omega).$$

Таким образом, для оператора L_2 утверждение теоремы 24 установлено. □

Перейдем к оператору L_3. Для него будут построены два последовательных преобразования подобия: первое переводит оператор L_3 в оператор вида L_2 (со своими $\widetilde{q}_0$ и $\widetilde{q}_1$), а второе — полученный оператор L_2 в оператор вида L_1.

Вначале заметим, что обратный к оператору W_3 определяется формулой $W_3^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(I - i\mathfrak{J})$. Действительно,

$$W_3 W_3^{-1} = \frac{1}{2}(I + i\mathfrak{J})(I - i\mathfrak{J}) = \frac{1}{2}(I^2 + \mathfrak{J}^2) = I.$$

Аналогичным образом проверяется для оператора $W_3^{-1}W_3$. Из равенств

$$W_3^{-1}(i\mathfrak{J}L_0)W_3 = -\frac{i}{2}(I - i\mathfrak{J})(L_0\mathfrak{J})(I + i\mathfrak{J}) = -\frac{i}{2}(I - i\mathfrak{J})(L_0\mathfrak{J} + iL_0) =$$
$$= -\frac{i}{2}(L_0\mathfrak{J} + iL_0 + iL_0 + \mathfrak{J}L_0) = L_0$$

вытекает, что оператор W_3 переводит оператор $i\mathfrak{J}L_0$ в оператор L_0. Рассмотрим оператор $G_1\mathfrak{J} + G_0$. Имеют место формулы

$$((G_1\mathfrak{J} + G_0)W_3 y)(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_1\mathfrak{J} + G_0)(y(s) + iy(\omega - s)) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(g_1(s)y(\omega - s) + g_0(s)y(s) + ig_1(s)y(s) + ig_0(s)y(\omega - s));$$

$$(W_3^{-1}(G_1\mathfrak{J} + G_0)W_3 y)(s) = \frac{1}{2}(g_0(s) + g_0(\omega - s) + i(g_1(s) - g_1(\omega - s)))y(s) +$$
$$+ (g_1(s) + g_1(\omega - s) + i(g_0(s) - g_0(\omega - s)))y(\omega - s) = \widetilde{q}_0(s)y(s) + \widetilde{q}_1(s)y(\omega - s),$$

где функции $\widetilde{q}_0(s)$ и $\widetilde{q}_1(s)$ определены формулами (16) и (17). Покажем, что $W_3D(L_0) = D(L_0)$. Пусть $z(s) = (W_3y)(s)$, $y \in D(L_0)$. Тогда $z(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(iy(\omega) + y(0))$, $z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(iy(0) + y(\omega))$ и $z(0) = z(\omega)$.

Мы показали, что оператор преобразования W_3 переводит оператор L_3 в оператор L_2 (со своими функциями $\widetilde{q}_0(s)$ и $\widetilde{q}_1(s)$). Осталось применить к полученному оператору оператор преобразования W_2. Теорема 24 доказана.

Доказанная выше теорема 24 позволяет свести изучение операторов L_2 и L_3 к изучению оператора вида L_1. Поэтому в § 7, 8 будет применен метод подобных операторов, включая предварительное и основное преобразование подобия только к оператору L_1.

Пример. Для смешанной однородной задачи (3) в [16] рассматривалась так называемая эталонная задача со специальными потенциалами g_0 и g_1, а именно $g_1(s) = 0$, $s \in [0, \omega]$, и

$$g_0(s) = \frac{1}{2}(g(s) + g(\omega - s)) \tag{59}$$

для некоторой функции $g \in L_2[0, \omega]$. Условие (59) означает, что потенциал g_0 есть симметричная функция относительно середины отрезка $[0, \omega]$. Более того, функция g_0 есть четная функция, как функция из $L_{2,\omega}(\mathbb{R})$ и ее коэффициенты Фурье задаются формулой

$$\widehat{g}_0(n) = \frac{1}{2}(\widehat{g}(n) + \widehat{g}(-n)) = \widehat{g}_0(-n).$$

Обозначим через L_3^0 оператор, соответствующий эталонной задаче:

$$(L_3^0 y)(s) = i\frac{dy}{d\xi}\Big|_{\xi=\omega-s} - \frac{1}{2}(g(s) + g(\omega - s))y(s). \tag{60}$$

Отметим, что из (59) следует, что $\widehat{g}_0(0) = \widehat{g}(0)$, а из (16) и (17) вытекает $\widetilde{q}_1(s) = 0$, $\widetilde{q}_0(s) = g_0(s)$, $\widehat{\widetilde{q}}_0(0) = \widehat{g}(0)$. Следовательно, преобразованием подобия (26) оператор L_3^0 переводится в оператор

$$(L_2^0 y)(s) = \frac{dy}{ds} - \frac{1}{2}(g(s) + g(\omega - s))y(s) = \frac{dy}{ds} - g_0(s)y(s), \tag{61}$$

а оператор L_2^0, определенный формулой (61), в свою очередь, с помощью (25), подобен оператору

$$(L_1^0 y)(s) = y'(s) - \widehat{g}(0)y(s),$$

собственными значениями которого являются числа $\lambda_n^0 = i\frac{2\pi n}{\omega} - \widehat{g}(0)$, $n \in \mathbb{Z}$, а соответствующие собственные векторы совпадают с собственными векторами e_n, $n \in \mathbb{Z}$, оператора L_0, т. е. $e_n(s) = e^{i2\pi ns/\omega}$, $n \in \mathbb{Z}$, $s \in [0, \omega]$. Отметим также, что оператор L_1^0 есть прямая ортогональная сумма операторов ранга один:

$$L_1^0 = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Big(i\frac{2\pi n}{\omega} - \widehat{g}(0)\Big) I_n \tag{62}$$

относительно разложения пространства $\mathcal{H} = L_2[0, \omega]$ вида

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{Im} P_n, \tag{63}$$

где $P_n x = (x, e_n)e_n$.

Следовательно, имеет место

Теорема 25. *Эталонный оператор L_3^0, определенный формулой (60), подобен оператору L_1^0, определенному формулой (62), который является прямой ортогональной суммой операторов ранга (не более) 1 относительно разложения пространства $L_2[0, \omega]$ вида (63). Оператором преобразования оператора L_3^0 в оператор L_1^0 служит оператор W_3W_2, где*

$$(W_3W_2 y)(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\exp\Big(\int_0^s (g_0(\tau) - \widehat{g}(0))\,d\tau\Big)y(s) + \\ + i\exp\Big(\int_0^{\omega-s} (g_0(\tau) - \widehat{g}(0))\,d\tau\Big)y(\omega - s)\Big).$$

Оператор L_3^0 является W_3W_2-ортогональной суммой операторов ранга (не более) 1, т. е. $L_3^0 = \biguplus_{n\in\mathbb{Z}} W_3W_2L_1^0W_2^{-1}W_3^{-1}$ относительно W_3W_2-ортогонального разложения пространства $L_2[0, \omega]$ вида

$$L_2[0, \omega] = \biguplus_{n\in\mathbb{Z}} W_3W_2\mathcal{H}_n.$$

Собственными значениями эталонного оператора являются числа $\widetilde{\lambda}_n = i\frac{2\pi n}{\omega} - \widehat{g}(0)$, $n \in \mathbb{Z}$, *а соответствующие собственные векторы*

$$\widetilde{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\exp\Big(\int_0^s (g_0(\tau) - \widehat{g}(0))\, d\tau\Big)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}s} + i\exp\Big(\int_0^{\omega-s}(g_0(\tau)-\widehat{g}(0))\, d\tau\Big)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}s}\Big)$$

образуют базис Рисса в пространстве $L_2[0,\omega]$.

Перейдем к построению группы операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, для эталонного оператора. Сразу же отметим, что эта группа подобна группе вида

$$\widetilde{T}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{(i\frac{2\pi n}{\omega} - \widehat{g}(0))t} P_n.$$

Тогда

$$T(t) = W_3 W_2 \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{(i\frac{2\pi n}{\omega} - \widehat{g}(0))t} P_n\Big) W_2^{-1} W_3^{-1}.$$

Пусть $\varphi \in L_2[0,\omega]$. Тогда обозначим через ψ функцию

$$\psi(s) = (W_2^{-1}W_3^{-1}\varphi)(s) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\Big(-\int_0^s (g_0(\tau) - \widehat{g}(0))\, d\tau\Big)(\varphi(s) - i\varphi(\omega - s)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(n) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}s}.$$

Следовательно,

$$(T(t)\varphi)(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(n)(W_3 W_2 e^{i\frac{2\pi n}{\omega}(t+s) - \widehat{g}(0)t}) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(e^{\int_0^s g(\tau)\, d\tau} e^{i\frac{2\pi n}{\omega}(t+s) - \widehat{g}(0)(t+s)} +$$
$$+ ie^{\int_0^{\omega-s} g(\tau)\, d\tau} e^{i\frac{2\pi n}{\omega}(t-s)} e^{-\widehat{g}(0)\omega} e^{-\widehat{g}(0)(t-s)}\Big)\widehat{\psi}(n).$$

7. Предварительное преобразование подобия оператора L_1

Отметим, что в силу теоремы 24 и леммы 1 нам достаточно далее установить спектральные свойства только оператора L_1. При этом невозможно сразу применить результаты § 5, так как оператор-возмущение V_1 из представления оператора L_1 вида (11) не принадлежит, в общем случае, идеалу $\mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$. Поэтому, вначале необходимо сделать предварительное преобразование подобия оператора L_1 в оператор $L_0 - a_1 I - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$.

Заметим, что понятие операторной матрицы из пункта 5.1 естественным образом расширяется на операторы из $\mathfrak{L}_{L_0}(L_2[0,\omega])$ (не обязательно ограниченные). Каждому оператору $X : D(L_0) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega]$, $X \in \mathfrak{L}_{L_0}(L_2[0,\omega])$, поставим в соответствие операторную матрицу $X \sim (X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $X_{ij} = P_i X P_j \in \mathrm{End}\,(L_2[0,\omega])$, где P_j, $j \in \mathbb{Z}$, – спектральный проектор оператора L_0, построенный по спектральному множеству $\{\lambda_j\}$, $\lambda_j = i2\pi j/\omega$, $j \in \mathbb{Z}$, и $X_{ij}x = x_{ij}\widehat{x}(j)e_i$, где (x_{ij}), $i, j \in \mathbb{Z}$, — числовая матрица оператора X в базисе из собственных векторов $\{e_j, j \in \mathbb{Z}\}$ оператора L_0.

Перейдем к предварительному преобразованию подобия оператора L_1, определенного формулой (5) и представимого в виде (11) в оператор вида $L_0 - \widetilde{B} - a_1 I$, где $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$.

Заметим, что везде без ограничения общности число a_1 для простоты доказательств можно не учитывать (т. е. считать $a_1 = 0$). Однако оно будет учитываться в формулировках основных результатов.

Оператор-возмущение V_1 далее для удобства обозначим через V. Вычислим элементы числовой матрицы оператора-возмущения V:

$$v_{nm} = (Ve_m, e_n) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(s)e^{i\frac{2\pi m}{\omega}(\omega-s)}e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}s}\,ds = \widehat{v}(m+n).$$

В пункте 5.1 были построены трансформаторы J_kX и Γ_kX для $X \in \mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$. Продолжим эти трансформаторы на подпространство $\mathfrak{L}_{L_0}(L_2[0,\omega])$ (продолжения будут обозначаться теми же символами) следующим образом. Пусть $\lambda_0 \in \rho(L_0)$. Тогда положим

$$J_kX = J_k(X(L_0-\lambda_0 I)^{-1})(L_0-\lambda_0 I), \quad X \in \mathfrak{L}_{L_0}(L_2[0,\omega]),$$

$$\Gamma_kX = \Gamma_k(X(L_0-\lambda_0 I)^{-1})(L_0-\lambda_0 I), \quad X \in \mathfrak{L}_{L_0}(L_2[0,\omega]).$$

Эти продолжения корректны, они не зависят от выбора числа λ_0 из $\rho(L_0)$.

Теперь определим операторы J_mV и Γ_mV таким же образом, как и в § 5, а именно:

$$J_mV = P_{(m)}VP_{(m)} + \sum_{|i|>m} P_iVP_i, \quad m \geqslant 0, \tag{64}$$

$$\Gamma V = \Gamma_0 V = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\geq 0}} \frac{1}{n}\sum_{l-j=n} P_lVP_j, \tag{65}$$

$$\Gamma_mV = \Gamma V - P_{(m)}(\Gamma V)P_{(m)}, \quad m \geqslant 0.$$

Числовые матрицы операторов J_0V и Γ_0V состоят из элементов

$$(J_0V)_{ij} = \begin{cases} \widehat{v}_1(2i), & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \tag{66}$$

$$(\Gamma_0V)_{ij} = \begin{cases} 0, & i=j,\\ \frac{\widehat{v}(i+j)}{i-j}, & i\neq j.\end{cases} \tag{67}$$

Непосредственно из (64) – (67) вытекает, что операторы Γ_mV и J_mV, $m \geqslant 0$, определены корректно и принадлежат $\mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$.

Лемма 9. *Операторы Γ_0V и J_0V имеют следующие интегральные представления*

$$(J_0V)x = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t+s)x(\omega-s-2t)\,dt, \tag{68}$$

$$(\Gamma_0V)x = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t)v(t+s)x(\omega-s-2t)\,dt, \tag{69}$$

где $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — ω-периодическая функция, заданная формулой $f(s) = i(s-\omega/2)$ и имеющая ряд Фурье вида $f(s) \sim \sum\limits_{n\neq 0}\frac{\omega}{2\pi n}e^{i\frac{2\pi n}{\omega}s}$, $s\in[0,\omega]$.

Доказательство. Посчитаем матричные элементы $\widetilde{v}_{mn}$ оператора, заданного формулой (68) и покажем, что они совпадают с элементами, определяемыми (66). Действительно,

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_{mn} &= \frac{1}{\omega^2}\int_0^\omega\int_0^\omega v(s+t)e_n(\omega-s-2t)\,dt\,e_m(s)\,ds = \\ &= \frac{1}{\omega^2}\int_0^\omega\int_0^\omega \sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{v}(l)e^{i\frac{2\pi l}{\omega}t}e^{i\frac{2\pi l}{\omega}s}e^{i\frac{2\pi n}{\omega}(\omega-s-2t)}\,dt\,e^{i\frac{2\pi m}{\omega}s}\,ds = \\ &= \frac{1}{\omega^2}\int_0^\omega\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{v}(l)\Big(\int_0^\omega e^{i\frac{2\pi l}{\omega}t}e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}2t}\,dt\Big)e^{i\frac{2\pi l}{\omega}s}e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}s}e^{-i\frac{2\pi m}{\omega}s}\,ds = \\ &= \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \widehat{v}(2n)e^{i\frac{2\pi(n-m)}{\omega}s}\,ds = \widehat{v}(2n)\delta_{mn} = (J_0Ve_n, e_m).\end{aligned}$$

Таким образом, формула (68) действительно определяет оператор J_0V, совпадающий с оператором (66). Аналогично,

$$\begin{aligned}(\Gamma_0Ve_n, e_m) &= \frac{1}{\omega^2}\int_0^\omega\int_0^\omega f(t)v(t+s)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}(\omega-s-2t)}\,dt\,e^{-i\frac{2\pi m}{\omega}s}\,ds = \\ = \frac{1}{\omega^2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{v}(l)&\int_0^\omega\int_0^\omega f(t)e^{i\frac{2\pi l}{\omega}t}e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}2t}\,dt\,e^{i\frac{2\pi l}{\omega}s}e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}s}e^{-i\frac{2\pi m}{\omega}s}\,ds = \\ = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{v}(l)\widehat{f}(l-2k)&\int_0^\omega e^{i\frac{2\pi}{\omega}(l-n-m)s}\,ds = \widehat{v}(n+m)\widehat{f}(m-n) = \frac{\omega}{2\pi i}\frac{\widehat{v}(n+m)}{m-n}.\end{aligned}$$

Таким образом, утверждение леммы 9 имеет место. □

Для предварительного преобразования подобия нам потребуется оператор $Z_m = V\Gamma_mV$, $m \geqslant 0$. Элементы матрицы оператора $Z_0 = V\Gamma_0V$ определяются формулой

$$z_{ij} = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{l\neq j}\frac{\widehat{v}(i+l)\widehat{v}(l+j)}{l-j}.$$

Лемма 10. *Операторы J_0V, Γ_0V и $V\Gamma_0V$ являются интегральными операторами и определяются формулами*

$$(J_0Vx)(s) = \frac{1}{2\omega}\int_0^\omega v\Big(\frac{s+\omega-\tau}{2}\Big)x(\tau)\,d\tau,$$

$$(\Gamma_0Vx)(s) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} f\Big(\frac{\omega-s-\tau}{2}\Big)v\Big(\frac{s+\omega-\tau}{2}\Big)x(\tau)\,d\tau,$$

$$(V\Gamma_0Vx)(s) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} f\Big(\frac{s-\tau}{2}\Big)v\Big(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\Big)v(s)y(\tau)\,d\tau. \tag{70}$$

Доказательство. Все указанные в лемме 10 формулы получаются из (68) и (69) заменой переменной $\omega - s - 2t = \tau$. Подчеркнем, что принадлежность оператора $V\Gamma_0V$ идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует из формулы (70). □

Лемма 11. *Операторы Γ_mV, $m \in \mathbb{Z}_+$, обладают свойствами:*

1) $(\Gamma_mV)D(L_0) \subset D(L_0)$;

2) $L_0(\Gamma_mV)x - (\Gamma_mV)L_0x = (V - J_mV)x$, $x \in D(L_0)$;

3) Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(L_0)$ такое, что $\|V(L_0 - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_2 < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\lambda_\varepsilon \in \rho(L_0)$. Рассмотрим последовательность проекторов $Q_{(n)} = \sum\limits_{|j|\leqslant n} P_j$, $n \geqslant 0$. Для любого вектора $y \in L_2[0,\omega]$ имеют место равенства (проверяемые на базисных векторах):

$$Q_{(n)}L_0(\Gamma_m V)(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}y = Q_{(n)}(\Gamma_m V)L_0(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}y + \\ + Q_{(n)}(V-J_mV)(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}y = Q_{(n)}Ly,$$

где оператор L представим в виде

$$Ly = (\Gamma_m V)L_0(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}y + (V-J_mV)(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}y.$$

Так как оператор L является оператором из $\operatorname{End} L_2[0,\omega]$, то последовательность операторов из правой части сходится к оператору L по норме пространства $\operatorname{End} L_2[0,\omega]$. Из замкнутости оператора L_0 следует, что $\Gamma_m Vx \in D(L_0)$ при $x \in D(L_0)$ и имеет место равенство

$$(\Gamma_m V)L_0(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1} = L_0(\Gamma_m V)(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1} + (V-J_mV)(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}.$$

Таким образом, выполнены свойства 1) и 2).

Осталось проверить свойство 3). Пусть $Y = V(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}$, $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$. В этом представлении оператора Y мы рассматриваем его как произведение двух операторов $(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1} \in \operatorname{End} L_2[0,\omega]$, $V_\infty : L_\infty([0,\omega],\mathbb{C}) \to L_2[0,\omega]$, $(V_\infty x)(s) = (Vx)(s)$, $s \in [0,\omega]$, $x \in L_\infty([0,\omega],\mathbb{C})$. Ясно, что $\|V\|_\infty = \|v\|_2$. Осталось доказать, что $\|(L_0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon/\|v\|_2$ для числа λ_ε вида $\lambda_\varepsilon = k$ для достаточно большого $k \in \mathbb{N}$ и выбранного $\varepsilon > 0$. Для любой функции $x \in L_2[0,\omega]$ имеет место представление

$$(L_0-kI)^{-1}x = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{x}(l)e^{i\frac{2\pi l}{\omega}s}}{\frac{i2\pi l}{\omega}-k}.$$

Поэтому

$$\|(L_0-kI)^{-1}x\|_2 \leqslant \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2+\left(\frac{2\pi l}{\omega}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon\|x\|_2}{\|v\|_2}$$

для достаточно большого k.

Следовательно, доказано свойство $\|(L_0-kI)^{-1}x\|_2 \leqslant \varepsilon/\|v\|_2$. Таким образом, $\|V(L_0-kI)^{-1}\| \leqslant \|v\|_2\|(L_0-kI)^{-1}\| < \varepsilon$. Лемма доказана. $\square$

В следующей теореме (основном результате этого параграфа) будет использоваться

Лемма 12. $\lim\limits_{m\to\infty}\|\Gamma_m V\|_2 = \lim\limits_{m\to\infty}\|\Gamma_0 V - P_{(m)}(\Gamma_0 V)P_{(m)}\| = 0.$

Доказательство. Поскольку оператор $\Gamma_0 V$ является оператором Гильберта-Шмидта, то непосредственно из определения последовательностей ортопроекторов $P_{(m)}$, $m \geqslant 0$, следует утверждение леммы. $\square$

Из полученных утверждений относительно последовательности операторов J_mV, $\Gamma_m V$, $m \geqslant 0$, и теоремы 16 следует, что имеет место

Теорема 26. *Существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что $\|\Gamma_m V\|_2 < 1$ (т. е. оператор $I+\Gamma_m V$ обратим), и оператор $L_0 - V$ подобен оператору $L_0 - \widetilde{V}$, где*

$$\widetilde{V} = J_mV + (I+\Gamma_m V)^{-1}(V\Gamma_m V - (\Gamma_m V)J_mV) \in \mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega]), \tag{71}$$

причем имеет место равенство

$$(L_0 - V)(I + \Gamma_m V) = (I + \Gamma_m V)(L_0 - \widetilde{V}).$$

Оператор $\widetilde{V}$ *представим в виде*

$$\widetilde{V} = J_m V + V\Gamma_m V + C = JV + V\Gamma V + C_1, \tag{72}$$

где C, $C_1 \in \mathfrak{S}_1(L_2[0,\omega])$.

Доказательство. Осталось доказать формулу (72). Из представления

$$(I + \Gamma_m V)^{-1}(V\Gamma_m V - (\Gamma_m V)J_m V) = (I + \Gamma_m V)^{-1}(\Gamma_m V)(V\Gamma_m V - \\ - (\Gamma_m V)J_m V) + V\Gamma_m V - (\Gamma_m V)J_m V$$

и того, что произведение двух операторов из $\mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$ есть оператор из $\mathfrak{S}_1(L_2[0,\omega])$ вытекает первая часть равенства (72). Так как операторы $V\Gamma_m V - V\Gamma V$, $J_m V - JV$, $\Gamma_m V - \Gamma V$ имеют конечный ранг, то они принадлежат $\mathfrak{S}_1(L_2[0,\omega])$ и имеет место вторая часть формулы (72). Теорема 26 доказана. □

В заключении этого параграфа отметим, что в работах [21], [22], [28], использовался подход к построению операторов $J_m V$, $\Gamma_m V$ и $V\Gamma_m V$, $m \geqslant 0$, через ряды Фурье операторов. В этом случае существенным образом применяется аппарат из [84], [85].

8. Доказательство теорем 1 – 7

В § 7 произведено преобразование подобия оператора L_1 в оператор $L_0 - \widetilde{V}$, где оператор $\widetilde{V}$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определяется формулой (72). Это позволяет применить к оператору $L_0 - \widetilde{V}$ результаты § 5 и, в частности, теорему 19. Из теорем 19 вытекает

Лемма 13. *Существует такое число* $k \in \mathbb{Z}_+$, *что оператор* $L_0 - \widetilde{V}$ *подобен оператору* $L_0 - J_k X_*$ *и имеет место равенство*

$$(L_0 - a_1 I - \widetilde{V})(I + \Gamma_k X_*) = (I + \Gamma_k X_*)(L_0 - a_1 I - J_k X_*),$$

где $X_* \in \mathcal{M} \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *— решение нелинейного уравнения (44) из теоремы 14 с трансформаторами* J_k *и* Γ_k, *определенными формулами (46) – (50) и возмущением* $\widetilde{V} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *вида (72). Более того, оператор* $L_0 - J_k X_*$ *есть ортогональная прямая сумма операторов конечного ранга*

$$L_0 - a_1 I - J_k X_* = L_0 - a_1 I - \left(X_{*(k)} \oplus \left(\bigoplus_{|j|>k} X_{*j} \right) \right)$$

относительно представления пространства $L_2[0,\omega]$ *вида*

$$L_2[0,\omega] = \mathcal{H}_{(k)} \oplus \left(\bigoplus_{|j|>k} \mathcal{H}_j \right),$$

где $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im} P_{(k)}$, $\mathcal{H}_j = \operatorname{Im} P_j$, $|j| > k$. *Оператор* $L_0 - \widetilde{V}$ *есть* $(I + \Gamma_k X_*)$-*ортогональная прямая сумма операторов конечного ранга*

$$L_0 - a_1 I - \widetilde{V} = (I + \Gamma_k X_*) \left(L_0 - a_1 I - \left(X_{*(k)} \oplus \left(\bigoplus_{|j|>k} X_{*j} \right) \right) \right) (I + \Gamma_k X_*)^{-1}$$

относительно разложения Рисса пространства $L_2[0,\omega]$ *вида*

$$L_2[0,\omega] = (I + \Gamma_k X_*)\mathcal{H}_{(k)} \uplus \left(\biguplus_{|j|>k} (I + \Gamma_k X_*)\mathcal{H}_j \right),$$

Теорема 1 вытекает из теоремы 26 и леммы 13.

Особо отметим, что оператором преобразования оператора L в оператор $L_0 - J_m X_*$, который является ортогональной прямой суммой операторов конечного ранга, является оператор $U_1 = (I + \Gamma_m V)(I + \Gamma_k X_*)$ и он представим в виде

$$U_1 = I + U_{mk}, \quad U_{mk} = \Gamma_m V + \Gamma_k X_* + (\Gamma_m V)(\Gamma_k X_*), \quad U_{mk} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}). \tag{73}$$

Оператором преобразования оператора L_2 в оператор $L_0 - a_2 I - J_k X_*$ служит оператор

$$U_2 = W_2(I + U_{mk}), \tag{74}$$

а оператора L_3 в оператор $L_0 - a_3 I - J_k X_*$ — оператор

$$U_3 = W_3 W_2 (I + U_{mk}). \tag{75}$$

Каждый из операторов $\widetilde{V}_i$, $i = 1,2,3$, из теоремы 1 есть решение нелинейного операторного уравнения (44) теоремы 14 с возмущением $B = \widetilde{V}$, определенным формулой (72) с оператором $(\widetilde{V}_i y)(s) = v_i(s) y(\omega - s)$, $i = 1,2,3$, где функции v_i, $i = 2,3$, определяются формулами (15) – (17).

Доказательство теоремы 2. Так как спектры подобных операторов совпадают (см. лемму 1), то необходимо оценить собственные значения оператора $L_0 - J_k X_*$. Воспользуемся также результатами теорем 1 и 20 и леммы 6. Отметим, что

$$P_j X_* P_j = P_j \widetilde{V} \Gamma_k X_* P_j + P_j \widetilde{V} P_j = P_j V \Gamma_k V P_j + P_j V P_j + P_j C P_j,$$

где оператор C принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. Таким образом, нам нужны диагональные элементы числовых матриц операторов V и $V\Gamma_k V$. Напомним, что они равны $\widehat{v}(2l)$ и $\frac{\omega}{2\pi i} \sum\limits_{j\neq l} \frac{(\widehat{v}(l+j))^2}{j-l}$, $|l| > k$, соответственно. При этом $\sum\limits_l |\widehat{v}(2l)|^2 < \infty$ и $\frac{\omega}{2\pi} \sum\limits_l \Big| \sum\limits_{j\neq l} \frac{(\widehat{v}(l+j))^2}{l-j} \Big|^2 < \infty$. Более того, вторая последовательность суммируема с любой степенью $p > 1$. Если же потенциал v — функция ограниченной вариации, то ее коэффициенты Фурье допускают оценку $|\widehat{v}(n)| \leqslant C/|n|$. Поэтому доказаны все утверждения теоремы 2, касающиеся оценок собственных значений.

Переходим к оценкам собственных векторов. Собственные векторы $\widetilde{e}_j$, $|j| > k$, оператора L связаны с собственными векторами e_j, $|j| > k$, оператора L_0 (см. лемму 1) формулой $\widetilde{e}_j = (I + U_{mk}) e_j$. Так как $U_{mk} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $\widetilde{e}_j$ образуют базис Бари (и, в частности, базис Рисса) в пространстве $L_2[0,\omega]$ и имеет место оценка 1). Оценка 2) получается, если учесть, что $U_{mk} e_j = \Gamma_m V e_j + \Gamma_k X_* e_j +$

$(\Gamma_k X_*)\Gamma_m V e_j$, оставить только слагаемые вида We_j, где $W \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, и заменить оператор X_* первым приближением к нему. Формулы для собственных векторов f_j, $|j| > k$, оператора L_2 и g_j, $|j| > k$, оператора L_3 также следуют из леммы 1. При этом $f_j = W_2(I + U_{mk})e_j$ и $g_j = W_3 W_2(I + U_{mk})e_j$, $|j| > k$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. В доказательстве этой теоремы существенным образом будут использоваться лемма 1 и теоремы 1, 26. Из леммы 1 следует равенство

$$\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = (U_{mk}P(\Omega) - P(\Omega)U_{mk})(I + U_{mk})^{-1}. \tag{76}$$

Тогда

$$\|P(\Omega)U_{mk}\|_2 \leqslant \|P(\Omega)(\Gamma_m V)\|_2 + \|P(\Omega)(\Gamma_k X_*)\|_2 +$$
$$+ \|P(\Omega)(\Gamma_m V)(\Gamma_k X_*)\|_2 \leqslant \|P(\Omega)(\Gamma V)\|_2 + \|P(\Omega)(\Gamma X_*)\|_2 +$$
$$+ \|P(\Omega)(\Gamma V)(\Gamma X_*)\|_2 \leqslant C_1(\alpha(\Omega, \Gamma V) + \alpha^2(\Omega, X_*)) \leqslant C_2(\alpha(\Omega, \Gamma V) + \alpha^2(\Omega, V)).$$

Отметим, что константы C_1 и C_2 не зависят от Ω. Аналогичной величиной оценивается норма $\|U_{mk}P(\Omega)\|_2$.

Оператор $(I + U_{mk})^{-1}$ представим в виде $(I + U_{mk})^{-1} = I + \sum\limits_{j=1}^{\infty}(-1)^j U_{mk}^j$, поэтому

$$\|(I + U_{mk})^{-1} - I\|_2 \leqslant \frac{\|U_{mk}\|_2}{1 - \|U_{mk}\|_2}.$$

В итоге получаем

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leqslant C_3(\alpha(\Omega, \Gamma V) + \alpha^2(\Omega, V)), \tag{77}$$

где константа C_3 не зависит от Ω.

Утверждение теоремы 4 для оператора L_1 (предельное соотношение (27)) немедленно вытекает из оценки (77), если в качестве Ω рассмотреть множество $\Omega = \{n \in \mathbb{Z}, |n| > N\}$, где N — достаточно большое натуральное число, и свойства 2) последовательности $\{\alpha_n\}$.

Предельные соотношения (28) и (29) также следуют из леммы 1, оценки (77) и обратимой ограниченности соответствующих операторов преобразования.

Следствие 1. *Операторы* L_i, $i = 1, 2, 3$, *являются спектральными операторами.*

Утверждения теорем 5, 6 следуют из леммы 1 и теорем 15 и 21.

Доказательство теоремы 7. Заметим, что оператор $L_0 - a_i I$ обратим только тогда, когда $a_i \neq 0$. Пусть оператор $L_0 - a_i I$ обратим. Тогда представим оператор $L_0 - a_i I - \widetilde{V}_i$, $i = 1, 2, 3$, в виде

$$(L_0 - a_i I - \widetilde{V}_i) = (I - \widetilde{V}_i(L_0 - a_i I)^{-1})(L_0 - a_i I).$$

Из последнего равенства следует, что условием обратимости оператора $L_0 - a_i I - \widetilde{V}_i$, $i = 1, 2, 3$, является выполнение неравенства

$$\|\widetilde{V}_i(L_0 - a_i I)^{-1}\|_2 \leqslant 1.$$

Элементами числовой матрицы оператора $\widetilde{V}_i(L_0 - a_i I)^{-1}$, $i = 1, 2, 3$, являются числа

$$(\widetilde{V}_i(L_0 - a_i I)^{-1})_{jl} = \frac{\widehat{v}_i(j + l)}{i\frac{2\pi l}{\omega} - a_i}, \quad j, l \in \mathbb{Z}.$$

Откуда

$$\|\widetilde{V}_i(L_0 - a_iI)^{-1}\|_2^2 = \sum_{l,j\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{v}_i(j+l)|^2}{|\operatorname{Re} a_i|^2 + \left(\frac{2\pi l}{\omega} - \operatorname{Im} a_i\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\operatorname{Re} a_i|^2 + \left(\frac{2\pi l}{\omega} - \operatorname{Im} a_i\right)^2} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{v}(j+l)|^2 \leqslant \|v_i\|_2^2 \frac{\omega}{2|\operatorname{Re} a_i|^2}.$$

Откуда и следует утверждение теоремы 7.

References

[1] N.K. Karapetjans, S.G. Samko, *Singular integral operators with Carleman shift in the case of piecewise continuous coefficients*, Izv. Vys. Ucheb. Zaved. Mathematika, **2** (1975), 43–54 (in Russian). Zbl 0313.47034

[2] A.A. Andreev, E.N. Ogorodnikov, *On the correctness of initial boundary value problems for a single hyperbolic equation with degeneration of order and involutive deviation*, Vestnik Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Phys. Math., **9** (2000), 32–36 (in Russian).

[3] A.A. Andreev, *Analogs of classical boundary value problems for a second order differential equation with deviating argument*, Differ. Equ., **40**:8 (2004), 1192–1194. Zbl 1084.35108

[4] M.Sh. Burlutskaya, V.P. Kurdyumov, A.S. Lukonina, A.P. Khromov, *A functional-differential operator with involution*, Dokl. Math., **75**:3 (2007), 399–402. Zbl 1166.34322

[5] M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov, *On the same theorem on a equiconvergence at the whole segment for the functional-differential operators*, Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., **9**:4–2 (2009), 3–10 (in Russian).

[6] M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov, *On classical solution of a mixed problem for equation of first order with involution*, Vestnik Voronezh. Gos. Univ. Phys. Math., 2 (2010), 26–33 (in Russian). Zbl 1329.35221

[7] M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov, *Classical solution of a mixed problem with involution*, Dokl. Math., **82**:3 (2010), 865–868. Zbl 1217.35047

[8] A.P. Khromov, *The mixed problem for the differential equation with involution and potential of the special kind*, Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., **10**:4 (2010), 17–22 (in Russian).

[9] M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov, *Substantiation of Fourier method in mixed problem with involution*, Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., **11**:4 (2011), 3–12 (in Russian).

[10] M.Sh. Burlutskaya, *Asymptotic formulas for its own values and its own functions of a functional differential operator with involution*, Vestnik Voronezh. Gos. Univ. Phys. Math., 2 (2011), 64–72 (in Russian).

[11] M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov, *Initial boundary value problems for first-order hyperbolic equations with involution*, Dokl. Math., **84**:3 (2011), 783–786. Zbl 1241.35130

[12] M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov, *The Steinhaus theorem on equiconvergence for functional-differential operators*, Math. Notes, **90**:1-2 (2011), 20–31. MR 2908165

[13] M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov, *Fourier method in an initial boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution*, Comput. Math. Math. Phys., **51**:12 (2011), 2102–2114. MR 2933405

[14] M.Sh. Burlutskaya *Jordan-Dirichlet theorem for functional-differential operator with involution*, Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., **13**:3 (2013), 9–14 (in Russian). Zbl 1304.34111

[15] M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov, *Mixed problem for simplest hyperbolic first-order equations with involution*, Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., **14**:1 (2014), 10–20 (in Russian).

[16] M.Sh. Burlutskaya, *Mixed problem for the first-order partial differential equation with involution and periodic boundary conditions*, Comput. Math. Math. Phys., **54**:1 (2014), 1–10.

[17] M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov, *Functional differential operators with involution and Dirac operators with periodic boundary conditions*, Dokl. Math., **89**:1 (2014), 8–10. Zbl 1307.34104

[18] M.Sh. Burlutskaya, S.A. Cherednikova, *The classical solution of the mixed problem for the equation with involution and two-point boundary conditions*, Vestnik Voronezh. Gos. Univ. Phys. Math., 3 (2016), 71–79 (in Russian). Zbl 1368.35069

[19] S.S. Platonov, *Eigenfunction expansion for some functional differential operators*, Tr. Petrozavodsk. Gos. Univ. Ser. Mat., **11** (2004), 14–34 (in Russian). Zbl 1282.34090

[20] L.V. Kritskov, A.M. Sarsenbi, *Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution*, Differ. Equ., **53**:1 (2017), 33–46. Zbl 1367.34085

[21] A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, E.Yu. Romanova, *Spectral analysis of a differential operator with an involution*, J. Evol. Equat., **17** (2017), 669–684. Zbl 06790380

[22] A.G. Baskakov, N.B. Uskova, *A generalized Fourier method for the system of first-order differential equations with an involution and a group of operators*, Differ. Equ., **54**:2 (2018), 277–281. MR 3797532

[23] A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova, *Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group*, Operators and Matrices, **12**:3 (2018), 723–756. MR 3853364

[24] A.G. Baskakov, N.B. Uskova, *Fourier method for first order differential equations with an involution and groups of operators*, Ufa Math. J., **10**:3 (2018), 11–34.

[25] N.B. Uskova, *Asymptotic of eigenvalues of scalar differential operator with an involution*, Belgorod State University. Sci. Bull. Math. Phys., **49**:27 (279) (2017), 42–44. (in Russian)

[26] A.G. Baskakov, N.B. Uskova, *Spectral analysis of differential operator with an involution and a group of operators*, Differ. Equ., **54**:9 (2018), 1287–1291. Zbl 07002861

[27] A.G. Baskakov, *Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators*, Siberian Math. J., **24**:1 (1983), 17–32. MR 0688589

[28] A.G. Baskakov, A.V. Derbushev, A.O. Shcherbakov, *The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials*, Izv. Math., **75**:3 (2011), 445–469. MR 2847780

[29] A.G. Baskakov, D.M. Polyakov, *The method of similar operators in the spectral analysis of the Hill operator with nonsmooth potential*, Sb. Math., **208**:1 (2017), 1–43. MR 3598763

[30] N.B. Uskova, *On the spectral properties of a second order differential operator with a matrix potential*, Differ. Equ., **52**:5 (2016), 579–588. MR 3541452

[31] R.E. Kalman, R.S. Bucy, *New results in linear filtering and prediction theory*, Trans. ASME. Ser. D.J. Basic Eng., **86** (1961), 95–108.

[32] D. Przeworska-Rolewicz, *Equations with transformed argument: Algebraic approach*, Warsaw: Polish. Sci. Publ., 1973.

[33] V.A. Pliss, *Nonlocal problems of oscillations theory*, Moscow: Nauka, 1964 (in Russian). Zbl 0123.05803

[34] J. Wu, *Theory and applications of partial functional differential equations*, New York: Springer, 1996. Zbl 0870.35116

[35] J. Wiener, A.R. Aftabizadeh, *Boundary value problems for differential equations with reflection of the argument*, Intern. J. Math. Math. Sci., **8**:1 (1985), 151–163. Zbl 0583.34055

[36] D. Piao, *Periodic and almost periodic solutions for differential equations with reflection of the argument*, Nonlinear Anal., **57**:4 (2004), 633–637. Zbl 1069.34103

[37] A. Cabada, F.A.F. Tojo, *Existence results for a linear equations with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl., **412**:1 (2014), 529–546. Zbl 1317.34150

[38] A. Cabada, F.A.F. Tojo, *Solutions and Green's function of the first order linear equation with reflection and initial conditions*, Boundary Value Probl., **99** (2014), 1–16. Zbl 1323.34078

[39] W. Watkins, *Asymptotic properties of differential equations with involutions*, Int. J. Pure. Appl. Math., **44**:4 (2008), 485–492. Zbl 1152.34384

[40] A.A. Kopzhassarova, A.L. Lukashov, A.M. Sarsenbi, *Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution*, Abstr. Appl. Anal., (2012), article ID 590781.

[41] A.A. Kopzhassarova, A.M. Sarsenbi, *Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution*, Abstr. Appl. Anal., (2012), article ID 576843.

[42] M.A. Sadybekov, A.M. Sarsenbi, *Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution*, Differ. Equ., **48**:8 (2012), 1112–1118. Zbl 1268.47053

[43] L.V. Kritskov, A.M. Sarsenbi, *Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution*, Differ. Equ., **51**:7 (2015), 984–990. Zbl 1331.34161

[44] L.V. Kritskov, A.M. Sarsenbi, *Basicity in L_p of root functions for differential equations with involution*, Electr. J. Differ. Equat., **278** (2015), 1–9. Zbl 1331.34162
[45] I.Ts. Gohberg, M.G. Krein, *An Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969. MR 0246142
[46] A. S. Markus, *On a basis of root vectors of a dissipative operator*, Soviet Math. Dokl., **1** (1960), 599–602. Zbl 0095.31203
[47] M. K. Fage, *Idempotent operators and their rectification*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), **73** (1950), 895–897 (in Russian). Zbl 0036.35702
[48] N. Bary, *Sur les bases dans l'espace de Hilbert*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), **54** (1946), 379–382. Zbl 0061.24806
[49] A.G. Baskakov, *Harmonic analysis of linear operators*, Izdatelstvo VSU, Voronezh, 1987 (in Russian). MR 1607000
[50] A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova, *General Dirac operators as generators of operator groups*, arXiv 1806.10831.
[51] G.V. Garkavenko, N.B. Uskova, *The asymptotic of eigenvalues of difference operator with growing potential and groups of operators*, Mathem. Fiz. Comp. Model., **20**:4 (2017), 6–17. (in Russian).
[52] G.V. Garkavenko, A.R. Zgolich, N.B. Uskova, *Spectral analysis of a difference operator with a growing potential*, J. Phys.: Conf. Series, **973** (2018), 012053. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012053. MR 3584321
[53] W. Arendt, C.J.K. Betty, M. Hieber, F. Neubrander, *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, Basel AG. Basel: Birkhäuser/Springer, 2011. Zbl 1226.34002
[54] S.G. Krein, *Linear equations in Banach spaces*, Boston: Birkhäuser, 1982. Zbl 0535.47008
[55] E. Hille, R.S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, AMS, Providense RI, 1962.
[56] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equation*, New-York: Springer-Verlag, 2000. Zbl 0952.47036
[57] A.G. Baskakov, *Estimates for Green's function and parameters of exponential dichotomy of a hyperbolic operator semigroup and linear relations*, Sb. Math., **205**:8 (2015), 1049–1086. Zbl 1335.47027
[58] A.G. Baskakov, V.B. Didenko, *On invertibility states of differential and difference operators*, Izv. Math., **82**:1 (2018), 1–13. Zbl 06893068
[59] A.G. Baskakov, V.B. Didenko, *Spectral analysis of differential operators with unbounded periodic coefficients*, Differ. Equ., **51**:3 (2015), 325–341. Zbl 1316.47037
[60] A.G. Baskakov, A.S. Zagorskii, *Spectral theory of linear relations on real Banach spaces*, Math. Notes, **82**:1 (2007), 15–27. Zbl 1180.47005
[61] A.G. Baskakov, *Spectral criteria for almost periodicity of solutions of functional equations*, Math. Notes, **24**:2 (1978), 606–612. Zbl 0418.39005
[62] B.M. Levitan, V.V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982. Zbl 0499.43005
[63] A.G. Baskakov, *Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces*, Math. Notes, **98**:2 (2015), 164–178. Zbl 1328.47043
[64] A.G. Baskakov, *Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations*, Russ. Math. Surv., **68**:1 (2013), 69–116. Zbl 1279.34069
[65] K.O. Friedrichs, *Lectures on advanced ordinary differential equations. Notes by P. Berg, W. Hirsch, P. Treuenfels*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1965.
[66] A.G. Baskakov, *The Krylov-Bogolyubov substitution in the theory of perturbations of linear operators*, Ukrainian Math. J., **36**:5 (1984), 451–455. Zbl 0602.47007
[67] R.F.L. Turner, *Perturbation of compact spectral operators*, Comm. Pure. Appl. Math., **18** (1965), 519–541. Zbl 0151.19904
[68] N.B. Uskova, *On a result of R. Turner*, Math. Notes, **76**:6 (2004), 844–854. MR 2127501
[69] A.G. Baskakov, *The Krylov-Bogolyubov replacement in the theory of nonlinear perturbations of linear operators*, Keldysh Institute preprints, (1980).
[70] A.G. Baskakov, *A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations*, Math. USSR-Izv., **28**:3 (1987), 421–444. MR 854591
[71] A.G. Baskakov, *The averaging method in the theory of perturbations of linear differential operators*, Differ. Equ., **21**:4 (1985), 555–562 (in Russian). MR 791103

[72] A.G. Baskakov, T.K. Katsaran, *Spectral analysis of integro-differential operators with nonlocal boundary conditions*, Differ. Equ., **24**:8 (1988), 934–941. Zbl 0671.47040

[73] A.G. Baskakov, *Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators*, Izv. Math., **45**:1 (1995), 1–31. MR 1307054

[74] A.G. Baskakov, *An abstract analog of the Krylov-Bogolyubov transformation in the perturbation theory of linear operators*, Funct. Anal. Appl., **33**:2 (1999), 144–147. Zbl 0962.47030

[75] N.B. Uskova, *The matrix analysis of spectral projections for the pertubed self-adjoint operators*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 369–405 (in Russian). Zbl 07052947

[76] D.M. Polyakov, *On the spectral characteristics of non-self-adjoint fourth-order operators with matrix coefficients*, Math. Notes, **105**:4 (2019), 630–635. Zbl 07083435

[77] D.M. Polyakov, *A one-dimensional Schrödinger operator with square-integrable potential*, Siberian Math. J., **59**:3 (2018), 470–485. Zbl 06935975

[78] G.V. Garkavenko, A.R. Zgolich, N.B. Uskova, *Spectral analysis of one class of the integro-differential operators*, J. Phys: Conf. Series, **1203** (2019), 012102.

[79] G.V. Garkavenko, N.B. Uskova, *Method of similar operators in research of spectral properties of difference operators with growing potentials*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 673–689 (in Russian). Zbl 1373.39016

[80] A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, N. B. Uskova, *Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices*, J. Math. Anal. Appl., **477** (2019), 930–960. Zbl 07087651

[81] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill book, 1973.

[82] V.A. Sadovnichii, *Operator theory*, MSU, Moscow, 2004 (in Russian).

[83] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear operators. Spectral operators. Part III*, Pure and Applied Mathematics. VII, Wiley-Interscience, New York, 1971. MR 0412988

[84] A.G. Baskakov, *Estimates for the entries of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators*, Izv. Math., **61**:6 (1997), 1113–1135. MR 1609144

[85] A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, *Memory estimation of inverse operators*, J. Funct. Anal., **267**:8 (2014), 2551–2605. MR 3255468

Ilya A. Krishtal
Northern Illinois University,
Dekalb, IL,
IL, 60115, USA
E-mail address: krishtal@math.niu.edu

Natalia B. Uskova
Voronezh State Technical University,
14, Moskovsky ave.,
Voronezh, 394026, Russia
E-mail address: nat-uskova@mail.ru