S⃝eMR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1147–1157 (2019) УДК 512.53, 512.58
DOI 10.33048/semi.2019.16.078 MSC 18D35

РЕШЕТКИ КОНГРУЭНЦИЙ ПОЛИГОНОВ НАД ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫМ МОНОИДОМ

А.А. СТЕПАНОВА[1], М.С. КАЗАК

Abstract. In this article, we describe the S-acts over a well-ordered monoid such that the corresponding congruence lattice is distributive or totally ordered.

Keywords: lattice, totally ordered lattice, distributive lattice, congruence lattice of algebra, S-act.

1. Введение

Изучению полигонов с заданными условиями на их решетки конгруэнций посвящено значительное количество работ. В частности, унары с линейно упорядоченной, дистрибутивной или модулярной решеткой конгруэнций полностью описаны в [1]. Решетки конгруэнций несвязных полигонов над моноидами изучены в [2]. В работе [3] дана характеризация полигонов над полугруппами правых и левых нулей, имеющих модулярные или дистрибутивные решетки конгруэнций. В данной работе описаны полигоны над цепью, решетки конгруэнций которых линейно упорядочены, дитрибутивны.

§1 Предварительные сведения

Напомним некоторые определения, которые можно найти в [4,5].

Пусть S – моноид. Левым S*-полигоном* (или просто *полигоном*) ${}_SA$ называется непустое множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно.

Stepanova, A.A., Kazak, M.S., Congruence lattices of S-acts over a well-ordered monoid.

[1] Работа поддержана РФФИ (грант 17-01-00531).

Поступила 23 марта 2018 г., опубликована 25 августа 2019 г.

Элементы $a, b \in A$ называются *связанными* в полигоне ${}_SA$, если существуют $n \in \omega, c_i \in A$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и $s_j, t_j \in S$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ такие, что $a = c_0$, $b = c_n$ и $s_i c_{i-1} = t_i c_i$ для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Полигон ${}_SA$ называется *связным*, если любые два элемента в нем связаны. Наибольший по включению связный подполигон полигона ${}_SA$ называется *компонентой связности* полигона ${}_SA$. *Копроизведением* $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ полигонов ${}_SA_i$ $(i \in I)$ называется их дизъюнктное объединение. Ясно, что любой полигон представим в виде копроизведения своих компонент связности.

Конгруэнцией θ полигона ${}_SA$ называется отношение эквивалентности на множестве A такое, что

$$(a, b) \in \theta \Rightarrow (sa, sb) \in \theta$$

для любых $a, b \in A, s \in S$. Пусть ${}_SB$ – подполигон полигона ${}_SA$ и θ – конгруэнция полигона ${}_SA$. Через $\theta \restriction B$ обозначим конгруэнцию $\theta \cap (B \times B)$ полигона ${}_SB$, через 0_A – нулевую конгруэнцию полигона ${}_SA$, через $\rho(B)$ – *конгруэнцию Риса* полигона ${}_SA$, т.е.

$$(a, b) \in \rho(B) \Leftrightarrow (a, b \in B \text{ или } a = b).$$

Вместо записи $(a, b) \in \theta$ иногда будем использовать запись $a\theta b$. Классом конгруэнции θ с представителем $a \in A$ назовем множество $\theta(a) = \{b \in A \mid a\theta b\}$. Заметим, что совокупность всех конгруэнций полигона ${}_SA$ образует решетку относительно следующих операций:

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2,$$

$$\theta_1 \vee \theta_2 \text{ – наименьшая конгруэнция, содержащая } \theta_1 \cup \theta_2,$$

где θ_1, θ_2 – конгруэнции полигона ${}_SA$. Эту решетку будем обозначать $Con({}_SA)$.

Факт 1 [4]. Пусть ${}_SA$ – полигон, $a, b \in A$, $\theta_1, \theta_2 \in Con({}_SA)$. Тогда $a\,(\theta_1 \vee \theta_2)\,b$ в том и только в том случае, когда существует цепочка $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ элементов из A такая, что $a = x_0$, $x_{2n} = b$, $x_{2k}\,\theta_1\,x_{2k+1}$ и $x_{2k+1}\,\theta_2\,x_{2k+2}$ для любого $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Решетка $(L, \wedge, \vee)$ называется *модулярной*, если для любых $a, b, c \in L$, где $a \leqslant c$, справедлив модулярный закон

$$(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c).$$

Факт 2 [5]. Следующие свойства решетки L эквивалентны:

1) L модулярна;

2) если $a, b \in L, a \leqslant b$, и для некоторого $c \in L$ справедливо $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge c = b \wedge c$, то $a = b$.

Факт 3 [2]. Если в полигоне ${}_SA$ есть четыре компоненты связности, то решетка $Con({}_SA)$ конгруэнций этого полигона не является модулярной.

Решетка $(L, \wedge, \vee)$ называется *дистрибутивной*, если для любых $a, b, c \in L$ справедлив дистрибутивный закон

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

Ясно, что дистрибутивная решетка является модулярной.

Факт 4 [5]. Следующие свойства решетки L эквивалентны:

1) L дистрибутивна;

2) если $a, b \in L$ и для некоторого $c \in L$ справедливо $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge c = b \wedge c$, то $a = b$.

Факт 5 [2]. Если в полигоне ${}_SA$ есть три компоненты связности, то решетка $Con({}_SA)$ конгруэнций этого полигона не является дистрибутивной.

Конгруэнцию θ полигона ${}_SA$ назовем *сквозной*, если существуют такие полигоны ${}_SB$ и ${}_SC$, $b_1, b_2 \in B$ и $c_1, c_2 \in C$ такие, что

$${}_SA = {}_S B \sqcup_S C, (b_1, b_2) \notin \theta, (c_1, c_2) \notin \theta, (b_1, c_1) \in \theta, (b_2, c_2) \in \theta.$$

Факт 6 [2]. Решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ модулярна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) полигон ${}_SA$ содержит не более трех компонент связности;

2) решетки конгруэнций всех его компонент связности модулярны;

3) в решетке конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ нет сквозных конгруэнций.

Пусть на множестве S задан линейный порядок $\leq$ и 1 – минимальный элемент S. Тогда $(S; \cdot)$ – коммутативный моноид относительно операции $a \cdot b = \max\{a, b\}$, где $a, b \in S$, причем 1 – единица S. Этот моноид будем называть *линейно упорядоченным моноидом.* Если $(S; \leq)$ – вполне упорядоченное множество, то линейно упорядоченный моноид $(S; \cdot)$ будем называть *вполне упорядоченным моноидом.* Пусть $(S; \leq)$ – вполне упорядоченное множество, 1 – минимальный элемент S. Если $R \subseteq S$ и $A = \{s \in S \mid \forall r \in R\ (r \leq s)\} \neq \emptyset$, то через $\sup R$ обозначим $\min A$. Для $s \in S$ через $s+1$ обозначим $\min B$, где $B = \{t \in S \mid s < t\}$, если $B \neq \emptyset$. Будем говорить, что подмножество K множества S *замкнуто относительно супремумов*, если для любого множества $R \subseteq K$ из того, что $\sup R$ существует следует, что $\sup R \in K$, т.е. для любого подмножества множества K существует максимальный элемент.

§2 Полигоны над линейно упорядоченным множеством с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций

Всюду ниже в этом параграфе $(S; \leq)$ – линейно упорядоченное множество с минимальным элементом 1, $(S; \cdot)$ – линейно упорядоченный моноид, т.е. моноид относительно операции $a \cdot b = \max\{a, b\}$, где $a, b \in S$.

Лемма 1. *Пусть S – линейно упорядоченное множество с минимальным элементом 1, ${}_SA$ – полигон, $a, b \in A$, $Sa = Sb$. Тогда $a = b$.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются. Из равенства $Sa = Sb$ следует, что $a = sb$ и $b = ta$ для некоторых $s, t \in S$. Предположим, что $s \leq t$. Тогда $a = sb = sta = ta = b$. □

Теорема 1. *Пусть S – линейно упорядоченный моноид. Решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ линейно упорядочена тогда и только тогда, когда $|A| \leq 2$.*

Доказательство. **Достаточность** очевидна.

Необходимость. В силу факта 5 полигон ${}_SA$ имеет не более двух компонент связности.

Пусть ${}_SA$ – несвязный полигон, т.е. ${}_SA = {}_S B \bigsqcup_S C$ для некоторых связных полигонов ${}_SB$ и ${}_SC$. Предположим, $|B| \geq 2$. Поскольку ${}_SB$ – связный полигон, то существуют различные $a, b \in B$ такие, что $a = sb$ для некоторого $s \in S$. По лемме 1 $Sa \neq Sb$, т.е. ${}_SSa$ – собственный подполигон полигона ${}_SB$. Ясно, что конгруэнции $\rho(Sa \sqcup C)$ и $\rho(B)$ полигона ${}_SA$ несравнимы, что противоречит линейной упорядоченности решетки конгруэнций $Con_S(A)$. Таким образом, $|B| = 1$. Аналогично, $|C| = 1$.

Пусть ${}_SA$ – связный полигон. Предположим, что $|A| > 2$, т.е. существуют a, b, c – различные элементы A. Поскольку решетка конгруэнций $Con_S(A)$ линейно упорядочена, то конгруэнции $\rho(Sa)$, $\rho(Sb)$, $\rho(Sc)$ попарно сравнимы. Можно считать, что $\rho(Sa) \subseteq \rho(Sb) \subseteq \rho(Sc)$, т.е. $Sa \subseteq Sb \subseteq Sc$. По лемме 1 $Sa \subset Sb \subset Sc$. Пусть $a = sb$ и $b = tc$ для некоторых $s, t \in S$. Если $s \leq t$, то $a = sb = stc = tc = b$, противоречие. Следовательно, $s > t$ и $a = stc = sc$. Построим отношение эквивалентности θ на множестве A следующим образом:

$$x\theta y \Leftrightarrow x, y \in \{rc \mid r \leq t\} \text{ или } x = y.$$

Покажем, что θ – конгруэнция. Пусть $x = r_1c$, $y = r_2c$, $r_1 \leq r_2 \leq t$. Если $r \leq t$, то $rr_1 \leq t$, $rr_2 \leq t$ и $rx\theta ry$. Если $r > t$, то $rr_1 = rr_2 = r$ и $rx = ry$. Таким образом, θ – конгруэнция. Поскольку $c = 1 \cdot c$, $b = tc$ и $1 \leq t$, то $(c, b) \in \theta$, т.е. $(c, b) \in \theta \backslash \rho(Sb)$. Если $a = rc$ и $r \leq t$, то $b = tc = trc = ta \in Sa$, что не так. Следовательно, $(a, b) \notin \theta$, т.е. $(a, b) \in \rho(Sb) \backslash \theta$ и конгруэнции θ и $\rho(Sb)$ несравнимы. Противоречие. □

§3 Полигоны над вполне упорядоченным множеством с дистрибутивной решеткой когруэнций

Всюду ниже до конца статьи $(S; \leq)$ – вполне упорядоченное множество с минимальным элементом 1, $(S; \cdot)$ – вполне упорядоченный моноид, т.е. моноид относительно операции $a \cdot b = \max\{a, b\}$, где $a, b \in S$.

Лемма 2. *Пусть S – вполне упорядоченный моноид, ${}_SA$ – связный полигон. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Для любых a, $b \in A$ существует минимальный элемент $m \in S$ такой, что $Sa \cap Sb = Sma$ и $ma = mb$.

2) Существуют $a_i \in A$ $(i \in I)$ такие, что $A = \bigcup\limits_{i \in I} Sa_i$ и $a_i \notin Sa_j$ для любых различных $i, j \in I$.

Доказательство. Докажем 1). Существование минимального элемента $m \in S$ с условием $ma = mb$ следует из связности полигона ${}_SA$ и вполне упорядоченности моноида S. Проверим равенство $Sa \cap Sb = Sma$. Очевидно, $Sma \subseteq Sa \cap Sb$. Пусть $c \in Sa \cap Sb$; тогда $c = s_0a = s_1b$ для некоторых s_0, $s_1 \in S$. Это означает, что $c = sa = sb$, где $s = \max\{a, b\}$. В частности, $s \geq m$, поэтому $c = sa = sma \in Sma$.

Докажем 2). Для этого достаточно показать, что в ${}_SA$ нет бесконечной возрастающей цепи циклических подполигонов. Предположим, что $Sb_0 \subset Sb_1 \subset \ldots \subset Sb_k \subset \ldots$ для некоторых $b_k \in A$ $(k \in \omega)$. Тогда существуют $t_k \in S$ такие, что $b_k = t_kb_{k+1}$ $(k \in \omega)$. Следовательно, $b_k = t_kb_{k+1} = t_kt_{k+1}b_{k+2}$ $(k \in \omega)$. Если бы для некоторого $k \in \omega$ выполнялось неравенство $t_{k+1} \geq t_k$, то $b_k = t_{k+1}b_{k+2} = b_{k+1}$, что противоречит выбору элементов b_k, b_{k+1}. Поэтому $t_{k+1} < t_k$ для всех $k \in \omega$, что противоречит вполне упорядоченности моноида S. □

Пусть $K \subseteq S$. Через θ_K обозначим наименьшую эквивалентность на S, содержащую множество $\{(a, b) \mid a < b \wedge \neg\exists k \in K(a < k \leq b)\}$.

Лемма 3. *1) Для любого $K \subseteq S$ отношение θ_K является конгруэнцией полигона ${}_SS$.*

2) Для любой конгруэнции θ полигона ${}_SS$ существует единственное подмножество K множества S, содержащее 1 и замкнутое относительно супремумов, такое что $\theta = \theta_K$.

Доказательство. Докажем 1). Пусть $K \subseteq S$. Покажем, что θ_K – конгруэнция полигона ${}_SS$. Пусть $s \in S$, $a\theta_K b$ и $a < b$.

Предположим, что $b \geq k$ для любого $k \in K$. Из определения отношения θ_K следует, что $b > k$ и $a \geq k$ для любого $k \in K$. Тогда $sb \geq sa \geq sk \geq k$ для любого $k \in K$, т.е. не существует $k \in K$ такого, что $sa < k \leq sb$. Следовательно, $sa\theta_K sb$.

Пусть $b < k$ для некоторого $k \in K$ и $k_0 = min\{k \in K \mid b < k\}$. Предположим, что $s < k_0$. Тогда $a \leq sa \leq sb < k_0$. Если $(sa, sb) \notin \theta_K$, то $a \leq sa < k \leq sb < k_0$ для некоторого $k \in K$. По определению k_0 имеем $k \leq b < k_0$, т.е. $a < k \leq b$, то противоречит соотношению $a\theta_K b$. Следовательно, $sa\theta_K sb$. Если $s \geq k_0$, то $sa = sb = s$ и $sa\theta_K sb$.

Докажем 2). Пусть $\theta \in Con({}_SS)$. Заметим, что для любых $a, b, c \in S$ из соотношений $a < b$, $a\theta b$ и $a \leq c \leq b$ следует $ac\theta bc$, т.е. $c\theta b$. Введем обозначение:

$$K = \{c \in S \mid \neg\exists a \in S\ (a < c \wedge a\theta c)\}.$$

Ясно, что $1 \in K$. Покажем, что множество K замкнуто относительно супремумов. Пусть $R \subseteq K$ и $r = \sup R$. Покажем, что $r \in K$. По определению $\sup R$ имеем $r = \min\{s \in S \mid \forall r \in R\ (r \leq s)\}$. Предположим, что $r \notin K$, т.е. $a\theta r$ для некоторого $a \in S$ такого, что $a < r$. Тогда существует $b \in R$ такой, что $a < b \leq r$. Так как $a\theta r$ и $b\theta r$, то $a\theta b$, что противоречит соотношению $b \in K$.

Покажем, что $\theta = \theta_K$. Пусть $a, b \in S$ и $a < b$. Если $a\theta b$ и $a < c \leq b$, то из определения множества K получаем $c \notin K$, следовательно, $a\theta_K b$. Предположим, что $a\theta_K b$ и $(a, b) \notin \theta$. Пусть $c = \min\{d \in S \mid d \leq b \wedge d\theta b\}$. Тогда $a < c \leq b$ и $c \in K$, что противоречит определению конгруэнции θ_K.

Предположим, что $\theta = \theta_{K'}$, где K' – подмножество множества S, содержащее 1 и замкнутое относительно супремумов. Покажем, что $K = K'$. Пусть $k \in K' \setminus K$. Тогда $k \neq 1$ и существует $a \in S$ такой, что $a < k$ и $a\theta k$. Следовательно, $a\theta_{K'} k$, что противоречит определению конгруэнции $\theta_{K'}$. Пусть $k \in K \setminus K'$. Тогда для любого $a \in S$ такого, что $a < k$ имеет место соотношение $(a, k) \notin \theta$. Следовательно, $(1, k) \notin \theta$. Через R обозначим множество $\{c \in K' \mid c < k\}$. Заметим, что $1 \in R$. Тогда в силу замкнутости K' относительно супремумов $r = \sup R \in K'$. Следовательно, $r < k$ и $(r, k) \in \theta_{K'} = \theta_K$, что невозможно. □

Лемма 4. *Пусть $K_1 \subseteq S$, $K_2 \subseteq S$ – подмножества множества S, содержащие 1 и замкнутые относительно супремумов. Тогда*

1) $\theta_{K_1} \subseteq \theta_{K_2} \Longleftrightarrow K_2 \subseteq K_1$;

2) множество $K_1 \cap K_2$ содержит 1, замкнуто относительно супремумов и $\theta_{K_1} \vee \theta_{K_2} = \theta_{K_1 \cap K_2}$;

3) множество $K_1 \cup K_2$ содержит 1, замкнуто относительно супремумов и $\theta_{K_1} \wedge \theta_{K_2} = \theta_{K_1 \cup K_2}$.

Доказательство. Пусть K – подмножество множества S, содержащие 1 и замкнутое относительно супремумов. Из доказательства п.2 леммы 3 следует

$$K = \{c \in S \mid \neg\exists a \in S\ (a < c \wedge a\theta_K c)\}. \qquad (1)$$

Докажем 1). Пусть $\theta_{K_1} \subseteq \theta_{K_2}$ и $c \in K_2$. Тогда по (1) для любого $s \in S$ такого, что $s < c$, выполняется соотношение $(c,s) \notin \theta_{K_2}$. Следовательно, $(c,s) \notin \theta_{K_1}$. Тогда по (1) $c \in K_1$.

Пусть $K_2 \subseteq K_1$, $(a,b) \in \theta_{K_1}$, $a < b$. Тогда не существует $c \in K_2$ такого, что $a < c \leq b$ (иначе $c \in K_1$, то противоречит определению конгруэнции θ_{K_1}). Следовательно, $a\theta_{K_2}b$ по определению конгруэнции θ_{K_2}.

Докажем 2). Очевидно, множество $K_1 \cap K_2$ содержит 1 и замкнуто относительно супремумов. Согласно 1), имеет место включение $\theta_{K_1} \vee \theta_{K_2} \subseteq \theta_{K_1 \cap K_2}$.

Пусть $a < b$ и $(a,b) \in \theta_{K_1 \cap K_2}$. Тогда $b \notin K_1 \cap K_2$. Полагаем $r_0 = b$. Пусть нами построены элементы $r_0, \ldots, r_n \notin K_1 \cap K_2$, $n \in \omega$, такие, что

(a) $r_0 = b$ и $a \leq r_i$ для любого $i \leq n$;

(b) $r_{i+1} < r_i$ для любого $i < n$;

(c) $(r_n, b) \in \theta_{K_1} \vee \theta_{K_2}$.

Для некоторого $i \in \{1,2\}$ имеет место включение $r_n \notin K_i$. Рассмотрим множество $R_n = \{r \in K_i \mid a \leq r < r_n\}$. Если $R_n \neq \emptyset$, то полагаем $r_{n+1} = \sup R_n$. Тогда имеем $r_{n+1} \in R_n$, т.е. $a \leq r_{n+1} < r_n$ и, кроме того, $(r_{n+1}, r_n) \in \theta_{K_i}$, поэтому $(r_{n+1}, b) \in \theta_{K_1} \vee \theta_{K_2}$. Включение $r_{n+1} \in K_1 \cap K_2$ противоречит включению $(a,b) \in \theta_{K_1 \cap K_2}$, поэтому $r_{n+1} \notin K_1 \cap K_2$.

Далее, если для любого $m \in \omega$ множество R_m непусто, то мы построим бесконечную убывающую цепь $a \leq \ldots < r_n < \ldots < r_0$, что невозможно в силу вполне упорядоченности множества S. Таким образом, $R_n = \emptyset$ для некоторого $n \in \omega$. Это означает, что $(a, r_n) \in \theta_{K_i}$, поэтому $(a,b) \in \theta_{K_1} \vee \theta_{K_2}$, что и требовалось установить для проверки включения $\theta_{K_1 \cap K_2} \subseteq \theta_{K_1} \vee \theta_{K_2}$.

Докажем 3). Множество $K_1 \cup K_2$ очевидно содержит 1. Пусть множество $R \subseteq K_1 \cup K_2$ таково, что существует $\sup R$, и пусть $R_1 = R \cap K_1$ и $R_2 = R \cap K_2$. Если $R_1 = \emptyset$ или $R_2 = \emptyset$, то $R = R_2$ или $R = R_1$, следовательно, $\sup R \in K_1 \cup K_2$. Предположим, что $R_1 \neq \emptyset$, $R_2 \neq \emptyset$, $r_1 = \sup R_1$ и $r_2 = \sup R_2$. Можно считать, что $r_1 \geq r_2$. Тогда $r_1 = \sup R \in K_1 \subseteq K_1 \cup K_2$.

По пункту 1) имеет место включение $\theta_{K_1 \cup K_2} \subseteq \theta_{K_1} \cap \theta_{K_2} = \theta_{K_1} \wedge \theta_{K_2}$.

Пусть $(a,b) \in \theta_{K_1} \wedge \theta_{K_2}$ и $a < b$. Тогда $(a,b) \in \theta_{K_1}$ и $(a,b) \in \theta_{K_2}$. Если существует $c \in K_1 \cup K_2$ такой, что $a < c \leq b$, то $c \in K_1$ или $c \in K_2$, что противоречит определению конгруэнций θ_{K_1} и θ_{K_2}. Таким образом, $\theta_{K_1} \wedge \theta_{K_2} \subseteq \theta_{K_1 \cup K_2}$. □

Предложение 1. *Пусть S – вполне упорядоченный моноид. Тогда решетка $Con({}_SS)$ дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in Con({}_SS)$. По лемме 3 существуют K_1, K_2, K_3 – подмножества множества S замкнутые относительно супремумов и содержащие 1 такие, что $\theta_{K_i} = \theta_i$ $(1 \leq i \leq 3)$. По лемме 4

$$(\theta_{K_1} \vee \theta_{K_2}) \wedge \theta_{K_3} = \theta_{K_1 \cap K_2} \wedge \theta_{K_3} = \theta_{(K_1 \cap K_2) \cup K_3} =$$

$$= \theta_{(K_1 \cup K_3) \cap (K_2 \cup K_3)} = \theta_{K_1 \cup K_3} \vee \theta_{K_2 \cup K_3} = (\theta_{K_1} \wedge \theta_{K_3}) \vee (\theta_{K_2} \wedge \theta_{K_3}).$$

Следовательно, решетка $Con({}_SS)$ дистрибутивна. □

Следствие 1. *Пусть S – вполне упорядоченный моноид. Тогда решетка конгруэнций любого циклического полигона дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть ${}_SSa$ – циклический полигон, отображение $\phi : S \to Sa$ задается следующим образом: $\phi(s) = sa$ для любого $s \in S$. Ясно, что ϕ – эпиморфизм. Определим отображение $\alpha : Con({}_SSa) \to Con({}_SS)$ следующим образом: для $\eta \in Con({}_SSa)$ через $\alpha(\eta)$ обозначим множество $\{(u,v) \in S^2 \mid \langle\phi(u),\phi(v)\rangle \in \eta\}$. Ясно, что $\alpha(\eta) \in Con({}_SS)$ и α – инъекция. Тогда $Con({}_SSa)$ дистрибутивна. $\square$

Лемма 5. *Пусть ${}_SA$ – полигон и $Sa \subseteq Sb$ или $Sb \subseteq Sa$ для любых $a,b \in A$. Тогда $A = Sc$ для некоторого $c \in A$.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены, $|A| > 1$. Тогда множество $B = \{s \in S \mid \exists a \in A\ (sa \neq a)\}$ не пусто. Пусть $k = \min B$. Поскольку $k \in B$, то существует $a \in A$ такой, что $ka \neq a$. Тогда $sa \neq a$ для любых $s \geq k$ (иначе $a = sa$, $ka = k(sa) = sa = a$, противоречие). Покажем, что $A = Sa$. Пусть $b \in A$ и $Sa \subseteq Sb$. Тогда $a = tb$ для некоторого $t \in S$ и $a = ttb = ta$. Следовательно, $t < k$. Из определения k следует $tb = b$, т.е. $a = b$. $\square$

Теорема 2. *Пусть S – вполне упорядоченный моноид. Решетка конгруэнций $Con({}_SA)$ полигона ${}_SA$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда*

1) полигон ${}_SA$ содержит не более двух компонент связности;

2) если $a_1, a_2 \in A$, $s \in S$, $s \neq 1$ и $Sa_1 \cap Sa_2 = Ssa_1 \cap Ssa_2$, то $sa_1 = ra_1$ или $sa_2 = ra_2$ для некоторого $r \in S$, $r < s$.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть решетка $Con({}_SA)$ дистрибутивна. Из факта 5 следует 1).

Для доказательства условия 2) будем рассуждать от противного. Предположим, что элементы $a_1, a_2 \in A$ и $s \in S$ таковы, что $s \neq 1$, $Sa_1 \cap Sa_2 = Ssa_1 \cap Ssa_2$ и $sa_i \neq ra_i$ для любого $r < s$ и любого $i \in \{1,2\}$. Определим отношения эквивалентности θ_1, θ_2, θ_3 на множестве A следующим образом:

$(u,v) \in \theta_1 \Leftrightarrow u,v \in Ssa_1 \cup Ssa_2$, или $u,v \in (Sa_1 \setminus Ssa_1) \cup (Sa_2 \setminus Ssa_2)$, или $u = v$;

$(u,v) \in \theta_2 \Leftrightarrow u,v \in Sa_1 \cup Ssa_2$, или $u,v \in Sa_2 \setminus Ssa_2$, или $u = v$;;

$(u,v) \in \theta_3 \Leftrightarrow u,v \in Ssa_1 \cup Sa_2$, или $u,v \in Sa_1 \setminus Ssa_1$, или $u = v$.

Отношение θ_1 является конгруэнцией полигона ${}_SA$. Действительно, пусть $u,v \in Sa_1 \cup Sa_2$, $t \in S$. Если $t \geq s$, то $tu = tsu \in Ssa_1 \cup Ssa_2$ и $tv = tsv \in Ssa_1 \cup Ssa_2$, поэтому предполагаем, что $t < s$. Если $u,v \in Ssa_1 \cup Ssa_2$, то $tu, tv \in Ssa_1 \cup Ssa_2$. Пусть $u,v \in (Sa_1 \setminus Ssa_1) \cup (Sa_2 \setminus Ssa_2)$ и $tu \in Ssa_1$. Тогда имеем $tu = stu = su$. Возможны два случая.

Случай 1: $u = la_1 \in Sa_1$. Поскольку $u \notin Ssa_1$, то $l < s$. Тогда $tla_1 = tu = su = sla_1 = sa_1$. В силу неравенства $tl < s$ получаем противоречие с нашим предположением.

Случай 2: $u = la_2 \in Sa_2$. В этом случае имеем $tu \in Ssa_1 \cap Sa_2 = Ssa_1 \cap Ssa_2 \subseteq Ssa_2$. Рассуждая по аналогии со случаем 1, получаем $tla_2 = sa_2$ и $tl < s$, что вновь противоречит нашему предположению.

Полученные противоречия показывают, что $tu \notin Ssa_1$ и, симметричным образом, $tu \notin Ssa_2$. Аналогично устанавливается, что $tv \notin Ssa_1 \cup Ssa_2$. Следовательно, отношение θ_1 является конгруэнцией полигона ${}_SA$. Похожим образом проверяется, что отношения θ_2 и θ_3 также являются конгруэнциями полигона ${}_SA$.

Далее непосредственно можно проверить справедливость следующих утверждений:

$$(u,v) \in \theta_1 \cap \theta_2 \Leftrightarrow (u,v) \in \theta_1 \cap \theta_3 \Leftrightarrow (u,v) \in \theta_2 \cap \theta_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u,v \in Ssa_1 \cup Ssa_2 \text{ или } u,v \in Sa_1 \setminus Ssa_1, \text{ или } u,v \in Sa_2 \setminus Ssa_2, \text{ или } u=v;$$
$$\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \vee \theta_3 = \theta_2 \vee \theta_3 = \rho(Sa_1 \cup Sa_2).$$

В силу дистрибутивности решетки $Con({}_SA)$ и факта 4 получаем равенство $\theta_2 = \theta_3$. Вновь возможны два случая.
Случай 1: $Sa_1 \setminus Ssa_1 = Sa_2 \setminus Ssa_2$. В этом случае имеем $Sa_1 = Ssa_1$ и $Sa_2 = Ssa_2$; в частности, $a_1 = sa_1$ и $a_2 = sa_2$, что противоречит нашему предположению.
Случай 2: $Sa_1 \setminus Ssa_1 = Sa_1 \cup Ssa_2$. В этом случае имеем $Ssa_2 \subseteq (Sa_1 \setminus Ssa_1) \cap Sa_2 = (Sa_1 \setminus Ssa_1) \cap Sa_1 \cap Sa_2 \subseteq (Sa_1 \setminus Ssa_1) \cap Sa_1 = \emptyset$, что невозможно.
Полученные противоречия показывают, что наше предположение, сделанное в начале доказательства, неверно, и условие 2) выполняется.

Достаточность. Докажем предварительно несколько утверждений.

Лемма 6. *Пусть выполняется условие 2) теоремы 2 и пусть a, $b \in A$ и $\theta \in Con({}_SA)$ таковы, что $Sa \cap Sb \neq \emptyset$ и $a\theta b$. Тогда существует элемент $u \in Sa \cap Sb$ с условием $b\theta u$.*

Доказательство. Если $b \in Sa$, то в качестве u можно взять b. Предположим теперь, что $b \notin Sa$. Полагаем

$$m = \min\{r \in S \mid rb = ra\}.$$

Тогда, очевидно, $1 < m$. Предположим, что $(mb, b) \notin \theta$. Тогда $(mb, a) \notin \theta$. Полагаем

$$k_1 = \min\{r \in S \mid (rb, a) \notin \theta\}; \quad k_2 = \min\{r \in S \mid (rb, b) \notin \theta\}.$$

Если $k_2 < k_1$, то из определения k_1 получаем $b\theta a\theta k_2 b$, что противоречит определению k_2. Если $k_1 < k_2$, то из определения k_2 получаем $a\theta b\theta k_1 b$, что противоречит определению k_1. Поэтому $k_1 = k_2 = k$ и $1 < k \leq m$. Пусть $x \in Sa \cap Sb$, тогда $x = sa = sb$ для некоторого $s \in S$. Это означает, что $sb \in Sa$, то есть $k \leq m \leq s$ и $kx = x$, поэтому $x \in Ska \cap Skb$, таким образом, $Sa \cap Sb = Ska \cap Skb$. По условию 2) теоремы имеет место один из следующих случаев.

Случай 1: $la = ka$ для некоторого $l < k$. В этом случае из условия $a\theta b$ получаем $kb\theta ka = la\theta lb\theta b$, что противоречит определению k_2 и равенству $k_2 = k$.

Случай 2: $lb = kb$ для некоторого $l < k$. В этом случае $(lb, b) = (kb, b) \notin \theta$, что противоречит минимальности k_2 и равенству $k_2 = k$.

Полученные противоречия показывают, что $b\theta mb$. □

Лемма 7. *Пусть выполняется условие 2) теоремы 2 и пусть a, b, $c \in A$ и θ, $\xi \in Con({}_SA)$ таковы, что $Sa \cap Sb \neq \emptyset$, $Sb \cap Sc \neq \emptyset$ и $a\theta b\xi c$. Тогда существует элемент $u \in Sb \cap (Sa \cup Sc)$ с условием $a\theta u\xi c$.*

Доказательство. Согласно лемме 6, существуют элементы $m, n \in S$ такие что, $mb \in Sa$, $nb \in Sc$, $mb\theta b$ и $nb\xi b$. Если $m \leq n$, то $mb(\theta \cap \xi)b$, и поэтому в качестве u можно взять элемент mb. Если $n \leq m$, то $nb(\theta \cap \xi)b$, и поэтому в качестве u можно взять элемент nb. □

Предположим, что условия 1)–2) теоремы выполняются.

Рассмотрим сначала случай, когда ${}_SA$ является связным полигоном. В этом случае нетрудно видеть, что $Sa \cap Sb \neq \emptyset$ для любых a, $b \in A$. Согласно лемме

2, существует множество $\{a_i \in A \mid i \in I\}$, такое что $A = \bigcup_{i\in I} Sa_i$ и $a_i \notin Sa_j$ для любых различных i, $j \in I$. Для произвольной конгруэнции $\theta \in Con({}_SA)$ и произвольного $i \in I$ через θ_i обозначим отношение $\theta_i = \theta|_{Sa_i} \cup 0_A \in Con({}_SA)$. Имеет место равенство

$$\theta = \bigvee_{i\in I} \theta_i.$$

Действительно, пусть $i, j \in I$ таковы, что $b \in Sa_i$, $c \in Sa_j$ и $b\theta c$. Согласно лемме 6, найдется $u \in Sb \cap Sc \subseteq Sa_i \cap Sa_j$ такой, что $b\theta u\theta c$, т.е. $b\theta_i u\theta_j c$; следовательно, $(b, c) \in \theta_i \circ \theta_j \subseteq \bigvee_{i\in I} \theta_i$.

Для произвольных θ', $\theta'' \in Con({}_SA)$ и любого $i \in I$, очевидно, имеет место равенство

$$(\theta' \wedge \theta'')_i = \theta'_i \wedge \theta''_i.$$

Кроме того,

$$\bigvee_{i\in I} \theta'_i \wedge \bigvee_{i\in I} \theta''_i = \theta' \wedge \theta'' = \bigvee_{i\in I} (\theta'_i \wedge \theta''_i).$$

Покажем, что

$$(\theta' \vee \theta'')_i = \theta'_i \vee \theta''_i.$$

Для проверки этого равенства достаточно установить включение $(\theta' \vee \theta'')_i \subseteq \theta'_i \vee \theta''_i$. Действительно, пусть $(d_0, d_1) \in (\theta' \vee \theta'')_i$ и пусть n обозначает наименьшее натуральное число, такое что существуют $b_0, \dots, b_n \in A$ с условием

$$d_0 = b_0\xi_0 b_1\xi_1 b_2 \dots b_{n-1}\xi_{n-1} b_n = d_1,$$

где $\xi_0 \in \{\theta', \theta''\}$ и $\{\xi_k, \xi_{k+1}\} = \{\theta', \theta''\}$ для любого $k < n-1$. Индукцией по n покажем, что $(d_0, d_1) \in \theta'_i \vee \theta''_i$. Действительно, если $n = 1$, то, очевидно, $(d_0, d_1) \in \theta' \cup \theta''$ и поэтому $(d_0, d_1) \in \theta'_i \cup \theta''_i$. Если $n = 2$, то по утверждению 2 существует $b \in Sd_0 \cup Sd_1 \subseteq Sa_i$, такой что $d_0\theta' b\theta'' d_1$ или $d_0\theta'' b\theta' d_1$; следовательно, $(d_0, d_1) \in \theta'_i \vee \theta''_i$. Пусть $n > 2$; возможны три случая.

Случай 1: существуют $c_0, \dots, c_n \in A$ с условием

$$d_0 = c_0\xi_0 c_1\xi_1 c_2 \dots c_{n-1}\xi_{n-1} c_n = d_1,$$

где $c_1 \in Sc_0$. Тогда $c_1 \in Sd_0 \subseteq Sa_i$, поэтому $(d_0, c_1) \in \theta'_i \cup \theta''_i$ и $(c_1, d_1) \in \theta'_i \vee \theta''_i$ по предположению индукции. Следовательно, $(d_0, d_1) \in \theta'_i \vee \theta''_i$.

Случай 2: существуют $c_0, \dots, c_n$, $c \in A$, такие что

$$d_0 = c_0\xi_0 c_1\xi_1 c_2 \dots c_{n-1}\xi_{n-1} c_n = d_1,$$

причем $c_k\xi_k c\xi_{k+1} c_{k+2}$ и $c_{k+1} \in Sc_k \subseteq Sc$ для некоторого $k \in \{1, \dots, n-2\}$. В этом случае $c_k = sc$, $c_{k+1} = rc$ для некоторых $s \le r$ в S. Имеем $rc = c_{k+1}\xi_{k+1} c_{k+2}\xi_{k+1} c$; следовательно, $c_{k-1}\xi_{k-1} c_k = sc\xi_{k+1} src = rc = c_{k+1}\xi_{k+1} c_{k+2}$. Поскольку $\{\xi_{k-1}, \xi_k\} = \{\theta', \theta''\} = \{\xi_k, \xi_{k+1}\}$, имеет место равенство $\xi_{k-1} = \xi_{k+1}$. Таким образом,

$$d_0 = c_0\xi_0 c_1\xi_1 c_2 \dots c_{k-1}\xi_{k-1} c_{k+2}\xi_{k+2} \dots \xi_{n-1} c_n = d_1,$$

что противоречит минимальности n, поэтому этот случай невозможен.

Случай 3: случаи 1 и 2 не имеют места. По лемме 7 существуют элементы $c_0, \dots, c_{n-1} \in A$, такие что

$$d_0 = c_0\xi_0 c_1\xi_1 c_2 \dots c_{n-1}\xi_{n-1} b_n = d_1,$$

причем $c_k \in Sc_{k-1} \cup Sb_{k+1}$ и $c_k\xi_k b_{k+1}$ для любого $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Поскольку случаи 1–2 не имеют места, мы заключаем, что $c_k \in Sb_{k+1}$ для любого $k \in$

$\{1,\dots,n-1\}$. В частности, $c_{n-1} \in Sb_n = Sd_1 \subseteq Sa_i$, то есть $(c_{n-1}, d_1) \in \theta'_i \cup \theta''_i$. По индукционному предположению имеем $(d_0, c_{n-1}) \in \theta'_i \vee \theta''_i$; отсюда $(d_0, d_1) \in \theta'_i \vee \theta''_i$.

Пусть $\theta, \eta, \psi \in Con({}_SA)$. Покажем, что $(\theta \vee \eta) \wedge \psi = (\theta \wedge \psi) \vee (\eta \wedge \psi)$. Из соотношений $(3)-(6)$ и дистрибутивности решетки конгруэнций циклического полигона следует

$$(\theta \vee \eta) \wedge \psi = \bigvee_{i\in I} (\theta \vee \eta)_i \wedge \bigvee_{i\in I} \psi_i = \bigvee_{i\in I} ((\theta \vee \eta)_i \wedge \psi_i) =$$
$$= \bigvee_{i\in I} ((\theta_i \vee \eta_i) \wedge \psi_i) = \bigvee_{i\in I} ((\theta_i \wedge \psi_i) \vee (\eta_i \wedge \psi_i)) = \bigvee_{i\in I} ((\theta \wedge \psi)_i \vee (\eta \wedge \psi)_i) =$$
$$= \bigvee_{i\in I} ((\theta \wedge \psi) \vee (\eta \wedge \psi))_i = (\theta \wedge \psi) \vee (\eta \wedge \psi).$$

Таким образом, решетка конгруэнций связного полигона, удовлетворяющего условиям 1 и 2 теоремы, дистрибутивна.

Пусть ${}_SA$ – несвязный полигон. Тогда по условию 1) теоремы ${}_SA = {}_S B \sqcup {}_S C$, где ${}_SB$ и ${}_SC$ – связные полигоны. Пусть $\theta \in Con({}_SA), b\theta c$, $b \in B$, $c \in C$. Покажем, что $rb\theta c$ для любого $r \in S$. Предположим, что $(rb, c) \notin \theta$ для некоторого $r \in S$ и $t = \min\{l \in S \mid (lb, c) \notin \theta\}$. По условию 2 теоремы $lb = tb$ или $lc = tc$ для некоторого $l < t$. Поскольку $lb\theta lc$, то получили противоречие.

Пусть $B = \bigcup_{i\in I} Sb_i$, $C = \bigcup_{j\in J} Sc_j$, $\theta \in Con({}_SA)$,

$$\epsilon_\theta = \begin{cases} 1, \text{ если } \theta \cap (B \times C) \neq \emptyset; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что $Sb_i \cap Sb_k \neq \emptyset$, $Sc_j \cap Sc_l \neq \emptyset$ для любых $i, k \in I, j, l \in J$. Через θ_B и θ_C обозначим $(\theta \restriction B) \cup 0_A$ и $(\theta \restriction C) \cup 0_A$ соотвественно. Покажем, что конгруэнция θ определяется тройкой $(\theta_B, \theta_C, \epsilon_\theta)$. Если $\epsilon_\theta = 0$, то $\theta = \theta_B \cup \theta_C$. Пусть $\epsilon_\theta = 1$ и $b\theta c$, где $b \in B$, $c \in C$. Тогда, как замечено выше, $rb\theta c$ для любого $r \in S$. Следовательно, $\theta = \theta_B \cup \theta_C \cup (B' \times C')$, где $B' = \{b' \in B \mid b'\theta b\}$, $C' = \{c' \in B \mid c'\theta c\}$.

Для любых $\theta', \theta'' \in Con({}_SA)$ конгруэнция $\theta' \wedge \theta''$ определяется тройкой $(\theta'_B \wedge \theta''_B, \theta'_C \wedge \theta''_C, \min\{\epsilon_{\theta'}, \epsilon_{\theta''}\})$, конгруэнция $\theta' \vee \theta''$ определяется тройкой $(\theta'_B \vee \theta''_B, \theta'_C \vee \theta''_C, \max\{\epsilon_{\theta'}, \epsilon_{\theta''}\})$. Следовательно, для любых $\theta, \eta, \psi \in Con({}_SA)$ конгруэнция $(\theta \vee \eta) \wedge \psi$ определяется тройкой $((\theta_B \vee \eta_B) \wedge \psi_B, (\theta_C \vee \eta_C) \wedge \psi_C, \min\{\max\{\epsilon_\theta, \epsilon_\eta\}, \epsilon_\psi\})$, конгруэнция $(\theta \wedge \psi) \vee (\eta \wedge \psi)$ определяется тройкой $((\theta_B \wedge \psi_B) \vee (\eta_B \wedge \psi_B), (\theta_C \wedge \psi_C) \vee (\eta_C \wedge \psi_C), \max\{\min\{\epsilon_\theta, \epsilon_\psi\}, \min\{\epsilon_\eta, \epsilon_\psi\}\})$. Так как ${}_SB$ и ${}_SC$ – связные полигоны, то по доказанному выше $(\theta_B \vee \eta_B) \wedge \psi_B = (\theta_B \wedge \psi_B) \vee (\eta_B \wedge \psi_B)$, $(\theta_C \vee \eta_C) \wedge \psi_C = (\theta_C \wedge \psi_C) \vee (\eta_C \wedge \psi_C)$. Кроме того, $\min\{\max\{\epsilon_\theta, \epsilon_\eta\}, \epsilon_\psi\} = \max\{\min\{\epsilon_\theta, \epsilon_\psi\}, \min\{\epsilon_\eta, \epsilon_\psi\}\}$. Таким образом, $(\theta \vee \eta) \wedge \psi = (\theta \wedge \psi) \vee (\eta \wedge \psi)$. □

References

[1] D.P. Egorova, *The stucture of the congruence of the unary algebra*, Mejvuzovkii nauchnii sbornik, **5** 1978, 11–44. Zbl 0402.08004

[2] D.O. Ptahov, A.A. Stepanova, *The lattices of congruence of connected acts*, Far Eastern Mathematical Journal, **13**:1 2013, 107–116. Zbl 1301.08010

[3] A.R. Haliullina, *The lattices of S-acts over groups*, The materials of the 20-th all-Russian interuniversity scientific and technological conference of students and graduate students «Microelectronics and Informatics – 2013», Moscow, 2013, 148.

[4] M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev, *Monoids, Acts, and Categories*, Berlin: Walter de Gruyter, 2000. Zbl 0945.20036
[5] L.A. Skornyakov, *Elements of abstract algebra*, Moscow: Nauka, 1983. (Russian) Zbl 0528.00001

A. A. Stepanova
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
Vladivostok, 690920, Russia
E-mail address: stepltd@mail.ru

M. S. Kazak
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
Vladivostok, 690920, Russia
E-mail address: kazak_ms@yahoo.com