S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1171–1195 (2019) УДК 517.54

DOI 10.33048/semi.2019.16.080 MSC 30C35

КРИТЕРИЙ ИСЧЕЗНОВЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ РЕАЛЬНОЙ ЧАСТИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОЛОС

А.И. ПАРФЁНОВ

Abstract. Since 1976 it is known that the oscillation of the real part of a conformal mapping of strip domains asymptotically vanishes if and only if the respective extremal length is approximately additive. We show that these properties are equivalent to an explicit geometric condition of Ostrowski type introduced by Rodin and Warschawski in 1980. We also consider other equivalent conditions and deduce several known criteria from the main result.

Keywords: asymptotics, conformal mapping, isogonality condition of Ostrowski, L-strip, strip domain, vanishing oscillation.

Введение

Пусть $\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n > \omega(x')\}$ — надграфик финитной липшицевой функции $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ для целого $n \geqslant 2$, а Δ — оператор Лапласа. Нетрудно проверить (см. теорему 3 в [14]) существование и единственность решения $U_\omega \in C^\infty(\Omega) \cap C\big(\overline{\Omega}\big)$ задачи

$$\begin{cases} \Delta U_\omega = 0 & \text{в } \Omega, \\ U_\omega = 0 & \text{на } \partial\Omega, \\ U_\omega(x) = x_n + o(|x|) & \text{при } \Omega \ni x \to \infty. \end{cases}$$

В работах [14, 15, 16] автор получил ряд результатов о функции U_ω, в которых область Ω рассматривается как возмущение верхнего полупространства (пертурбативный подход). В [14] и [15] выписаны приближенные формулы для

Parfenov, A.I., Criterion for the vanishing of the oscillation of the real part of a conformal mapping of strips.

Работа поддержана Советом по грантам Президента Российской Федерации (грант НШ-5913.2018.1).

Поступила 10 июня 2019 г., опубликована 26 августа 2019 г.

U_ω первого и высокого порядков, оценки погрешности которых содержат соответственно степени $\|\omega\|^2_{b_2^{1/2}}$ и $\|\omega\|^N_{b_N^{1-1/N}}$ полунорм возмущения ω в пространствах Слободецкого. В [16] намечен вывод сходной приближенной формулы первого порядка для градиента $\nabla \ln U_\omega = \nabla U_\omega / U_\omega$.

При $n = 2$ функция U_ω является мнимой частью некоторого конформного отображения области Ω на верхнюю полуплоскость. Ряд вопросов асимптотики конформных отображений можно изучать с помощью конформного инварианта, который определяют как экстремальную длину семейства кривых, конформный модуль четырехсторонника или емкость конденсатора. Указанные обстоятельства побудили автора применить пертурбативный подход к емкости конденсатора. В работе [17] получена приближенная формула для емкости цилиндрического липшицева конденсатора над открытым множеством евклидова пространства и более явная формула в терминах весового пространства Слободецкого для конденсатора над внутренней равномерной областью.

В процессе применения результатов из [17] к асимптотике конформных отображений полос обнаружился факт, который можно доказать без привлечения конформного инварианта и который не связан с пертурбативным подходом и пространствами Слободецкого. Это равносильность свойства (VO) асимптотического исчезновения колебания реальной части отображения на вертикальных поперечных разрезах явному геометрическому условию $\Omega \in VO_\vartheta$ на полосу из работы [22]. Доказательство удобно представить цепочкой эквивалентных условий. Кроме того, работы [20] и [22] содержат еще несколько условий, равносильных условиям (VO) и $\Omega \in VO_\vartheta$ соответственно. Мы сочли целесообразным дать близкое к замкнутому доказательство равносильности сразу восьми условий, уделив известным рассуждениям несколько страниц. Получающаяся теорема — главный результат статьи.

Статья состоит из четырех параграфов. В § 1 приведены предварительные сведения: определения и восемь лемм. В § 2 доказана основная теорема о равносильности свойства (VO), двух свойств с участием конформного инварианта, четырех асимптотических свойств конформного отображения по отношению к угловой сходимости и условия $\Omega \in VO_\vartheta$. В § 3 основная теорема и дополнение к ней сопоставляются с литературой, в том числе посредством вывода из них четырех критериев работ [5, 12, 20, 22]. Короткий § 4 содержит комментарии к доказательству основной теоремы.

1. Предварительные сведения

Приведем ряд определений, нужных для формулировки и доказательства последующих восьми лемм.

Определение 1. *Открытая жорданова дуга с параметризацией*

$$\gamma : (a, b) \to \Omega$$

называется поперечным разрезом области $\Omega \subset \mathbb{C}$, если существуют конечные или бесконечные пределы $\gamma(a+) \notin \Omega$ и $\gamma(b-) \notin \Omega$.

Экстремальная длина семейства Γ локально спрямляемых кривых на плоскости $\mathbb{C}$ — это величина

$$\lambda(\Gamma) = \sup \left\{ \inf_{\gamma\in\Gamma} \left(\int_\gamma \rho\, |dz| \right)^2 : \text{функция } \rho \geqslant 0 \text{ борелева и } \int_{\mathbb{C}} \rho^2\, dx\, dy \leqslant 1 \right\}.$$

Промежутком назовем бесконечное связное множество в $\mathbb{R}$.

Пусть даны промежутки Ξ *и* X, *односвязная область* $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, *жорданова кривая* $\vartheta : \Xi \to \mathbb{C}$ *и непрерывная функция* $\Theta : X \to \mathbb{R}$.

Пишем $\Omega \in D_\vartheta$, *если* $\vartheta(\xi) \in \Omega$ *для всех* $\xi \in \Xi$.

Пишем $\Omega \in D_\vartheta^\infty$, *если* $\Omega \in D_\vartheta$, $\sup \Xi = +\infty$ *и* $\lim_{\xi\to+\infty} \vartheta(\xi) = \infty$. *Тогда кривая* ϑ, *пробегаемая в направлении* $\xi \to +\infty$, *определяет бесконечную достижимую граничную точку* $\operatorname{acc}\vartheta$ *области* Ω.

Введем жорданову кривую $\operatorname{gr}\Theta : x \mapsto x + i\Theta(x)$, $x \in X$.

Для $\Omega \in D_{\operatorname{gr}\Theta}$ *и* $x \in X$ *зададим множества*

$$\begin{gathered}\partial_0(\Omega,\Theta) = \{z \in \partial\Omega\colon\ \operatorname{Re} z \in X\ \&\ \operatorname{Im} z < \Theta(\operatorname{Re} z)\},\\ \partial_1(\Omega,\Theta) = \{z \in \partial\Omega\colon\ \operatorname{Re} z \in X\ \&\ \operatorname{Im} z > \Theta(\operatorname{Re} z)\},\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\vartheta_x \ \text{— содержащая точку } x + i\Theta(x) \text{ компонента}\\ \text{связности множества } \{z \in \Omega\colon\ \operatorname{Re} z = x\}.\end{gathered} \tag{2}$$

Левой и правой компонентами множества $\Omega\setminus\vartheta_x$ *называем компоненты связности этого множества, примыкающие к* ϑ_x *соответственно слева и справа.*

При $\Omega \in D^\infty_{\operatorname{gr}\Theta}$ *обозначим* $\operatorname{acc}\Theta = \operatorname{acc}\operatorname{gr}\Theta$.

Пишем $\Omega \in E^\infty_{\vartheta,\Theta}$, *если* $\Omega \in D_\vartheta^\infty \cap D^\infty_{\operatorname{gr}\Theta}$, $\operatorname{acc}\vartheta = \operatorname{acc}\Theta$ *и каждое из множеств* (1) *содержит точки со сколь угодно большой реальной частью.*

Пишем $\Omega \in E_\vartheta^\infty$, *если* $\Omega \in E^\infty_{\vartheta,\Theta}$ *для некоторого* Θ.

Для $\Omega \in D_\vartheta^\infty$ *говорим, что* $f \in F(\Omega,\vartheta)$, *если* f *— конформное отображение области* Ω *на полосу* $\Psi = \{0 < \operatorname{Im} w < 1\}$ *со свойством*

$$\lim_{\xi\to+\infty} \operatorname{Re} f(\vartheta(\xi)) = +\infty.$$

Прокомментируем данные определения.

В статье не проводится различия между параметризованными кривыми, их классами эквивалентности и соответствующими точечными множествами, в особенности для жордановых кривых — кривых без самопересечений. В статье считается известным определение достижимой граничной точки из § II.3 в [3].

Элементарные свойства экстремальной длины можно найти в гл. 4 из [1] или § 9.2 из [18]. Интеграл $\int_\gamma \rho\,|dz|$ вычисляется, например, через исчерпание γ спрямляемыми подпутями и параметризацию их длиной дуги [24].

Граница $\partial\Omega$ в (1) и далее берется в $\mathbb{C}$, а не на сфере Римана.

Хорошо известно, что поперечный разрез разбивает односвязную область на две односвязные области (предложение 2.12 в [18]). По теореме Шёнфлиса точки разреза — достижимые граничные точки каждой из этих областей.

Очевидно, что множество ϑ_x — поперечный разрез области Ω, поэтому множество $\Omega \setminus \vartheta_x$ является объединением своих левой и правой компонент.

Если $\Omega \in E^\infty_{\vartheta,\Theta_1} \cap E^\infty_{\vartheta,\Theta_2}$, то ввиду $\operatorname{acc}\Theta_1 = \operatorname{acc}\vartheta = \operatorname{acc}\Theta_2$ область Ω для достаточно больших x содержит отрезок, соединяющий точки $x + i\Theta_1(x)$ и $x + i\Theta_2(x)$. Тогда для $\Theta = \Theta_1$ и для $\Theta = \Theta_2$ определение (2) доставляет один и тот же разрез ϑ_x. Значит, при $\Omega \in E_\vartheta^\infty$ разрез ϑ_x для всех достаточно больших x не зависит от выбора функции Θ.

Для обсуждения множества $F(\Omega,\vartheta)$ и дальнейших ссылок сформулируем несколько следствий теоремы II.3.1 в [3]. Пусть f — конформное отображение односвязной области $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ на единичный круг $\mathbb{D}$, а для непрерывной кривой

$\gamma:(a,b)\to\Omega$ существует конечный или бесконечный предел $\gamma(b-)\notin\Omega$. Редуцируя при необходимости случай неограниченной области Ω к случаю ограниченной аналогично § II.2 в [3], из пункта 1° доказательства указанной теоремы получаем, что

$$\text{существует предел } (f\circ\gamma)(b-)\in\partial\mathbb{D}. \tag{3}$$

В частности,

$$\text{если } \Omega\in D_\vartheta^\infty, \text{ то существует предел } \lim_{\xi\to+\infty} f(\vartheta(\xi))\in\partial\mathbb{D}; \tag{4}$$

$$\text{если } \gamma \text{ — поперечный разрез } \Omega, \text{ то } f\circ\gamma \text{ — поперечный разрез } \mathbb{D}. \tag{5}$$

Пункты 2° и 3° упомянутого доказательства утверждают, что

$$\begin{array}{l}\text{для различных кривых } \gamma \text{ пределы } (f\circ\gamma)(b-) \text{ равны}\\ \text{тогда и только тогда, когда этим кривым отвечает}\\ \text{одна и та же достижимая граничная точка области } \Omega.\end{array} \tag{6}$$

Конформные замены позволяют вывести из утверждений (3)–(6) их аналоги для ограниченных жордановых областей, полос и полуполос вместо $\mathbb{D}$.

Для любого конформного отображения $f:\Omega\to\Psi$, где $\Omega\in D_\vartheta^\infty$, в силу (4) существует предел $\lim_{\xi\to+\infty} f(\vartheta(\xi))\in\partial\Psi\cup\{-\infty,+\infty\}$. Композиция f с общим конформным автоморфизмом полосы Ψ показывает, что множество $F(\Omega,\vartheta)$ непусто и параметризуется двумя вещественными числами.

Докажем теперь восемь лемм, подготавливающих теоремы 1 и 2 из § 2.

Лемма 1. *Пусть для $A\in[3/2,\infty)$ в прямоугольнике*

$$Q_A=\{z\in\mathbb{C}\colon -A<\operatorname{Re} z<A\ \&\ 0<\operatorname{Im} z<1\} \tag{7}$$

задана гармоническая функция v с $0\leqslant v\leqslant 1$, непрерывная в замыкании $\overline{Q_A}$, причем при любом $a\in(-A,A)$

$$v(a)\leqslant V\leqslant 1 \quad \& \quad v(a+i)\geqslant 1-V.$$

Тогда для $z\in Q_A$ с $|\operatorname{Re} z|-A\leqslant -3/2$ имеем оценки частных производных

$$\left|\frac{\partial v(z)}{\partial(\operatorname{Re} z)}\right|\leqslant 100e^{(|\operatorname{Re} z|-A)\pi}+\frac{2V/\pi}{\min\{\operatorname{Im} z,1-\operatorname{Im} z\}}, \tag{8a}$$

$$\left|\frac{\partial v(z)}{\partial(\operatorname{Im} z)}-1+V\right|\leqslant 100e^{(|\operatorname{Re} z|-A)\pi}+\frac{2V/\pi}{\min\{\operatorname{Im} z,1-\operatorname{Im} z\}}. \tag{8b}$$

Эта лемма и ее доказательство подсказаны леммой IV.5.1 из [1].

Доказательство. Введем гармонические в Q_A функции

$$\begin{aligned} w(\zeta)&=v(\zeta)-(1-V)\operatorname{Im}\zeta-V/2,\\ \omega_0(\zeta)&=\frac{2}{\pi}\arg\frac{e^{(A+\zeta)\pi}-1}{e^{(A+\zeta)\pi}+1},\\ \omega_1(\zeta)&=\frac{2}{\pi}\arg\frac{e^{(A-\zeta)\pi}+1}{e^{(A-\zeta)\pi}-1} \quad (|\arg Z|<\pi/2 \text{ при } \operatorname{Re} Z>0).\end{aligned}$$

Очевидно, что на множестве $\partial Q_A\setminus\{\pm A,\pm A+i\}$ они связаны неравенствами

$$-\omega_0-\omega_1-V/2\leqslant w\leqslant\omega_0+\omega_1+V/2.$$

По принципу максимума Линделёфа (см., например, с. 2 или с. 102 в [1]) эти оценки выполняются и в Q_A. Отсюда для $r = \min\{\operatorname{Im} z, 1 - \operatorname{Im} z\}$

$$\max\left\{\left|\frac{\partial w(z)}{\partial(\operatorname{Re} z)}\right|, \left|\frac{\partial w(z)}{\partial(\operatorname{Im} z)}\right|\right\} \leqslant \frac{4}{\pi r} \sup_{|\zeta - z| < r} |w(\zeta)|$$
$$\leqslant \frac{4}{\pi r}\left\{\sup_{|\zeta-z|<r} \omega_0(\zeta) + \sup_{|\zeta-z|<r} \omega_1(\zeta) + \frac{V}{2}\right\}.$$

Элементарная тригонометрия показывает, что

$$\arg \frac{e^{(A+\zeta)\pi} - 1}{e^{(A+\zeta)\pi}} = \operatorname{arctg} \frac{\sin(\pi \operatorname{Im}\zeta)}{e^{(A+\operatorname{Re}\zeta)\pi} - \cos(\pi \operatorname{Im}\zeta)},$$
$$\arg \frac{e^{(A+\zeta)\pi}}{e^{(A+\zeta)\pi} + 1} = \operatorname{arctg} \frac{\sin(\pi \operatorname{Im}\zeta)}{e^{(A+\operatorname{Re}\zeta)\pi} + \cos(\pi \operatorname{Im}\zeta)}.$$

При $|\zeta - z| < r$ по оценкам $\operatorname{arctg} x < x$ и $\sin x < x$ $(\forall x > 0)$ имеем

$$\omega_0(\zeta) < \frac{4}{\pi} \frac{e^{(A+\operatorname{Re}\zeta)\pi} \sin(\pi \operatorname{Im}\zeta)}{e^{2(A+\operatorname{Re}\zeta)\pi} - 1}$$
$$< \frac{101}{25\pi} e^{-(A+\operatorname{Re}\zeta)\pi} \pi \min\{\operatorname{Im}\zeta, 1 - \operatorname{Im}\zeta\}$$
$$< \frac{101 e^{\pi/2}}{25} e^{-(A+\operatorname{Re} z)\pi} 2r < \frac{25\pi}{2} e^{(-\operatorname{Re} z - A)\pi} r.$$

Аналогично проверяется, что $\omega_1(\zeta) < \frac{25\pi}{2} e^{(\operatorname{Re} z - A)\pi} r$. Сопоставляя выведенные соотношения, получаем оценки (8). □

Лемма 2. *Для $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta,\Theta}$ пусть Ω_+ — правая компонента множества $\Omega \setminus \vartheta_a$ ($a \in \operatorname{dom}\Theta$). Тогда существует единственное конформное отображение*

(9a) $$f_+ : \Omega_+ \to \Psi_+ = \{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} w > 0 \ \&\ 0 < \operatorname{Im} w < 1\},$$

(9b) $$f_+(\vartheta_a) = \{iv \colon 0 < v < 1\},$$

(9c) $$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Re} f_+(x + i\Theta(x)) = +\infty.$$

Для любого отображения $f \in F(\Omega, \vartheta)$ существует предел

(10) $$\lim_{z\in\vartheta_x\colon x\to+\infty} \{f(z) - f_+(z)\} \in \mathbb{R}.$$

В (9b) подразумевается, что отображение f_+ допускает продолжение по непрерывности на множество $\vartheta_a \cup \Omega_+$.

Значение $f_+(z)$ в (10) имеет смысл, так как $\vartheta_x \subset \Omega_+$ при $x > a$.

Доказательство. Возьмем любое конформное отображение

$$f : \Omega_+ \to \mathbb{D} = \{|\zeta| < 1\}.$$

По теореме II.3.4′ в [3] оно продолжается до гомеоморфизма множества $\vartheta_a \cup \Omega_+$ на множество $\alpha \cup \mathbb{D}$ для некоторой открытой дуги $\alpha \subset \partial\mathbb{D}$. Нижний и верхний края разреза ϑ_a очевидным образом определяют достижимые граничные точки области Ω_+, которые f_+ переводит в смысле утверждения (6) в концы дуги α. Ввиду $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta,\Theta}$ эти граничные точки не равны друг другу и точке $\operatorname{acc}\Theta\big|_{x>a}$. По (4) и (6) замыкание дуги α не содержит точки $c = \lim_{x\to+\infty} f(x + i\Theta(x))$. Составляя композицию f с единственным конформным отображением $\mathbb{D} \to \Psi_+$, переводящим α на $\{iv\colon 0 < v < 1\}$ и c в точку $w = +\infty$, получаем утверждение леммы о существовании и единственности f_+.

Рассмотрим любые последовательности $a < x_1 < x_2 < \dots < x_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$ и $z_k \in \vartheta_{x_k}$. Легко построить непрерывную функцию θ со свойствами

$$\Omega_+ \in D^\infty_{\operatorname{gr}\theta} \quad \& \quad \operatorname{acc}\theta = \operatorname{acc}\Theta\big|_{x>a} \quad \& \quad \theta(x_k) = \operatorname{Im} z_k.$$

В силу (6) и (9c) предел $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Re} f_+(x + i\theta(x))$ равен $+\infty$. На основании произвольности последовательностей (x_k) и (z_k) имеем

$$\lim_{z\in\vartheta_x\colon x\to+\infty} \operatorname{Re} f_+(z) = +\infty. \tag{11}$$

Возьмем любое $f \in F(\Omega, \vartheta)$. Множество $f(\vartheta_a)$ по (5) является поперечным разрезом полосы Ψ. Как выше, включение $\Omega \in E^\infty_{\vartheta,\Theta}$ дает, что этот разрез не оканчивается в точке $w = +\infty$. Из аналога (11) для отображения f

$$(\exists b > a) \qquad \inf_{w\in f(\vartheta_b)} \operatorname{Re} w > \sup_{w\in f(\vartheta_a)} \operatorname{Re} w.$$

Тогда разрез $f(\vartheta_b)$ соединяет нижний и верхний края полосы Ψ. Это же верно для разреза $f_+(\vartheta_b)$ полуполосы Ψ_+.

Возьмем точку $w \in \Psi_+$ такую, что

$$A = \operatorname{Re} w - \sup_{\vartheta_b} \operatorname{Re} f_+ > 3/2.$$

В прямоугольнике Q_A из (7) определена функция $v = \operatorname{Im} f(f_+^{-1}(\cdot + \operatorname{Re} w))$. Она удовлетворяет условиям леммы 1 для $V = 0$. Неравенства (8) при $z = i\operatorname{Im} w$ и условия Коши–Римана показывают, что частные производные по $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$ реальной и мнимой частей отображения

$$W(w) = f(f_+^{-1}(w)) - w$$

по модулю не превосходят $100e^{-A\pi}$. По признаку сходимости Коши существует предел $W(+\infty) \in \mathbb{C}$. При этом $W(u + i0) \in \mathbb{R}$ для больших $u > 0$, так что $W(+\infty) \in \mathbb{R}$. Делая здесь замену $w = f_+(z)$, с учетом (11) получаем (10). $\square$

Лемма 3. *Обозначим через Ψ_C ограниченную компоненту множества $\Psi_+\backslash C$, где Ψ_+ — полуполоса из* (9a)*, а C — ее поперечный разрез, соединяющий точки u_0 и $u_1 + i$ $(u_0, u_1 > 0)$. Тогда существуют единственные число $0 < A < \infty$ и конформное отображение B со свойствами*

$$B : R_A = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < \operatorname{Re} z < A \;\&\; 0 < \operatorname{Im} z < 1\} \to \Psi_C, \tag{12a}$$

$$B(\{iy\colon 0 < y < 1\}) = \{iv\colon 0 < v < 1\}, \tag{12b}$$

$$B(\{A + iy\colon 0 < y < 1\}) = C. \tag{12c}$$

Если $z \in R_A$ и $D = \operatorname{Re} B(z) - \inf_{w\in C} \operatorname{Re} w \leqslant -7/2$, то

$$\operatorname{Re} z - A \leqslant D + 2 \leqslant -3/2. \tag{13}$$

Если же $z_1, z_2 \in R_A$ и $E(z_1, z_2) = \max\{\operatorname{Re} z_1 - A, \operatorname{Re} z_2 - A\} \leqslant -3/2$, то

$$|\operatorname{Re} B(z_1) - \operatorname{Re} B(z_2) - \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2| \leqslant e(z_1, z_2), \tag{14}$$

где

$$e(z_1, z_2) = 100e^{E(z_1,z_2)\pi}\big(\min\{1/\pi, |\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2|\} + |\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2|\big).$$

Доказательство. Области R_A и Ψ_C жордановы, поэтому искомое отображение B продолжается до гомеоморфизма замыканий этих областей по теореме Каратеодори. Пара условий (12b) и (12c) равносильна четверке условий $B(i) = i$, $B(0) = 0$, $B(A) = u_0$ и $B(A+i) = u_1+i$. Первый абзац на с. 431 в [4] утверждает существование единственного A и некоторого B со свойствами (12). При этом единственность отображения B тривиальна.

Пусть $z_1, z_2 \in R_A$ и $E(z_1, z_2) \leqslant -3/2$. В силу (12b) принцип симметрии Шварца позволяет аналитически продолжить B в прямоугольник Q_A из (7), причем продолжение $\mathcal{B}$ непрерывно в $\overline{Q_A}$ по теореме Каратеодори. Отсюда по (12) функция $v = \operatorname{Im} \mathcal{B}$ удовлетворяет условиям леммы 1 с $V = 0$. Теперь (14) получается интегрированием оценок (8) с учетом условий Коши–Римана.

Наконец, пусть $z \in R_A$ и $D \leqslant -7/2$. Тройка

$$A^* = \inf_{w \in C} \operatorname{Re} w \quad \& \quad B^* = B^{-1}\big|_{R_{A^*}} \quad \& \quad C^* = B^{-1}(\{A^* + iy \colon 0 < y < 1\})$$

удовлетворяет условиям настоящей леммы. Применяя (14) к точкам $z_1 = B(z)$ и $z_2 = z_1 - D - 3/2$, имеем

$$|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} B^*(z_2) - D - 3/2| \leqslant 100 e^{-3\pi/2}/\pi < 1/2,$$
$$\operatorname{Re} z - A < \operatorname{Re} z - \operatorname{Re} B^*(z_2) < D + 3/2 + 1/2 = D + 2 \leqslant -3/2.$$

Оценки (13) и лемма 3 доказаны. □

Лемма 4. *Пусть* $0 < A < \infty$, β *— поперечный разрез прямоугольника* R_A *из* (12a), *соединяющий точки* x_0 *и* $x_1 + i$ *(*$0 < x_j < A$*), а* S_0 *и* S_1 *— компоненты множества* $R_A \setminus \beta$, *примыкающие к открытым левой и правой сторонам* R_A *соответственно. Пусть* Γ_0 *и* Γ_1 *— семейства всех локально спрямляемых кривых в* S_0 *и* S_1, *соединяющих эти стороны с* β. *Если* $0 < \varepsilon < 1/18$ *и*

$$A - \lambda(\Gamma_0) - \lambda(\Gamma_1) \leqslant \varepsilon,$$

то $\sup_{z_1, z_2 \in \beta} |\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2| \leqslant \alpha_0 \sqrt{\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}}$ *с абсолютной постоянной* $\alpha_0 > 0$.

Доказательство. Лемма отличается двумя уточнениями от леммы 3 из [20] и доказывается так же. Во-первых, мы изменили формулировку, запретив концам разреза β попадать в углы прямоугольника R_A. Во-вторых, применена теорема Тейхмюллера о модуле [18, предложение 9.5] с оптимальной оценкой погрешности $O\Big(\sqrt{\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}}\Big)$.

Аналогичные рассуждения можно найти в [1, с. 183] и [18, с. 258]. □

Лемма 5. *При* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *выполнены неравенства*

$$3\frac{x + 2x^2}{1 + x + x^2} \leqslant \Lambda(x) = \begin{cases} 2\sqrt{3}x & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/\sqrt{3}, \\ 5 + 2\sqrt{3} - \frac{8+4\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} & \text{при} \quad 1/\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{15}$$

$$\Lambda(x) \leqslant (12/\pi) \operatorname{arctg} x. \tag{16}$$

Доказательство. Оценка (15) на отрезке $[0, 1/\sqrt{3}]$ довольно элементарна, а на $[1/\sqrt{3}, 1]$ равносильна тому, что $(x-1)^2\big((2\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3} - 2\big) \geqslant 0$.

Неравенство (16) обращается в равенство при $x \in \{0, 1/\sqrt{3}, 1\}$. Поэтому (16) на отрезке $[0, 1/\sqrt{3}]$ следует из вогнутости арктангенса, а на $(1/\sqrt{3}, 1]$ — из соотношений

$$\Lambda''(x) = -\frac{16+8\sqrt{3}}{(x+\sqrt{3})^3} > -\frac{96}{\pi(x+\sqrt{3})^3} > -\frac{24x}{\pi(1+x^2)^2} = \left(\frac{12\operatorname{arctg} x}{\pi}\right)''.$$

Здесь применили оценку $(\sqrt{3}x-1)(-\sqrt{3}x^3+2x^2+\sqrt{3}x+4) > 0$. $\square$

Лемма 6. *Для произвольного конформного отображения f круга $|z|<1$ на область $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ верны оценки (где* dist *— евклидово расстояние)*

$$|f'(z)|(1-|z|^2)/4 \leqslant \operatorname{dist}(f(z),\partial\Omega) \leqslant |f'(z)|(1-|z|^2), \tag{17}$$

$$\left|(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\overline{z}\right| \leqslant 4. \tag{18}$$

Левая оценка (17) следует из теоремы Кёбе об одной четверти. Эта теорема и оценка (18) даны в значительном числе книг (см. библиографию [6]).

Доказательство. См. [1, § I.4] или неравенства (17) и (13) в [18, § 1.3]. $\square$

Лемма 7. *Для односвязной области $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, конформного отображения $f = g^{-1} : \Omega \to \Psi = \{0 < \operatorname{Im} w < 1\}$ и точек $z \in \Omega$ и $w \in \Psi$ имеем*

$$\operatorname{dist}(f(z),\partial\Psi)/\pi \leqslant |f'(z)|\operatorname{dist}(z,\partial\Omega) \leqslant 2\operatorname{dist}(f(z),\partial\Psi), \tag{19}$$

$$|g''(w)|\operatorname{dist}(w,\partial\Psi) \leqslant \pi|g'(w)|, \tag{20}$$

$$|f''(z)|\operatorname{dist}(z,\partial\Omega) \leqslant 6|f'(z)|. \tag{21}$$

Если дополнительно $0 < |Z| \leqslant \frac{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}{10}$ и $0 < |W| \leqslant \frac{\operatorname{dist}(w,\partial\Psi)}{10}$, то

$$|f'(z+Z) - f'(z)| \leqslant 9|f'(z)Z|/\operatorname{dist}(z,\partial\Omega), \tag{22}$$

$$\left|\frac{f(z+Z)-f(z)}{Z} - f'(z)\right| \leqslant \frac{9}{2}|f'(z)Z|/\operatorname{dist}(z,\partial\Omega), \tag{23}$$

$$|g'(w+W) - g'(w)| \leqslant 4|g'(w)W|/\operatorname{dist}(w,\partial\Psi), \tag{24}$$

$$\left|\frac{g(w+W)-g(w)}{W} - g'(w)\right| \leqslant 2|g'(w)W|/\operatorname{dist}(w,\partial\Psi). \tag{25}$$

Данная лемма большей частью является переносом леммы 6 со случая круга на случай полосы.

Доказательство. При $z \in \Omega$ положим $w = f(z)$ и $\xi = h^{-1}(w)$, где

$$h(\zeta) = \operatorname{Re} w + \frac{i}{2} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{i-\zeta}{i+\zeta} \quad (\text{для ветви с } \ln 1 = 0), \quad |\zeta| < 1.$$

Тогда $-1 < \xi < 1$. Оценки (17) для функции $g \circ h$ дают

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}{|g'(w)h'(\xi)|(1-|\xi|^2)} = \frac{|f'(z)|\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}{|h'(\xi)|(1-\xi^2)} \leqslant 1.$$

Обозначим $\alpha = \operatorname{arctg}\xi$ и $\beta = (\pi/4) - |\alpha|$. Тогда

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \operatorname{Re} w + \frac{i}{2} + \frac{2i\operatorname{arctg}\xi}{\pi} = \operatorname{Re} w + \frac{i}{2} + \frac{2i\alpha}{\pi}, \\ h'(\xi) &= \frac{2i}{\pi(1+\xi^2)}, \\ \frac{h''(\xi)}{h'(\xi)} &= -\frac{2\xi}{1+\xi^2}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|h'(\xi)|(1-\xi^2) = \frac{2\cos(2\alpha)}{\pi} = \frac{2\sin(2\beta)}{\pi},\\
&\operatorname{dist}(f(z),\partial\Psi) = \operatorname{dist}(h(\xi),\partial\Psi) = \frac{1}{2} - \left|\frac{2\alpha}{\pi}\right| = \frac{2\beta}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Ввиду неравенств $4\beta/\pi \leqslant \sin(2\beta) \leqslant 2\beta$ отсюда следует (19).

Лемма 5 для $x = |\xi|$ показывает, что

$$
\operatorname{dist}(w,\partial\Psi) = \frac{2\beta}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{2\operatorname{arctg} x}{\pi} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{x+2x^2}{2(1+x+x^2)} = \frac{1-x^2}{2(1+x+x^2)}.
$$

Применяя неравенство (18) к функции $g\circ h$, имеем

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{(g\circ h)''(\xi)}{(g\circ h)'(\xi)}\right|(1-|\xi|^2) &= \left|\frac{g''(w)(h'(\xi))^2 + g'(w)h''(\xi)}{g'(w)h'(\xi)}\right|(1-\xi^2)\\
&= \left|\frac{g''(w)h'(\xi)}{g'(w)} - \frac{2\xi}{1+\xi^2}\right|(1-\xi^2) \leqslant 2|\xi| + 4,\\
\left|\frac{g''(w)}{g'(w)}\right| &\leqslant \frac{\pi(1+\xi^2)}{2}\left(\frac{2|\xi|}{1+\xi^2} + \frac{2|\xi|+4}{1-\xi^2}\right)\\
&= 2\pi(1+x+x^2)/(1-x^2) \leqslant \pi/\operatorname{dist}(w,\partial\Psi).
\end{aligned}
$$

Мы доказали (20). Аналогично проверяется неравенство (21):

$$
\begin{aligned}
\frac{|f''(z)|\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}{|f'(z)|} &= |g''(w)/g'(w)||f'(z)|\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)\\
&\leqslant |g''(w)/g'(w)||h'(\xi)|(1-\xi^2)\\
&\leqslant \frac{2|\xi|(1-\xi^2)}{1+\xi^2} + 2|\xi| + 4 = \frac{4|\xi|}{1+\xi^2} + 4 < 6.
\end{aligned}
$$

Отметим, что из (19) и (20) следует (21) с постоянной 2π вместо 6.

Пусть $0 < |Z| \leqslant \operatorname{dist}(z,\partial\Omega)/10$. Оценка (22) ясна при $f'(z+Z) = f'(z)$. В противном случае $f'(z+tZ) = f'(z)$ лишь для конечного набора точек $t\in[0,1]$. Вне этих исключительных значений в силу (21) имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|f'(z+tZ) - f'(z)| &\leqslant |f''(z+tZ)Z|\\
&\leqslant \frac{6|f'(z+tZ)Z|}{\operatorname{dist}(z+tZ,\partial\Omega)}\\
&\leqslant 6\frac{|f'(z+tZ)-f'(z)| + |f'(z)|}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega) - t|Z|}|Z|,\\
|f'(z+Z) - f'(z)| &\leqslant \left(\left(1 - \frac{|Z|}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}\right)^{-6} - 1\right)|f'(z)|\\
&\leqslant 9|f'(z)Z|/\operatorname{dist}(z,\partial\Omega).
\end{aligned}
$$

В последнем переходе применили то, что $(1-s)^{-6} < 1+9s$ при $s\in(0,1/10]$. Мы доказали (22), а оценка (23) следует из (22) по формуле Тейлора.

Соотношения (24) и (25) выводятся из (20) аналогичным образом. □

Лемма 8. *Пусть даны область $\Omega \in E^\infty_{\vartheta,\Theta}$ и отображение $f\in F(\Omega,\vartheta)$. Тогда существует такое $x_1 \in \operatorname{dom}\Theta$, что*

(26) *кривая $f(\vartheta_{x_1})$ соединяет прямые $\operatorname{Im} w = 0$ и $\operatorname{Im} w = 1$*

и имеет место следующее свойство: если линейно связное множество $\omega \subset \mathbb{C}$ *содержится в пересечении замкнутого круга с центром* z_0 *(радиуса* $r > 0$*) и правой компоненты множества* $\Omega \setminus \vartheta_{x_1}$*, причем*

$$r < R = \max\{\operatorname{dist}(z_0, \partial_0(\Omega, \Theta)), \operatorname{dist}(z_0, \partial_1(\Omega, \Theta))\} \leqslant \operatorname{Re} z_0 - x_1,$$

то верны неравенства (где diam *— евклидов диаметр)*

$$\sup_{z_1, z_2 \in \omega} |\operatorname{Re} f(z_1) - \operatorname{Re} f(z_2)| \leqslant 2\pi / \ln(R/r), \tag{27}$$

$$\operatorname{diam} f(\omega) \leqslant 4\pi / \ln(R/r). \tag{28}$$

Доказательство этой леммы подсказано основанным на экстремальной длине выводом оценки [1, (V.5.11)] типа Вольфа. Как в [1], оценивается образ $f(\omega)$ конкретного множества при отображении на регулярную область. В [7] можно найти оценку через $C\sqrt{\delta}$ модуля непрерывности конформного отображения области с метрикой Лаврентьева–Мазуркевича на круг с евклидовой метрикой и оценку через $C\bigl(\ln \frac{1}{\delta}\bigr)^{-1/2}$ модуля непрерывности обратного отображения. В леммах Вольфа (см. гл. I–III в [8], предложение 2.2 в [18] и лемму 1 в [26]) обычно мажоранту вида $C\bigl(\ln \frac{1}{\delta}\bigr)^{-1/2}$ для инфимума длин семейства кривых выводят из «интеграла площадей».

Доказательство. Возьмем любое $x_0 \in \operatorname{dom} \Theta$. Через Ω_+ обозначим правую компоненту множества $\Omega \setminus \vartheta_{x_0}$. Ее поперечный разрез

$$\theta = \{x + i\Theta(x) \colon x_0 < x < \infty\}$$

разбивает ее на «нижнюю» и «верхнюю» компоненты S_0 и S_1.

Как в доказательстве леммы 2, множество $f(\vartheta_{x_0})$ является поперечным разрезом полосы Ψ, не оканчивающимся в точке $w = +\infty$, откуда (см. (11))

$$(\exists x_1 > x_0) \quad \inf_{\vartheta_{x_1}} \operatorname{Re} f - 1 > \sup_{\vartheta_{x_0}} \operatorname{Re} f.$$

Множество $f(\vartheta_{x_1})$ отделяет $f(\vartheta_{x_0})$ от точки $w = +\infty$, что дает (26).

Пусть множество ω такое, как в формулировке леммы. Тогда

$$f(\omega) \subset \bigl\{w \in \Psi \colon \operatorname{Re} w > \inf\nolimits_{\vartheta_{x_1}} \operatorname{Re} f\bigr\},$$

$$(\forall w \in f(\omega)) \quad P_w \cup Q_w \subset \bigl\{W \in \Psi \colon \operatorname{Re} W > \sup\nolimits_{\vartheta_{x_0}} \operatorname{Re} f\bigr\} \subset f(\Omega_+)$$

для полуотрезков

$$P_w = \{w + p + ip \colon -\operatorname{Im} w < p \leqslant 0\},$$
$$Q_w = \{w + q + iq \colon 0 \leqslant q < 1 - \operatorname{Im} w\}.$$

Обозначим $g = f^{-1}$. Предположим, что

$$(\exists w_1, w_2 \in f(\omega)) \quad g(P_{w_1} \cup Q_{w_2}) \Subset S = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| < R\}. \tag{29}$$

Рассматривая поведение кривой $f(\theta) \subset f(\Omega_+)$, легко проверить, что

$$g(w_1 + p + ip) \in S_0 \quad \text{при} \quad p \approx -\operatorname{Im} w, \tag{30a}$$

$$g(w_2 + q + iq) \in S_1 \quad \text{при} \quad q \approx 1 - \operatorname{Im} w. \tag{30b}$$

Соединяя точки $g(w_1)$ и $g(w_2)$ кривой в ω, дополним множество $g(P_{w_1} \cup Q_{w_2})$ до кривой $\gamma \Subset S$. Из (30) следует, что $\gamma \cap \theta \neq \varnothing$. По непрерывности получаем, что точки множества $\gamma \cap S_0$ лежат под кривой θ, а множества $\gamma \cap S_1$ — над кривой θ. (Термины *под* и *над* имеют смысл ввиду $\gamma \Subset S$ и $R < \operatorname{Re} z_0 - x_0$.) Значит, точки из (30a) при $p \approx -\operatorname{Im} w$ лежат под кривой θ на положительном расстоянии от множества $\partial\Omega \setminus \partial_0(\Omega, \Theta)$. Ввиду компактного вложения $g(P_{w_1}) \Subset S$

$$\operatorname{dist}(z_0, \partial_0(\Omega, \Theta)) \leqslant \varliminf_{p \downarrow -\operatorname{Im} w} |z_0 - g(w_1 + p + ip)| < R.$$

Аналогично $\operatorname{dist}(z_0, \partial_1(\Omega, \Theta)) < R$. Это означает противоречие $R < R$, так что предположение (29) ложно.

Без умаления общности далее считаем, что $g(P_w) \not\Subset S$ для любого $w \in f(\omega)$. Очевидно, что $\int_{\mathbb{C}} \rho^2 \, dx \, dy = 1$ для борелевской функции

$$\rho(z) = \begin{cases} \frac{1}{|z - z_0| \sqrt{2\pi \ln(R/r)}} & \text{при} \quad r < |z - z_0| < R, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Конформная инвариантность экстремальной длины [18, предложение 9.1] и свойство $g(P_w) \not\Subset S$ дают, что для семейства кривых $\Gamma = \{P_w \colon w \in f(\omega)\}$

$$\lambda(\Gamma) = \lambda(g(\Gamma)) \geqslant \left(\int_r^R \frac{ds}{s\sqrt{2\pi \ln(R/r)}} \right)^2 = \frac{\ln(R/r)}{2\pi}.$$

Поместим множество $f(\omega)$ в наименьшую полосу ширины $W \in [0, \infty]$ со сторонами, параллельными прямой $\operatorname{Re} w = \operatorname{Im} w$. Если $\int_{\mathbb{C}} \varrho^2 \, du \, dv \leqslant 1$, то по неравенству Коши и линейной связности множества $f(\omega)$

$$\inf_{w_0 \in f(\omega)} \left(\int_{P_{w_0}} \varrho \, |dw| \right)^2 \leqslant \sqrt{2} \inf_{w_0 \in f(\omega)} \int_{P_{w_0}} \varrho^2 \, |dw| \leqslant \sqrt{2}/W,$$
$$\lambda(\Gamma) \leqslant \sqrt{2}/W.$$

Отсюда $W \leqslant 2\pi\sqrt{2}/\ln(R/r)$. Аналогичная оценка имеет место для полосы со сторонами, параллельными прямой $\operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w = 0$. Значит, множество $f(\omega)$ содержится в замкнутом квадрате с диагональю $4\pi/\ln(R/r)$, что дает (28). Оценка (27) проверяется аналогично (но проще) с помощью полуотрезков

$$P_w = \{w + ip \colon -\operatorname{Im} w < p \leqslant 0\} \quad \& \quad Q_w = \{w + iq \colon 0 \leqslant q < 1 - \operatorname{Im} w\}.$$

Лемма 8 доказана. □

2. Основная теорема и дополнение к ней

Пусть $\Omega \in D_\vartheta^\infty$ и $f \in F(\Omega, \vartheta)$. В настоящем параграфе устанавливается равносильность нескольких свойств следующему свойству (VO):

$$\Omega \in E_\vartheta^\infty \quad \& \quad \lim_{x \to +\infty} \sup_{z_1, z_2 \in \vartheta_x} |\operatorname{Re} f(z_1) - \operatorname{Re} f(z_2)| = 0.$$

Наименование (VO) происходит от английской фразы *vanishing oscillation*.

В сущности, свойство (VO) встречается уже в работах [8, 12, 25], а в [20] показано, что оно эквивалентно двум условиям с участием конформного инварианта из следующего определения.

Определение 2. *Для* $\Omega \in D_{\operatorname{gr} \Theta}$ *и* $[x_0, x_1] \subset \operatorname{dom} \Theta$ *пусть*

$$\Omega_{[x_0, x_1]} \text{ — } \textit{содержащая множество } \{x + i\Theta(x) \colon x_0 < x < x_1\}$$
$$\textit{компонента множества } \Omega \setminus (\vartheta_{x_0} \cup \vartheta_{x_1}).$$

Через $\Lambda^{\Theta}_{[x_0,x_1]}$ *обозначим экстремальную длину семейства всех локально спрямляемых кривых в* $\Omega_{[x_0,x_1]}$, *соединяющих множества* ϑ_{x_0} *и* ϑ_{x_1}.

Если $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta}$, т.е. $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta,\Theta}$ для некоторого Θ, то для достаточно больших x_0 величина $\Lambda^{\Theta}_{[x_0,x_1]}$ не зависит от выбора Θ и будет обозначаться $\Lambda_{[x_0,x_1]}$.

Самым важным результатом этого параграфа будет эквивалентность свойства (VO) явному геометрическому условию из следующего определения.

Определение 3. *Пусть функции* $\varphi_0, \varphi_1 : X \to \mathbb{R}$ *непрерывны на промежутке* X *с* $\sup X = +\infty$, *причем* $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 > 0$. *Множество*

$$\Phi(\varphi_0, \varphi_1) = \{x + iy \colon x \in X \ \&\ \varphi_0(x) < y < \varphi_1(x)\}$$

называется полосой. Если $\lim_{x_1 > x_0 \to +\infty} \frac{\varphi_j(x_1) - \varphi_j(x_0)}{x_1 - x_0} = 0$ *при* $j = 0$ *и* $j = 1$, *то* $\Phi(\varphi_0, \varphi_1)$ *называется* L*-полосой.*

Для $\Omega \in D^{\infty}_{\vartheta}$ *скажем, что* $\Omega \in VO_{\vartheta}$, *если найдется* L*-полоса* $\Phi(\varphi_0, \varphi_1) \subset \Omega$ *такая, что* $\operatorname{acc}(\varphi_0 + \varphi_1)/2 = \operatorname{acc}\vartheta$ *и*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{dist}(x + i\varphi_0(x), \partial\Omega) + \operatorname{dist}(x + i\varphi_1(x), \partial\Omega)}{\varphi(x)} = 0. \tag{31}$$

Понятие L-полосы введено в [25]. Похожее понятие L-касательной в конечной точке восходит к Линделёфу и Островскому, см. § 3, [2, § 3] и [25, § 1].

Условие $\Omega \in VO_{\vartheta}$ впервые в другой форме появилось в [22]. Обозначение VO_{ϑ} произведено от названия этой работы и от обозначения (VO).

Теперь мы готовы доказать главную теорему статьи.

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \in D^{\infty}_{\vartheta}$, $f = g^{-1} \in F(\Omega, \vartheta)$,

$$\Phi_{\varepsilon} = \{z \in \Omega \colon |f'(z)| \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \geqslant \varepsilon\} \quad \text{для} \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1/(2\pi),$$
$$\Psi_{\delta} = \{w \in \mathbb{C} \colon \delta \leqslant \operatorname{Im} w \leqslant 1 - \delta\} \quad \text{для} \quad 0 < \delta \leqslant 1/2.$$

Тогда равносильны следующие восемь условий:

(i) $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta}$ *и* $\lim\limits_{x \to +\infty} \sup\limits_{z_1, z_2 \in \vartheta_x} |\operatorname{Re} f(z_1) - \operatorname{Re} f(z_2)| = 0$ *(свойство* (VO)*);*

(ii) $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta}$ *и* $\lim_{z \in \vartheta_x \colon x \to +\infty} \{\operatorname{Re} f(z) - \Lambda^{\Theta}_{[a,x]}\} \in \mathbb{R}$ *для любой функции* Θ *с* $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta,\Theta}$ *и любого* $a \in \operatorname{dom}\Theta$*;*

(iii) $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta}$ *и* $\lim_{x_3 > x_2 > x_1 \to +\infty} |\Lambda_{[x_1,x_3]} - \Lambda_{[x_1,x_2]} - \Lambda_{[x_2,x_3]}| = 0$*;*

(iv) $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta}$ *и* $(\forall\varepsilon)$ $\lim_{x \to +\infty} \sup_{z_1, z_2 \in \Phi_{\varepsilon} \cap \vartheta_x} |\operatorname{Re} f(z_1) - \operatorname{Re} f(z_2)| = 0$*;*

(v) *для подходящей ветви функции* $\arg g'$

$$(\forall\delta) \qquad \lim_{w \in \Psi_{\delta} \colon \operatorname{Re} w \to +\infty} \arg g'(w) = 0;$$

(vi) $(\forall\delta)$ $\lim_{w_1, w_2 \in \Psi_{\delta} \colon \operatorname{Re} w_1 = \operatorname{Re} w_2 \to +\infty} \frac{g'(w_1)}{|g'(w_2)|} = 1$*;*

(vii) *существует* L*-полоса* $\Phi(\phi_0, \phi_1) \subset \Omega$ *такая, что*

$$\operatorname{acc}(\phi_0 + \phi_1)/2 = \operatorname{acc}\vartheta,$$

$$\lim_{z \in \Phi(\phi_0, \phi_1) \colon \operatorname{Re} z \to +\infty} f'(z)\phi(\operatorname{Re} z) = 1 \quad \text{для} \quad \phi = \phi_1 - \phi_0; \tag{32}$$

(viii) $\Omega \in VO_{\vartheta}$.

Равносильность условий (i)–(iii) по существу доказана в § 3 из [20], где эти условия записываются без ограничения $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta}$. Данный результат требует корректировки, как показывает контрпример

$$\Omega = \{\operatorname{Im} z > 0\} \notin E^{\infty}_{\vartheta} \quad \& \quad f(z) = (1/\pi)\ln z \quad \& \quad \Lambda^{\Theta}_{[x_0,x_1]} = 0.$$

Здесь аддитивность величины $\Lambda^{\Theta}_{[x_0,x_1]}$ не влечет справедливости «усеченных» (без условия $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta}$) условий (i) и (ii). Для исправления этой неточности и повышения замкнутости изложения мы на шаге 1 приведем слегка измененное доказательство из [20] равносильности условий (i)–(iii).

Доказательство. Шаг 1. Пусть выполнено условие (i), $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta,\Theta}$ и $a \in \operatorname{dom}\Theta$. Построим отображение $f_+ : \Omega_+ \to \Psi_+$ по лемме 2. Ввиду (i) и (10) имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \sup_{z_1,z_2\in\vartheta_x} |\operatorname{Re} f_+(z_1) - \operatorname{Re} f_+(z_2)| = 0,$$
$$|\operatorname{Re} f_+(z_1) - \operatorname{Re} f_+(z_2)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad z_1, z_2 \in \vartheta_x \text{ и } x \geqslant x_+(\varepsilon) > a \quad (\varepsilon > 0).$$

При $x > a$ число $\Lambda^{\Theta}_{[a,x]}$ по конформной инвариантности экстремальной длины равно экстремальной длине семейства всех локально спрямляемых кривых, соединяющих интервал $f_+(\vartheta_a) = \{iv\colon 0 < v < 1\}$ с поперечным разрезом $f_+(\vartheta_x)$ полуполосы Ψ_+ и лежащих в $\Psi_+ \setminus f_+(\vartheta_x)$. Помещая при $x \geqslant x_+(\varepsilon)$ разрез $f_+(\vartheta_x)$ между вертикальными разрезами, элементарно получаем

$$u_x - \varepsilon \leqslant \Lambda^{\Theta}_{[a,x]} \leqslant u_x + \varepsilon,$$
$$\lim_{z\in\vartheta_x\colon x\to+\infty} \bigl\{\operatorname{Re} f_+(z) - \Lambda^{\Theta}_{[a,x]}\bigr\} = 0,$$

где $u_x = \operatorname{Re} f_+(x + i\Theta(x))$. Отсюда (i) $\Rightarrow$ (ii) в силу (10).

Пусть снова верно (i) и $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta,\Theta}$, но $b \in \operatorname{dom}\Theta$ таково, что множество $f(\vartheta_x)$ при $x \geqslant b$ является поперечным разрезом полосы Ψ, соединяющим ее края. Аналогично предыдущему абзацу выводим

$$|\operatorname{Re} f(z_1) - \operatorname{Re} f(z_2)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad z_1, z_2 \in \vartheta_x \text{ и } x \geqslant x(\varepsilon) \geqslant b,$$
$$U_{x_2} - U_{x_1} - 2\varepsilon \leqslant \Lambda^{\Theta}_{[x_1,x_2]} \leqslant U_{x_2} - U_{x_1} + 2\varepsilon \quad \text{при} \quad x_2 > x_1 \geqslant x(\varepsilon),$$
$$|\Lambda^{\Theta}_{[x_1,x_3]} - \Lambda^{\Theta}_{[x_1,x_2]} - \Lambda^{\Theta}_{[x_2,x_3]}| \leqslant 6\varepsilon \quad \text{при} \quad x_3 > x_2 > x_1 \geqslant x(\varepsilon),$$

где $U_x = \operatorname{Re} f(x + i\Theta(x))$. Поэтому (i) $\Rightarrow$ (iii).

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) тривиальна.

Пусть имеет место (iii), так что $\Omega \in E^{\infty}_{\vartheta,\Theta}$. Возьмем $0 < \varepsilon < 1/18$. Тогда

$$(\exists a \in \operatorname{dom}\Theta) \quad x_3 > x_2 > x_1 \geqslant a \quad \Rightarrow \quad |\Lambda^{\Theta}_{[x_1,x_3]} - \Lambda^{\Theta}_{[x_1,x_2]} - \Lambda^{\Theta}_{[x_2,x_3]}| \leqslant \varepsilon.$$

Построим отображение $f_+ : \Omega_+ \to \Psi_+$ по лемме 2.

Возьмем столь большие $b > a$ и $c > b$, что множества $\partial_0(\Omega,\Theta)$ и $\partial_1(\Omega,\Theta)$ содержат точки, реальные части которых принадлежат интервалам (a,b), (b,c) и (c,∞). Тогда множество $C = f_+(\vartheta_c)$ удовлетворяет условиям леммы 3. Значит, по этой лемме имеют смысл область $\Psi_C = f_+(\Omega_{[a,c]})$ и пара (A,B).

Возьмем $z_1, z_2 \in \vartheta_b$ произвольно. Тогда

$$\zeta_j = B^{-1}(f_+(z_j)) \in \beta = B^{-1}(f_+(\vartheta_b)).$$

Кривая β — соединяющий точки x_0 и $x_1 + i$ $(0 \leqslant x_j \leqslant A)$ поперечный разрез прямоугольника R_A. В силу (6) и выбора чисел b и c имеем $0 < x_j < A$. В терминах леммы 4 по конформной инвариантности экстремальной длины

$$A - \lambda(\Gamma_0) - \lambda(\Gamma_1) = \Lambda^{\Theta}_{[a,c]} - \Lambda^{\Theta}_{[a,b]} - \Lambda^{\Theta}_{[b,c]} \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда $|\operatorname{Re}\zeta_1 - \operatorname{Re}\zeta_2| \leqslant \alpha_0\sqrt{\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}}$.

Ввиду (11) имеем $D \xrightarrow{c\to\infty} -\infty$ при фиксированном b, где

$$D = \sup_{\vartheta_b} \operatorname{Re} f_+ - \inf_{\vartheta_c} \operatorname{Re} f_+.$$

Можно считать c столь большим, что $D \leqslant -7/2$. Применяя оценки (13) и (14) к точкам ζ_1 и ζ_2, получаем

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} f_+(z_1) - \operatorname{Re} f_+(z_2)| &\leqslant |\operatorname{Re}\zeta_1 - \operatorname{Re}\zeta_2| + e(\zeta_1,\zeta_2) \\ &\leqslant \alpha_0\sqrt{\varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon}} + 100e^{(D+2)\pi}\left\{\frac{1}{\pi}+1\right\}. \end{aligned}$$

Переход к пределу при $c \to \infty$ и $b \to \infty$ показывает (с учетом (10)), что

$$\sup_{z_1,z_2\in\vartheta_b} |\operatorname{Re} f_+(z_1) - \operatorname{Re} f_+(z_2)| \leqslant \alpha_0\sqrt{\varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon}},$$

$$\varlimsup_{b\to\infty} \sup_{z_1,z_2\in\vartheta_b} |\operatorname{Re} f(z_1) - \operatorname{Re} f(z_2)| \leqslant \alpha_0\sqrt{\varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Это значит, что (iii) $\Rightarrow$ (i). Мы доказали равносильность условий (i)–(iii).

Шаг 2. Докажем далее равносильность между (i) и условиями (iv)–(viii). Очевидно, что (i) $\Rightarrow$ (iv). Покажем теперь, что

$$\text{(iv)} \Rightarrow \text{(v)} \Rightarrow \text{(vi)} \Rightarrow \text{(vii)} \Rightarrow \text{(viii)} \Rightarrow \text{(i)}. \tag{33}$$

Пусть верно (iv), так что $\Omega \in E^\infty_{\vartheta,\Theta}$ для некоторой функции Θ. Возьмем любое положительное число

$$\delta = 35\varepsilon \leqslant 1/10.$$

Обозначим $u^\uparrow = u + i/2$. По (iv) найдем столь большое $x_0 \in \operatorname{dom}\Theta$, что

$$(\forall x \geqslant x_0) \quad \sup_{z_1,z_2\in\Phi_\varepsilon\cap\vartheta_x} |\operatorname{Re} f(z_1) - \operatorname{Re} f(z_2)| \leqslant \delta^3 \tag{34}$$

и точка $g(0^\uparrow)$ принадлежит левой компоненте множества $\Omega \setminus \vartheta_{x_0}$.

Пусть $x \geqslant x_0$. Для $z \in \Phi_{\delta/\pi} \cap \vartheta_x$ и $Z = i\delta \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ по (22), (23) и (34)

$$|f'(z+Z)| \operatorname{dist}(z+Z, \partial\Omega) \geqslant \left(1-\frac{9}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\frac{\delta}{\pi} > \frac{\delta}{35} = \varepsilon,$$

$$\{z+Z, z\} \subset \Phi_\varepsilon \cap \vartheta_x,$$

$$\left|\frac{f(z+Z)-f(z)}{Z} - f'(z)\right| \leqslant (9/2)\delta|f'(z)|,$$

$$|\operatorname{Im} f'(z)| \leqslant (9/2)\delta|f'(z)| + \delta^2/\operatorname{dist}(z,\partial\Omega) \leqslant 8\delta|f'(z)|. \tag{35}$$

Как в доказательстве леммы 2, из $\Omega \in E^\infty_{\vartheta,\Theta}$ следует, что $\sup_{\vartheta_x} \operatorname{Re} f < \infty$. Значит, точка $g(u^\uparrow)$ для достаточно больших $u > 0$ лежит в правой компоненте множества $\Omega \setminus \vartheta_x$. По непрерывности существуют $u > 0$ такие, что $g(u^\uparrow) \in \vartheta_x$. Пусть $u_1 > 0$, $g(u_1^\uparrow) \in \vartheta_x$, $u_2 > 0$, $g(u_2^\uparrow) \in \vartheta_x$ и $W = u_1 - u_2$. Тогда

$$|W| = |\operatorname{Re} u_1^\uparrow - \operatorname{Re} u_2^\uparrow| = |\operatorname{Re} f(g(u_1^\uparrow)) - \operatorname{Re} f(g(u_2^\uparrow))| \leqslant \delta^3,$$

так как $g(u_j^\uparrow) \in \Phi_{1/(2\pi)} \subset \Phi_\varepsilon$ по (19). Если $W \neq 0$, то ввиду (25)

$$|\operatorname{Re} g'(u_2^\uparrow)| = \left|\operatorname{Re}\left(\frac{g(u_1^\uparrow) - g(u_2^\uparrow)}{u_1^\uparrow - u_2^\uparrow} - g'(u_2^\uparrow)\right)\right| \leqslant 4\delta^3|g'(u_2^\uparrow)| \leqslant \frac{|g'(u_2^\uparrow)|}{250}.$$

Это противоречит оценке (35) с $z = g(u_2^\uparrow)$, откуда $W = 0$.

Значит, при $x \geqslant x_0$ условие $g(u_x^\uparrow) \in \vartheta_x$ однозначно определяет число $u_x > 0$. Из (35) следует, что функция $x \mapsto u_x$ гладкая и строго монотонная в некоторой окрестности любой точки x, а по компактности — и на всем промежутке $[x_0, \infty)$. Функция u_x при $x \to +\infty$ монотонно возрастает до $+\infty$ ввиду (11).

Для $u \geqslant u_{x_0}$ положим $x = \operatorname{Re} g(u^\uparrow)$, так что $x \geqslant x_0$ и $u = u_x$. Двигаясь от точки $g(u^\uparrow) \in \Phi_{1/(2\pi)} \cap \vartheta_x$ по разрезу ϑ_x вниз и вверх, с помощью (19) и (35) убеждаемся, что множество $f(\Phi_{\delta/\pi} \cap \vartheta_x)$ содержит кривую вида

$$\gamma_u = \{w \in \Psi_\delta\colon \operatorname{Re} w = \Gamma_u(\operatorname{Im} w)\}, \quad \Gamma_u \in C^\infty[\delta, 1-\delta].$$

Очевидно, что $\bigcup_{u \geqslant u_{x_0}} \gamma_u = \{w \in \Psi_\delta\colon \operatorname{Re} w \geqslant \Gamma_{u_{x_0}}(\operatorname{Im} w)\}$. Для подходящей ветви функции $\arg g'$ отсюда по (35) следует, что

$$|\arg g'(w)| \leqslant \arcsin(8\delta) \quad \text{при} \quad w \in \Psi_\delta \text{ и } \operatorname{Re} w \geqslant \Gamma_{u_{x_0}}(\operatorname{Im} w).$$

Ввиду произвольности δ это доказывает импликацию (iv) $\Rightarrow$ (v).

Пусть верно (v). Гармоничность функции $\arg g'$ показывает, что имеет место условие (v) с заменой $\arg g'$ на частные производные

$$\frac{\partial \arg g'}{\partial(\operatorname{Re} w)} = -\frac{\partial \ln |g'|}{\partial(\operatorname{Im} w)}.$$

Интегрирование по $\operatorname{Im} w$ дает, что

$$(\forall\delta) \qquad \lim_{w_1, w_2 \in \Psi_\delta\colon\ \operatorname{Re} w_1 = \operatorname{Re} w_2 \to +\infty} \bigl(\ln |g'(w_1)| - \ln |g'(w_2)|\bigr) = 0.$$

Соотношения $\ln g' = \ln |g'| + i \arg g'$ и (v) показывают, что (v) $\Rightarrow$ (vi).

Пусть верно (vi). Для некоторых $u_3, u_4, \dots \in \mathbb{R}$ имеем

$$\left| \frac{g'(w_1)}{|g'(w_2)|} - 1 \right| \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{при} \quad w_j \in \Psi_{1/(k+1)} \text{ и } \operatorname{Re} w_1 = \operatorname{Re} w_2 \geqslant u_k \quad (k \geqslant 3).$$

Увеличивая, если нужно, числа u_4, u_5, …, можем считать, что $u_{k+1} - u_k \geqslant 1$. Определим липшицевы функции $\psi_0, \psi_1 : [u_3, \infty) \to \mathbb{R}$ равенствами

$$\psi_0(u) = 1 - \psi_1(u) = \frac{1}{k} + \frac{u - u_k}{(u_k - u_{k+1})(k+1)k} \quad \text{при} \quad u_k \leqslant u \leqslant u_{k+1}.$$

Положим также $Z_0 = g(W_0)$, где

$$W_0 = u_4 + i\psi_0(u_4) = u_4 + i/4.$$

Двигаясь от точки Z_0 вверх, построим такой интервал

$$P = \{\operatorname{Re} Z_0 + ip\colon \operatorname{Im} Z_0 < p < \operatorname{Im} Z_1\} \subset \Omega \quad (\operatorname{Re} Z_0 = \operatorname{Re} Z_1),$$

что кривая $Q = f(P)$ лежит в полосе $\Phi(\psi_0, \psi_1)$ и соединяет точку $W_0 = f(Z_0)$ с точкой $W_1 = f(Z_1)$, $\operatorname{Im} W_1 = \psi_1(\operatorname{Re} W_1)$. Данное движение не покидает полосу $\Phi(\psi_0, \psi_1)$, так как $|\arg g'| \leqslant \arcsin(1/3)$ в ее замыкании.

Очевидно, что графики функций

$$\psi_0\big|_{[\operatorname{Re} W_0, \infty)} \quad \& \quad \psi_1\big|_{[\operatorname{Re} W_1, \infty)} \tag{36}$$

переводятся отображением g в графики таких липшицевых функций

$$\phi_0 : [\operatorname{Re} Z_0, G_0) \to \mathbb{R} \quad \& \quad \phi_1 : [\operatorname{Re} Z_1, G_1) \to \mathbb{R},$$

что $\phi_j(x_1) - \phi_j(x_2) = o(|x_1 - x_2|)$ при $x_1, x_2 \to G_j$. При этом $G_j = +\infty$ (ввиду $f \in F(\Omega, \vartheta)$ и (6)) и $\phi_0 < \phi_1$, так как $\phi_0(\operatorname{Re} Z_0) = \operatorname{Im} Z_0 < \operatorname{Im} Z_1 = \phi_1(\operatorname{Re} Z_1)$ и графики функций (36) не пересекаются. Отсюда $\Phi(\phi_0, \phi_1)$ — это L-полоса.

Кривая Q и графики функций (36) вырезают часть полосы Ψ, которую g переводит на $\Phi(\phi_0,\phi_1)\setminus P$. Значит, $\Phi(\phi_0,\phi_1)\subset\Omega$. По построению

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{Re} f(x+i\phi_0(x))=\lim_{u\to+\infty}\operatorname{Re}(u+i\psi_0(u))=+\infty,$$

откуда $\operatorname{acc}(\phi_0+\phi_1)/2=\operatorname{acc}\phi_0=\operatorname{acc}\vartheta$ ввиду $f\in F(\Omega,\vartheta)$ и (6).

Пусть $z\in\Phi(\phi_0,\phi_1)$ и $u=\operatorname{Re} f(z)\geqslant u_k$ для максимально возможного $k\geqslant 3$. Обозначим $w_0=u+i\psi_0(u)$ и $w_1=u+i\psi_1(u)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Big||f'(z)|\operatorname{Im} g\big|_{w_0}^{w_1}-1\Big|&=\left|\int_{\psi_0(u)}^{\psi_1(u)}\frac{\operatorname{Re} g'(u+it)\,dt}{|g'(f(z))|}-1\right|\\&\leqslant\int_{\psi_0(u)}^{\psi_1(u)}\left|\frac{g'(u+it)}{|g'(f(z))|}-1\right|dt+\frac{2}{k}<\frac{3}{k}\xrightarrow[\text{ввиду (11)}]{\operatorname{Re} z\to+\infty}0,\\ f'(z)\phi(\operatorname{Re} z)&=\frac{f'(z)}{|f'(z)|}\frac{\phi(\operatorname{Re} z)}{\operatorname{Im} g(w_1)-\operatorname{Im} g(w_0)}|f'(z)|\operatorname{Im} g\big|_{w_0}^{w_1}\xrightarrow{\operatorname{Re} z\to+\infty}1,\end{aligned}$$

так как все три множителя стремятся к 1. Доказали, что (vi) $\Rightarrow$ (vii).

Пусть верно (vii). Для проверки включения $\Omega\in VO_\vartheta$ достаточно доказать равенство (31) для функций $(\varphi_0,\varphi_1)=(\phi_0,\phi_1)$. Допустим, что (31) ложно. Тогда без умаления общности существуют $0<\sigma\leqslant 1$ и последовательность $x_k\to+\infty$ такие, что

$$\operatorname{dist}(z_k,\partial\Omega)\geqslant\sigma\phi(x_k)\quad\text{для}\quad z_k=x_k+i\phi_1(x_k).$$

Последовательность ограниченных гармонических функций

$$v_k(\zeta)=\operatorname{Im} f(z_k+\phi(x_k)\zeta)\quad(\text{в круге } |\zeta|<\sigma)$$

имеет подпоследовательность (v_{k_l}), которая при $l\to\infty$ равномерно на компактах сходится к гармонической функции $0\leqslant v_\infty\leqslant 1$. В силу (32)

$$\frac{\partial v_\infty(\zeta)}{\partial(\operatorname{Im}\zeta)}=\operatorname{Re}\lim_{l\to\infty}f'(z_{k_l}+\phi(x_{k_l})\zeta)\phi(x_{k_l})=1\quad\text{в круге}\quad\left|\zeta+\frac{i\sigma}{2}\right|<\frac{\sigma}{4},$$

так что $v_\infty(\zeta)=\tau_0+\tau_1\operatorname{Re}\zeta+\operatorname{Im}\zeta$ для $\tau_0,\tau_1\in\mathbb{R}$. Опять в силу (32)

$$\begin{aligned}v_\infty\left(\frac{i\sigma}{2}\right)-\frac{\sigma}{2}=v_\infty(0)&=\lim_{l\to\infty}\operatorname{Im} f(z_{k_l})\\&\geqslant\lim_{l\to\infty}\operatorname{Im} f(z_{k_l})-\lim_{l\to\infty}\operatorname{Im} f(x_{k_l}+i\phi_0(x_{k_l})+i0)=1.\end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что (vii) $\Rightarrow$ (viii).

Пусть верно (viii) с соответствующей L-полосой $\Phi(\varphi_0,\varphi_1)$. Тогда $\Omega\in E^\infty_{\vartheta,\Theta}$ для $\Theta=(\varphi_0+\varphi_1)/2$. Найдем число $x_1\in\operatorname{dom}\Theta$ по лемме 8. Возьмем любое число $A=1/\alpha^2\geqslant 14$. Увеличивая x_1, если нужно, можем считать, что

$$|\varphi_j(x)-\varphi_j(\xi)|\leqslant|x-\xi|e^{-A}/(2A)\quad\text{при}\quad x,\xi\geqslant x_1,\tag{37}$$

$$\operatorname{dist}(b+i\varphi_j(b),\partial\Omega)\leqslant e^{-A}\varphi(b)\quad\text{при}\quad b\geqslant x_1.\tag{38}$$

Возьмем любое

$$x\geqslant x_1+2A\varphi(x_1)/(1-2e^{-A}).$$

Ввиду (37)

$$x-2A\varphi(x)\geqslant x-2A[\varphi(x_1)+(x-x_1)e^{-A}/A]\geqslant x_1.\tag{39}$$

Поэтому при $\xi \geqslant x - 2A\varphi(x)$ имеет место (37), откуда

$$|x-\xi| < 2A\varphi(x) \quad \Rightarrow \quad |\varphi_j(x) - \varphi_j(\xi)| < e^{-A}\varphi(x), \tag{40}$$

$$\Bigl\{z \in \mathbb{C} \colon |x - \operatorname{Re} z| < 2A\varphi(x) \ \&\ |\Theta(x) - \operatorname{Im} z| \leqslant \frac{\varphi(x)}{2} - e^{-A}\varphi(x)\Bigr\} \subset \Omega. \tag{41}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
&z_0 = x + i\varphi_0(x),\\
&r = \alpha\varphi(x),\\
&S = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| \leqslant r\},\\
&T = \{z \in \vartheta_x \colon \operatorname{Im} z < \varphi_0(x) + r\},\\
&\omega \text{ — содержащая } z_0 + ir \text{ компонента множества } \Omega \cap \partial S,\\
&\Upsilon \text{ — содержащая } z_0 + \frac{ir}{2} \text{ компонента множества } \Omega \setminus \omega,\\
&z_1 = x + i\varphi_1(x).
\end{aligned}$$

В силу (38) для $b = x$

$$\operatorname{dist}(z_0, \partial_0(\Omega, \Theta)) = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega) < r.$$

Отсюда $S \not\subset \Omega$ и, по односвязности области Ω, также $\partial S \not\subset \Omega$. Поэтому ω — поперечный разрез области Ω. Двигаясь от точки $z_0 + ir/2 \in T$ вниз по T, мы можем покинуть множество Υ только через точку $z_0 - ir \in T \cap \omega$. Связность множеств T и ω показывает, что тогда области Ω принадлежит граница левой или правой половины круга S, а тем самым и сама половина. Это противоречит оценке (38) для $b = x \mp r/2$, так что $T \subset \Upsilon$. Ввиду $f \in F(\Omega, \vartheta)$, (5) и (26) множество $f(\omega)$ — поперечный разрез полосы Ψ с концами на прямой $\operatorname{Im} w = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\sup_{z,z^* \in T} |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z^*)| &\leqslant \sup_{z,z^* \in \Upsilon} |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z^*)|\\
&= \sup_{z,z^* \in \omega} |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z^*)|.
\end{aligned}$$

Разрез ω лежит в круге S и в правой компоненте множества $\Omega \setminus \vartheta_{x_1}$, так как этой компоненте принадлежит точка $z_0 + ir$. Соотношения (41), (38) и (39) дают для числа $R = \operatorname{dist}(z_0, \partial_1(\Omega, \Theta))$ оценки

$$\begin{aligned}
&R > \Theta(x) + \frac{\varphi(x)}{2} - e^{-A}\varphi(x) - \operatorname{Im} z_0 = (1 - e^{-A})\varphi(x) > r,\\
&R \leqslant |z_0 - z_1| + e^{-A}\varphi(x) = (1 + e^{-A})\varphi(x) < 2A\varphi(x) \leqslant x - x_1 = \operatorname{Re} z_0 - x_1.
\end{aligned}$$

По неравенству (27) леммы 8

$$\sup_{z,z^* \in T} |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z^*)| \leqslant 2\pi/\ln(R/r) < 2\pi \Big/ \ln \frac{1 - e^{-A}}{\alpha} < 13/\ln A. \tag{42a}$$

Аналогично проверяется, что

$$\sup_{z,z^* \in \vartheta_x \colon \operatorname{Im} z, \operatorname{Im} z^* > \varphi_1(x) - r} |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z^*)| < 13/\ln A. \tag{42b}$$

Для тех же Θ, A, α, x_1 и x рассмотрим $a \in (-A, A)$ и положим

$$\begin{aligned}
B &= \varphi(x) - 2e^{-A}\varphi(x), \qquad & b &= x + aB, \qquad & z_0 &= b + i\varphi_0(b),\\
r &= 2e^{-A}\varphi(x), & & & z_1 &= b + i\varphi_1(b).
\end{aligned}$$

Найдем одну из ближайших к z_0 точку $\zeta_0 \in \partial\Omega$. Тогда по (38) и (40)

$$\operatorname{dist}(z_0, \partial_0(\Omega,\Theta)) = |z_0 - \zeta_0| = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega) \leqslant e^{-A}\varphi(b) < r. \tag{43}$$

Для $R = \operatorname{dist}(z_0, \partial_1(\Omega,\Theta))$ аналогично предыдущему абзацу

$$R > \Theta(x) + \frac{\varphi(x)}{2} - e^{-A}\varphi(x) - \operatorname{Im} z_0 > (1 - 2e^{-A})\varphi(x) > r \quad (\text{см. } (40)),$$
$$R \leqslant |z_0 - z_1| + e^{-A}\varphi(b) = (1 + e^{-A})\varphi(b) < A\varphi(x) < b - x_1 = \operatorname{Re} z_0 - x_1.$$

Положим $\zeta = b + i\varphi_0(x) + ie^{-A}\varphi(x)$ и

$$\omega = \begin{cases} [\zeta, z_0) & \text{при} \quad z_0 = \zeta_0, \\ [\zeta, z_0) \cup [z_0, \zeta_0) & \text{при} \quad z_0 \neq \zeta_0, \end{cases}$$

где $[\zeta, z_0)$ и $[z_0, \zeta_0)$ — прямолинейные полуинтервалы. Кривая ω содержится в круге с центром z_0 радиуса r ввиду (40) и (43) и в правой компоненте множества $\Omega \setminus \vartheta_{x_1}$ ввиду $\operatorname{Im}\zeta > \operatorname{Im} z_0$. Кривая $f(\omega)$ в силу $f \in F(\Omega, \vartheta)$, (3), (6) и (26) оканчивается в некоторой точке прямой $\operatorname{Im} w = 0$. По оценке (28) леммы 8

$$\operatorname{diam} f(\omega) \leqslant 4\pi/\ln(R/r) < 4\pi \Big/ \ln\frac{1 - 2e^{-A}}{2e^{-A}} < 14/A.$$

На основании (41) в прямоугольнике Q_A (см. (7)) определена функция

$$v(Z) = \operatorname{Im} f(x + i[\Theta(x) - B/2] + BZ).$$

Она гармонична в Q_A и непрерывна в $\overline{Q_A}$. При этом $0 \leqslant v \leqslant 1$ и

$$v(a) = \operatorname{Im} f(\zeta) \leqslant \operatorname{diam} f(\omega) < V = 14/A.$$

Так же проверяется неравенство $v(a + i) > 1 - V$. По оценке (8a) леммы 1 и условиям Коши–Римана

$$\left|\frac{\partial v(Z)}{\partial(\operatorname{Re} Z)}\right|_{Z=iY} \leqslant 100e^{-A\pi} + \frac{28/(A\pi)}{\min\{Y, 1-Y\}} \quad (0 < Y < 1), \tag{44}$$
$$\max_{y_1,y_2 \in [\varphi_0(x)+\alpha\varphi(x), \varphi_1(x)-\alpha\varphi(x)]} |\operatorname{Re} f(x + iy_1) - \operatorname{Re} f(x + iy_2)|$$
$$\leqslant \int_{\frac{\alpha - e^{-A}}{1-2e^{-A}}}^{1-\frac{\alpha - e^{-A}}{1-2e^{-A}}} \left|\frac{\partial v(Z)}{\partial(\operatorname{Re} Z)}\right|_{Z=iY} dY \leqslant 100e^{-A\pi} + \frac{18\ln(\sqrt{A}/2)}{A}.$$

С учетом (42) это доказывает последнюю импликацию (viii) $\Rightarrow$ (i) цепочки (33). Теорема 1 доказана. $\square$

Дополним теорему 1 несколькими фактами о поведении отображений f и g в полосах, аппроксимирующих изнутри область Ω и полосу Ψ.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \in VO_\vartheta$ с соответствующей L-полосой $\Phi(\varphi_0, \varphi_1)$.*
Для любых $f = g^{-1} \in F(\Omega, \vartheta)$ и $\delta \in (0, 1/2]$ верны соотношения

$$(\exists U \in \mathbb{R}) \quad g(\{w \in \Psi_\delta \colon \operatorname{Re} w \geqslant U\}) \subset \Phi(\varphi_0, \varphi_1), \tag{45}$$

$$\lim_{w \in \Psi_\delta \colon \operatorname{Re} w \to +\infty} \operatorname{Re} g(w) = +\infty, \tag{46}$$

$$\lim_{w \in \Psi_\delta \colon \operatorname{Re} w \to +\infty} \frac{g'(w)}{\varphi(\operatorname{Re} g(w))} = 1. \tag{47}$$

Если $\Phi(\varphi_0,\varphi_1)\subset\Phi(\psi_0,\psi_1)\subset\Omega$ *для полосы* $\Phi(\psi_0,\psi_1)$ *ширины* $\psi=\psi_1-\psi_0$, *причем* $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)/\psi(x)=1$, *то*

$$\lim_{z\in\Phi(\psi_0,\psi_1)\colon\ \mathrm{Re}\,z\to+\infty}\left\{\mathrm{Im}\,f(z)-\frac{\mathrm{Im}\,z-\varphi_0(\mathrm{Re}\,z)}{\varphi(\mathrm{Re}\,z)}\right\}=0. \tag{48}$$

Ввиду $(\varphi/\psi)(+\infty)=1$ функции φ_0 и φ в (48) можно заменить на ψ_0 и ψ.

Доказательство. Для $\Theta=(\varphi_0+\varphi_1)/2$ найдем $x_1\in\mathrm{dom}\,\Theta$ по лемме 8. Можно считать, что дополнительно верны условия (37) и (38), в которых

$$A=1/\alpha^2=e^{26/\delta}.$$

Для $x_2\geqslant x_1+2A\varphi(x_1)/(1-2e^{-A})$ положим

$$\Phi_2=\{x+iy\colon x\geqslant x_2\ \&\ y_0(x)<y<y_1(x)\},$$

где $y_0(x)=\varphi_0(x)+\alpha\varphi(x)$ и $y_1(x)=\varphi_1(x)-\alpha\varphi(x)$.

Возьмем любое $x\geqslant x_2$. В предваряющих формулу (42a) обозначениях

$$\sup_{z\in T}\mathrm{Im}\,f(z)\leqslant\sup_{z\in\Upsilon}\mathrm{Im}\,f(z)\leqslant\mathrm{diam}\,f(\omega)\leqslant 4\pi/\ln(R/r)<26/\ln A=\delta,$$

$$\mathrm{Im}\,f(x+iy_0(x))<\delta \tag{49}$$

в силу оценки (28) леммы 8. Аналогично $\mathrm{Im}\,f(x+iy_1(x))>1-\delta$. Рассматривая кривую $f(\partial\Phi_2)$, имеем

$$\left\{w\in\Psi_\delta\colon\ \mathrm{Re}\,w\geqslant U=\max_{y_0(x_2)\leqslant y\leqslant y_1(x_2)}\mathrm{Re}\,f(x_2+iy)\right\}\subset f(\Phi_2).$$

Вложение $\Phi_2\subset\Phi(\varphi_0,\varphi_1)$ доказывает (45).

Выше число x_2 можно взять произвольно большим, поэтому равенство (46) следует из вложения $g(\{w\in\Psi_\delta\colon\ \mathrm{Re}\,w\geqslant U\})\subset\Phi_2$.

Пусть $z=x+iy\in\Phi_2$. В предваряющих формулу (44) обозначениях

$$|f'(z)B-1+V|\leqslant\sqrt{2}\left\{100e^{-A\pi}+\frac{28/(A\pi)}{\min\{Y,1-Y\}}\right\}$$

по условиям Коши–Римана и неравенствам (8) леммы 1, где

$$\frac{\alpha-e^{-A}}{1-2e^{-A}}<Y<1-\frac{\alpha-e^{-A}}{1-2e^{-A}}.$$

Поэтому

$$|f'(z)\varphi(x)-1|\leqslant\frac{|f'(z)B-1+V|+2e^{-A}+V}{1-2e^{-A}}<\frac{51}{4A\alpha}+\frac{15}{A}<13\alpha. \tag{50}$$

Замена $z=g(w)$ показывает, что

$$\varlimsup_{w\in\Psi_\delta\colon\ \mathrm{Re}\,w\to+\infty}\left|\frac{\varphi(\mathrm{Re}\,g(w))}{g'(w)}-1\right|\leqslant 13e^{-13/\delta}.$$

Отсюда следует (47).

Пусть $\Phi(\varphi_0,\varphi_1)\subset\Phi(\psi_0,\psi_1)\subset\Omega$ и $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)/\psi(x)=1$. Считаем x_2 столь большим, что $\psi(x)-\varphi(x)\leqslant\alpha\varphi(x)$ при $x\geqslant x_2$. Пусть $z=x+iy\in\Phi(\psi_0,\psi_1)$ с $x\geqslant x_2$. Если $y\leqslant y_0(x)$, то

$$-\alpha\varphi(x)\leqslant\psi_0(x)-\varphi_0(x)<y-\varphi_0(x)\leqslant\alpha\varphi(x),$$

$$\left|\mathrm{Im}\,f(z)-\frac{y-\varphi_0(x)}{\varphi(x)}\right|\leqslant\mathrm{Im}\,f(z)+\alpha<\delta+\alpha.$$

Случай $y \geqslant y_1(x)$ аналогичен. Если же $y_0(x) < y < y_1(x)$, то по (49) и (50)

$$\left|\operatorname{Im} f(z) - \frac{y - \varphi_0(x)}{\varphi(x)}\right| < \delta + \left|\int_{y_0(x)}^{y} \left[\operatorname{Re} f'(x+it) - \frac{1}{\varphi(x)}\right] dt\right| + \alpha < \delta + 14\alpha.$$

Отсюда

$$\varlimsup_{z\in\Phi(\psi_0,\psi_1):\ \operatorname{Re} z\to+\infty} \left|\operatorname{Im} f(z) - \frac{\operatorname{Im} z - \varphi_0(\operatorname{Re} z)}{\varphi(\operatorname{Re} z)}\right| \leqslant \delta + 14\alpha.$$

Ввиду произвольности $\delta \in (0, 1/2]$ это доказывает (48). □

3. Сопоставление теорем 1 и 2 с литературой

Разберем относящиеся к теоремам 1 и 2 результаты, ориентируясь среди них по явным геометрическим условиям на область. Ограничимся такими предшественниками класса VO_ϑ, как L-полосы и области с условием изогональности Островского (и их обобщения). Далее в параграфе считается, что $\Omega \in D_\vartheta^\infty$ и $f = g^{-1} \in F(\Omega, \vartheta)$.

Сначала кратко рассмотрим L-полосы. Аналогичное понятие L-касательной в конечной точке предложено Линделёфом [9] и названо так Островским [11]. Это понятие слегка обобщает понятие касательной, непрерывной в точке, и связано с теоремой Линделёфа о непрерывности функции $\arg g'$ из [18, с. 44]. В [2, с. 30] дана характеризация так называемой относительной конформности в граничной точке в терминах L-касательных. В [2, с. 9–11] приведен обзор родственных результатов работы [11] (содержится в сборнике [13]), которую мы не будем разбирать из-за языкового барьера.

Собственно L-полосы введены в [25], где определение частично отличается от нашего. В [25] для открытой L-полосы Ω доказаны свойства

(51) $$\lim_{w\in\Psi:\ \operatorname{Re} w\to+\infty} \arg g'(w) = 0$$

(§ 3), (VO) (§ 4), (47) (§ 16) и несколько других. Упомянутые три свойства передоказаны в [19], причем свойство (51) приписано работе [11]. В сравнение с (51) отметим, что функция $\ln|f'|$ может быть неограниченной снизу или сверху вблизи углов границы $\partial\Omega$, поэтому даже для L-полос нельзя в общем случае взять $\Phi(\phi_0, \phi_1) = \Omega$ в утверждении (vii) теоремы 1. Соотношение (48) для открытой L-полосы $\Phi(\varphi_0, \varphi_1) = \Phi(\psi_0, \psi_1) = \Omega$ содержится в теореме A из [21] и замечании после нее.

Рассмотрим теперь условие Островского.

Следствие 1. *Свойство*

(52) $$(\forall\delta) \quad \lim_{w\in\Psi_\delta:\ \operatorname{Re} w\to+\infty} \{\operatorname{Im} w - \operatorname{Im} g(w)\} = 0$$

равносильно совокупности следующих трех условий:

(53a) $$(\forall\delta)\ (\exists X_\delta) \quad \{z \in \Psi_\delta\colon \operatorname{Re} z \geqslant X_\delta\} \subset \Omega;$$

(53b) $$\operatorname{acc}(x \mapsto x + i/2) = \operatorname{acc}\vartheta;$$

найдутся последовательности $(z_k) \subset \partial\Omega$ и $(Z_k) \subset \partial\Omega$ такие, что

(53c) $$\begin{aligned} &\operatorname{Re} z_k \uparrow +\infty \ \&\ \operatorname{Re}(z_{k+1} - z_k) \to 0 \ \&\ \operatorname{Im} z_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \\ &\operatorname{Re} Z_k \uparrow +\infty \ \&\ \operatorname{Re}(Z_{k+1} - Z_k) \to 0 \ \&\ \operatorname{Im} Z_k \to 1 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

Свойство (52) часто называют изогональностью (название происходит от свойства сохранения углов в конечной достижимой граничной точке), а (53) — условием изогональности Островского.

Доказательство. Пусть выполнено (52). Дифференцируя, имеем

$$(54) \qquad (\forall\delta) \quad \lim_{w\in\Psi_\delta:\ \operatorname{Re} w\to+\infty} g'(w) = 1,$$

так как функция $\operatorname{Im} w - \operatorname{Im} g(w)$ гармонична. Значит, верно утверждение (v) теоремы 1, откуда $\Omega \in VO_\vartheta$. В силу (45), (46) и (52)

$$(\forall\delta) \quad \varlimsup_{x\to+\infty} \varphi_0(x) \leqslant \delta \quad \& \quad \varliminf_{x\to+\infty} \varphi_1(x) \geqslant 1-\delta.$$

При этом $\varphi(+\infty) = 1$ ввиду (46), (47) и (54). Отсюда $\varphi_0(+\infty) = 0$ и $\varphi_1(+\infty) = 1$. Легко проверить, что при $\Omega \in D_\vartheta^\infty$

$$\Omega \in VO_\vartheta \ \& \ \varphi_0(+\infty) = 0 \ \& \ \varphi_1(+\infty) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (53).$$

Поэтому выполнены условия (53).

Обратно, пусть выполнены условия (53), а потому $\Omega \in VO_\vartheta$, $\varphi_0(+\infty) = 0$ и $\varphi_1(+\infty) = 1$. Имеем $-1 < \operatorname{Im} z < 2$ для точек $z \in \Phi(\varphi_0, \varphi_1)$ с достаточно большой реальной частью. Соотношение (48) показывает, что

$$\lim_{z\in\Phi(\varphi_0,\varphi_1):\ \operatorname{Re} z\to+\infty} \{\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} z\} = 0.$$

Делая с помощью (45) и (46) замену $z = g(w)$, получаем (52). □

Следствие 1 — это одна из форм критерия изогональности Островского [12]. В других вариантах условие (52) иногда пишут в терминах отображения f и/или перемещают условия (53a) и (53b) в предположения критерия, см. [5, теорема 3], [8, теорема (IV.13.a)], [12, теорема XXXIII], [18, теорема 11.6] и [26, теоремы 1a и 1b]. «Секториальные» формулировки критерия для конечных или бесконечных достижимых граничных точек являются менее общими, чем формулировки для полос, так как экспоненциальная замена неоднолистна на широких полосах.

Главными результатами статьи [12] (имеется в сборнике [13]) являются критерий изогональности и дополняющие его две теоремы о складках. Изложение этих результатов на французском языке дано в [2, с. 13–17] или двух заметках из французских *Comptes Rendus* [13, с. 141–145]. Первая теорема о складках ([2, с. 14], [8, с. 126] или [12, теорема XXXV]) тривиально влечет импликацию (53) $\Rightarrow$ (VO) в «секториальной» постановке. Простое, идейно близкое к [8] доказательство этого факта для полос и вывод из него первой теоремы о складках приведены в [26, теоремы 2 и 3].

В [1, (V.5.7)] условие изогональности Островского кратко записано в терминах расстояния dist, что нетипично для литературы по теме. Мы применили эту идею при определении класса VO_ϑ условием (31).

Далее, рассмотрим обобщения условия Островского.

Следствие 2. *Асимптотическая формула*

$$(55) \qquad (\exists\sigma : \mathbb{R} \to (0,\infty)) \ (\forall\delta) \quad \lim_{w\in\Psi_\delta:\ \operatorname{Re} w\to+\infty} \frac{g'(w)}{\sigma(\operatorname{Re} g(w))} = 1$$

равносильна следующему условию:

(56a) *существуют L-полоса $\Phi(\varphi_0, \varphi_1) \subset \Omega$ с* $\operatorname{acc}(\varphi_0+\varphi_1)/2 = \operatorname{acc}\vartheta$

(56b) *и последовательности* $x_k \uparrow +\infty$ *и* $\xi_k \uparrow +\infty$ *такие, что*

(56c) $$x_{k+1} - x_k + \varphi_0(x_k) - \theta_0(x_k) = o(\varphi(x_k)) \quad \textit{при} \quad k \to \infty,$$

(56d) $$\xi_{k+1} - \xi_k + \theta_1(\xi_k) - \varphi_1(\xi_k) = o(\varphi(\xi_k)) \quad \textit{при} \quad k \to \infty,$$

(56e) *где* $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ *и* $\vartheta_x = \{x + iy\colon \theta_0(x) < y < \theta_1(x)\}$.

При выполнении этих условий $\lim_{x\to+\infty} \sigma(x)/\varphi(x) = 1$.

Разрез ϑ_x в (56e) строится, разумеется, по функции $\Theta = (\varphi_0 + \varphi_1)/2$.

Доказательство. Для любой L-полосы $\Phi(\varphi_0, \varphi_1) \subset \Omega$ легко проверить равносильность между (31) и условиями (56b)–(56e). Значит, при $\Omega \in D_\vartheta^\infty$

$$\Omega \in VO_\vartheta \quad \Leftrightarrow \quad (56) \qquad (\text{с соответствием } L\text{-полос } \Phi(\varphi_0, \varphi_1)).$$

Если имеет место (55), то верно свойство (v) теоремы 1, откуда $\Omega \in VO_\vartheta$ и потому выполнены условия (56).

Обратно, пусть выполнены условия (56), так что $\Omega \in VO_\vartheta$. Соотношение (47) устанавливает (55) для функции σ с $\sigma\big|_{\operatorname{dom}\varphi} = \varphi$.

Если выполнены условия (55) и (56), то сопоставление равенств (55) и (47) доказывает равенство $\lim_{x\to+\infty} \sigma(x)/\varphi(x) = 1$. □

Следствие 3. *Асимптотическая формула*

(57) $$(\forall\delta) \quad \lim_{w\in\Psi_\delta\colon \operatorname{Re} w\to+\infty} g'(w) = 1$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\textit{существуют } L\textit{-полоса } \Phi(\varphi_0, \varphi_1) \subset \Omega \textit{ с } \operatorname{acc}(\varphi_0 + \varphi_1)/2 = \operatorname{acc}\vartheta$$
$$\textit{и последовательности } x_k \uparrow +\infty \textit{ и } \xi_k \uparrow +\infty \textit{ такие, что } \varphi(+\infty) = 1$$
$$\textit{и } x_{k+1} - x_k + \varphi_0(x_k) - \theta_0(x_k) + \xi_{k+1} - \xi_k + \theta_1(\xi_k) - \varphi_1(\xi_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Доказательство. Непосредственно вытекает из следствия 2. □

Следствие 2 в сущности совпадает с теоремой 1 работы [22], в которой впервые появилось условие $\Omega \in VO_\vartheta$ (в форме (56)). При этом условие (v) нашей теоремы 1 возникло в доказательстве, однако отсутствует связь с группой условий (i)–(iii) работы [20]. Условия (iv), (vi) и (vii) представляются новыми.

Следствие 3 совпадает с теоремой 2 в [22] для $\beta = 1$. Отсюда логарифмическими заменами переменных в теореме 3 из [22] получен критерий выполнения аналога условия (57) — условия Виссера–Островского

(58) $$\lim_{w\to w_0 \text{ нетангенциально}} \frac{(w - w_0)G'(w)}{G(w) - G(w_0)} = 1.$$

Отображение G считается обладающим конечным угловым пределом $G(w_0)$ в конечной достижимой граничной точке w_0.

Книга [18] и работа [22] содержат ссылки на ряд работ по условию (58). В частности, равенство (58) и некоторые следствия из него изучаются в [11]. Предложение 4.11, теорема 11.7 и теорема 11.5 в [18] являются аналогами импликаций (52) $\Rightarrow$ (57) $\Rightarrow$ (VO) и следствия 3 для конечных граничных точек.

Наконец, пользуясь случаем, выведем из теорем 1 и 2 одну из форм критерия существования угловой производной [5, 20]. Другие варианты см. в [1, теорема V.5.7], [5, теорема 1], [18, теорема 11.9] и [20, теорема 6].

Следствие 4. *Свойство*

$$(59)\qquad (\forall\delta)\quad \lim_{w\in\Psi_\delta:\ \operatorname{Re} w\to+\infty}\{w-g(w)\}\in\mathbb{R}$$

равносильно совокупности условий (53a), (53b) *и*

$$(60)\qquad \lim_{x_1>x_0\to+\infty}\{\Lambda^{\Theta}_{[x_0,x_1]}+x_0-x_1\}=0,$$

где $\Theta\equiv 1/2$ — *постоянная функция с* $\operatorname{dom}\Theta=[X_{1/2},\infty)$, *см.* (53a).

Доказательство. Пусть верно (59). Тогда

$$(61)\qquad (\forall\delta)\quad \lim_{w\in\Psi_\delta:\ \operatorname{Re} w\to+\infty}\{\operatorname{Re} w-\operatorname{Re} g(w)\}\in\mathbb{R},$$

$$(62)\qquad (\forall\delta)\quad \lim_{w\in\Psi_\delta:\ \operatorname{Re} w\to+\infty}\{\operatorname{Im} w-\operatorname{Im} g(w)\}=0.$$

Свойство изогональности (62) по доказательству следствия 1 гарантирует, что $\Omega\in VO_\vartheta$ и имеют место условия (53a) и (53b).

Соотношения (53a), (53b) и $\Omega\in VO_\vartheta$ дают условие (ii) теоремы 1 для нашей функции $\Theta\equiv 1/2$. Делая замену $z=g(w)$ с помощью (45) и (46), имеем

$$(63)\qquad (\forall\delta)\ (\forall a\geqslant X_{1/2})\quad \lim_{w\in\Psi_\delta:\ \operatorname{Re} w\to+\infty}\{\operatorname{Re} w-\Lambda^{\Theta}_{[a,\operatorname{Re} g(w)]}\}\in\mathbb{R}.$$

В силу (61) и (63) при любом $a\geqslant X_{1/2}$

$$(64)\qquad \lim_{x\to+\infty}\{\Lambda^{\Theta}_{[a,x]}-x\}\in\mathbb{R}.$$

Пусть $\varepsilon>0$. Для некоторого a по условию (iii) теоремы 1

$$x_1>x_0>a\quad\Rightarrow\quad |\Lambda^{\Theta}_{[a,x_1]}-\Lambda^{\Theta}_{[a,x_0]}-\Lambda^{\Theta}_{[x_0,x_1]}|\leqslant\varepsilon.$$

Поэтому $\overline{\lim}_{x_1>x_0\to+\infty}|\Lambda^{\Theta}_{[x_0,x_1]}+x_0-x_1|\leqslant\varepsilon$, что доказывает (60).

Обратно, пусть справедливы условия (53a), (53b) и (60). Легко проверить включение $\Omega\in E^{\infty}_{\vartheta,\Theta}$ и условие (iii) теоремы 1. Отсюда $\Omega\in VO_\vartheta$ и верно (63).

Возьмем $a\geqslant X_{1/2}$ такое, что $|\Lambda^{\Theta}_{[a,x]}+a-x|\leqslant 1$ при $x>a$. Тогда

$$\varepsilon=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\{\Lambda^{\Theta}_{[a,x]}-x\}-\underline{\lim_{x\to+\infty}}\{\Lambda^{\Theta}_{[a,x]}-x\}\in[0,2].$$

Если $\varepsilon>0$, то для некоторого $x_0>a$

$$\Lambda^{\Theta}_{[a,x_0]}-x_0\geqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\{\Lambda^{\Theta}_{[a,x]}-x\}-\varepsilon/3,$$

$$(\forall x_1>x_0)\quad |\Lambda^{\Theta}_{[x_0,x_1]}+x_0-x_1|\leqslant\varepsilon/3.$$

По последовательному правилу для экстремальной длины [1, с. 135]

$$\Lambda^{\Theta}_{[a,x_1]}\geqslant\Lambda^{\Theta}_{[a,x_0]}+\Lambda^{\Theta}_{[x_0,x_1]}\geqslant x_1+\underline{\lim_{x\to+\infty}}\{\Lambda^{\Theta}_{[a,x]}-x\}+\varepsilon/3.$$

Это противоречит определению нижнего предела, откуда $\varepsilon=0$ и верно (64).

Из (63) и (64) следует (61), так что

$$(\forall\delta)\quad \lim_{w\in\Psi_\delta:\ \operatorname{Re} w\to+\infty}g'(w)=1.$$

Отсюда $\varphi(+\infty)=1$ по (47) и $\varphi_0(+\infty)=0$ и $\varphi_1(+\infty)=1$ в силу (53a) и (53b). Доказательство следствия 1 дает свойство изогональности (62). Теперь ввиду (61) и (62) получаем (59). □

4. Комментарии к доказательству основной теоремы

Шаг 1 доказательства теоремы 1 большей частью следует работе [20]. При выводе импликации (iii) $\Rightarrow$ (i) применена оценка (14). В [20, с. 472] и [18, с. 258] для аналогичной цели привлечены «качественные» соотношения, выводимые с помощью отражений относительно прямых $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 0$ и $\operatorname{Im} z = 1$ и теоремы Каратеодори о ядре. В [1, с. 183] соответствующее рассуждение отсутствует, что представляется некорректным.

Шаг 2 включает ряд идей, использованных другими авторами, в частности, при доказательстве критериев из § 3. Наибольшая новизна присуща выводу импликации (iv) $\Rightarrow$ (v).

Построение L-полосы $\Phi(\phi_0, \phi_1)$ сходно с [22, с. 129].

Доказательство импликации (vii) $\Rightarrow$ (viii) близко доказательству в [1, с. 178] необходимости в критерии изогональности. В нем для изучения одного отображения рассматривается последовательность замен переменных. Ряд подобных приложений нормальных семейств приведен в [10, гл. III] и [23, § 2.8–2.9].

Вывод импликации (viii) $\Rightarrow$ (i) основан на использовании гармоничности функции $\operatorname{Im} f$ внутри области Ω и леммы типа Вольфа близ границы. Внятное применение этой идеи содержится в доказательстве из [26, с. 87–88] достаточности в критерии изогональности. Мы заменили асимптотическое утверждение типа Фрагмена–Линделёфа для полуполосы на лемму 1, а лемму Вольфа — на лемму 8. Сходная идея ранее встретилась в [8, с. 124] при доказательстве первой теоремы Островского о складках.

References

[1] J.B. Garnett, D.E. Marshall, *Harmonic Measure*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005. Zbl 1077.31001

[2] C. Gattegno, A. Ostrowski, *Représentation conforme à la frontière; domaines particuliers*, Mémorial Sci. Math., Gauthier-Villars, Paris, **110** (1949), 1–56. Zbl 0040.33102

[3] G.M. Goluzin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, AMS, Providence, 1969. (Russian original: 1966) Zbl 0183.07502

[4] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis. Vol. III*, John Wiley & Sons, New York, 1986. Zbl 0578.30001

[5] J.A. Jenkins, K. Oikawa, *Conformality and semi-conformality at the boundary*, J. Reine Angew. Math., **291** (1977), 92–117. Zbl 0339.30024

[6] R. Kühnau, *Bibliography of Geometric Function Theory*, Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. Vol. 2. Ed. R. Kühnau, Elsevier, Amsterdam (2005), 809–828. Zbl 1064.30001

[7] M. Lavrentiev, *On the continuity of univalent functions in closed domains* (Russian), C. R. (Doklady) Acad. Sci. U.S.S.R. New Ser., **4**:5 (1936), 207–209. Zbl 0016.16903

[8] J. Lelong-Ferrand, *Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée*, Gauthier-Villars, Paris, 1955. Zbl 0064.32204

[9] E. Lindelöf, *Sur la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur l'aire d'un cercle*, Quatrième Congrès des Math. Scand. 1916 (1916), 59–90. JFM 47.0322.04

[10] P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1927. (Russian translation: 1936) JFM 53.0303.02

[11] A. Ostrowski, *Über den Habitus der konformen Abbildung am Rande des Abbildungsbereiches*, Acta Math., **64** (1935), 81–184. Zbl 0012.02503

[12] A. Ostrowski, *Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung*, Prace Mat.-Fiz., **44** (1936), 371–471. Zbl 0020.23802

[13] A. Ostrowski, *Collected Mathematical Papers. Vol. 6: XIV: Conformal Mapping. XV: Numerical Analysis. XVI: Miscellany*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1985. Zbl 0563.01026

[14] A.I. Parfenov, *Error bound for a generalized M.A. Lavrentiev's formula via the norm of a fractional Sobolev space* (Russian), Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 335–377. Zbl 1330.35070

[15] A.I. Parfenov, *Series in a Lipschitz perturbation of the boundary for solving the Dirichlet problem*, Siberian Advances in Mathematics, **27**:4 (2017), 274–304. Zbl 1399.35148

[16] A.I. Parfenov, *Discrete Hölder estimates for a certain kind of parametrix. II*, Ufa Math. J., **9**:2 (2017), 62–91.

[17] A.I. Parfenov, *Approximate calculation of the defect of a Lipschitz cylindrical condenser* (Russian), Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 906–926. Zbl 1400.31003

[18] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer, Berlin, 1992. Zbl 0762.30001

[19] B. Rodin, S.E. Warschawski, *On conformal mapping of L-strips*, J. London Math. Soc. II. Ser., **11** (1975), 301–307. Zbl 0317.30008

[20] B. Rodin, S.E. Warschawski, *Extremal length and the boundary behavior of conformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., **2** (1976), 467–500. Zbl 0348.30007

[21] B. Rodin, S.E. Warschawski, *Estimates for conformal maps of strip domains without boundary regularity*, Proc. London Math. Soc. III. Ser., **39** (1979), 356–384. Zbl 0415.30014

[22] B. Rodin, S.E. Warschawski, *On the derivative of the Riemann mapping function near a boundary point and the Visser-Ostrowski problem*, Math. Ann., **248**:2 (1980), 125–137. Zbl 0411.30001

[23] J.L. Schiff, *Normal Families*, Springer-Verlag, New York, 1993. Zbl 0770.30002

[24] J. Väisälä, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Springer, Berlin, 1971. Zbl 0221.30031

[25] S.E. Warschawski, *On conformal mapping of infinite strips*, Trans. Amer. Math. Soc., **51** (1942), 280–335. Zbl 0028.40303

[26] S.E. Warschawski, *On the boundary behavior of conformal maps*, Nagoya Math. J., **30** (1967), 83–101. Zbl 0179.39402

Anton Igorevich Parfenov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: parfenov@math.nsc.ru