

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 121–143 (2019)
DOI 10.33048/semi.2019.16.006

УДК 517.958:533.7
MSC 35B06, 35Q35

ГРАФ ВЛОЖЕННЫХ ПОДАЛГЕБР 11-МЕРНОЙ АЛГЕБРЫ
СИММЕТРИЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Т.Ф. МУКМИНОВ, С.В. ХАБИРОВ

ABSTRACT. We consider 11-dimensional Lie algebra for the models of the continuous medium mechanics. It is required to represent the graph of embedded subalgebras with the help of the optimal system. To this end inner automorphisms are considered. With the help of inner automorphisms important embeddings of subalgebras of smaller dimension into subalgebras of larger dimension are found. The table of rotation subalgebras of the dimensions from 1 to 11 is constructed. This table contains the important embeddings which are not composition of embeddings by means of subalgebras of the intermediate dimensions. The subalgebras no containing simple subalgebra of rotations can be embedded importantly only in subalgebras of dimension no more than two units. The subgraph of embedded subalgebras containing the simple subalgebra of rotations is constructed as the tree. The same construction is made for the subgraph of embedded subalgebras containing one operator of the rotation, operators of extension and time translation.

Keywords: Lie algebra of symmetries, optimal system of subalgebras, subgraph of embedded subalgebras, inner automorphism of algebra, subalgebra of rotations.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения механики сплошной среды инвариантны относительно группы Галилея, расширенной растяжением [1]. В качестве примера будем иметь в виду уравнения газовой динамики:

МУКМИНОВ, Т.Ф., ХАБИРОВ, С.В., GRAF OF EMBEDDED SUBALGEBRAS OF 11-DIMENSIONAL SYMMETRY ALGEBRA FOR CONTINUOUS MEDIUM.

© 2019 МУКМИНОВ Т.Ф., ХАБИРОВ С.В.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10071_МК) .

Поступила 3 июля 2018 г., опубликована 28 января 2019 г.

$$\begin{aligned}
D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p &= 0, \\
D\rho + \rho\nabla\vec{u} &= 0, \\
DS &= 0, \\
p &= f(\rho, S) \text{ – уравнение состояния,}
\end{aligned}$$

где \vec{u} – скорость, $D = \partial_t + \vec{u}\nabla$ – оператор дифференцирования, ρ , p , S – плотность, давление и энтропия соответственно.

Группе соответствует 11-мерная алгебра Ли L_{11} . В L_{11} бесконечно много подалгебр. Внутренние автоморфизмы позволяют перечислить подалгебры, выбирая в классе подобных подалгебр лишь одного представителя. Выбранные представители образуют оптимальную систему. Как правило, строят оптимальные системы для подалгебр малой размерности от 1 до 4 [3]–[10]. Это связано с тем, что обычно рассматривают инвариантные решения. Но не менее важны частично инвариантные и дифференциально инвариантные решения [11]–[15]. Поэтому необходимо знать оптимальную систему для подалгебр любой размерности.

Для каждой подалгебры можно построить подмодель сплошной среды с меньшим числом независимых переменных. Множество подмоделей образуют иерархию: решения одной подмодели являются частными решениями некоторой другой подмодели. Эта подмодель построена по подалгебре, вложенной в подалгебру, по которой построена первая подмодель. Поэтому абстрактная иерархия представляется графом вложенных подалгебр [2].

Сложность представления графа заключается в следующем. Во-первых, в оптимальной системе указано по одному представителю из класса подобных с точностью до внутренних автоморфизмов. Необходимо подобрать другого представителя, чтобы утверждать вложена подалгебра в другую или нет. Во-вторых, возникает огромное количество подалгебр, которые вложены в фиксированную подалгебру. Поэтому изобразить граф в виде дерева (стрелок) не представляется возможным даже для подалгебр малой размерности от 1 до 4. Попытки представить деревья подграфов сделаны в работах [16, 17]. Кустарник идеалов сделан в работе [18].

Основная задача работы состоит в том, чтобы придумать как представить граф вложенных подалгебр в виде таблицы для подалгебр любой размерности.

Уравнения модели сплошной среды инвариантны относительно следующих преобразований, которые образуют группу Галилея [19]:

1) перенос по времени $R^1(t)$

$$t' = t + a_0,$$

2) переносы по пространству $R^3(\vec{x})$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a},$$

3) вращения

$$\vec{x}' = O\vec{x}, \vec{u}' = O\vec{u}, OO^T = I, \det O = 1,$$

4) галилеевы переносы

$$\vec{x}' = \vec{x} + t\vec{b}, \vec{u}' = \vec{u} + \vec{b},$$

5) равномерное растяжение времени и пространства $R^4(t, \vec{x})$

$$\vec{x}' = c\vec{x}, t' = ct,$$

где a_0, \vec{a}, \vec{b}, c — постоянные групповые параметры, O — произвольный поворот вокруг некоторой оси на некоторый угол, который можно представить как суперпозицию трех поворотов вокруг декартовых осей:

$$O = O_{\varphi_1} O_{\varphi_2} O_{\varphi_3},$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — постоянные углы поворота.

Суперпозиция этих преобразований образует 11-параметрическую группу Ли G_{11} . Алгебра Ли L_{11} этой группы задается базисом операторов в декартовой системе координат [20]

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, & X_3 &= \partial_z, & X_4 &= t\partial_x + \partial_u, & X_5 &= t\partial_y + \partial_v, \\ X_6 &= t\partial_z + \partial_w, & X_7 &= y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, & X_8 &= z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \\ X_9 &= x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, & X_{10} &= \partial_t, & X_{11} &= t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z. \end{aligned}$$

Алгебра Ли L_{11} — это линейное пространство, замкнутое относительно коммутатора: $X, Y \in L_{11} \Rightarrow [X, Y] = XY - YX \in L_{11}$. В этом можно убедиться из таблицы коммутаторов, где вместо операторов $X_i, i = \overline{1, 11}$ пишутся их номера, а в пустых клетках стоит ноль.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1								-3	2		1
2							3		-1		2
3							-2	1			3
4								-6	5	-1	
5							6		-4	-2	
6							-5	4		-3	
7		-3	2		-6	5		-9	8		
8	3		-1	6		-4	9		-7		
9	-2	1		-5	4		-8	7			
10				1	2	3					10
11	-1	-2	-3							-10	

Подалгебра алгебры L_{11} — это линейное подпространство, замкнутое относительно коммутатора. Подалгебры можно перечислить с точностью до внутренних автоморфизмов [1]. Внутренние автоморфизмы — это линейные преобразования в L_{11} , сохраняющие таблицу коммутаторов и вычисляемые по правилу: для каждого $Y \in L_{11}$ решается задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} X' &= [X', Y], \\ X'|_{a=0} &= X \in L_{11}. \end{aligned}$$

Это дифференциальное уравнение в алгебре L_{11} эквивалентно линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для координат в фиксированном базисе $X' = x'^i X_i, X = x^i X_i$. В качестве Y можно взять базисные операторы. Тогда внутренние автоморфизмы задаются следующими равенствами [1]

$$\begin{aligned} T : p_1(x') &= p_1(x) + x^{11}\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_1 \times p_3(x); \\ \Gamma : p_1(x') &= p_1(x) - x^{10}\vec{\alpha}_2, p_2(x') = p_2(x) - \vec{\alpha}_2 \times p_3(x); \\ S : p_1(x') &= Sp_1(x), p_2(x') = Sp_2(x), p_3(x') = Sp_3(x); \\ A_{10} : p_1(x') &= p_1(x) + a_{10}p_2(x), x^{10'} = x^{10} + a_{10}x^{11}; \end{aligned}$$

$$A_{11} : p_1(x') = a_{11}p_1(x), x^{10'} = a_{11}x^{10},$$

где $x = (p_1(x), p_2(x), p_3(x), x^{10}, x^{11})$, $p_1(x) = (x^1, x^2, x^3)$, $p_2(x) = (x^4, x^5, x^6)$, $p_3(x) = (x^7, x^8, x^9)$, $\vec{\alpha}_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\alpha}_2 = (a_4, a_5, a_6)$ и S — матрица поворота, зависящая от трех параметров: a_7, a_8, a_9 . Не указанные в преобразованиях $T, \Gamma, S, A_{10}, A_{11}$ координаты остаются инвариантными. Также замечены дискретные автоморфизмы

$$\epsilon_1 : p_1(x') = -p_1(x), p_2(x') = -p_2(x);$$

$$\epsilon_2 : p_2(x') = -p_2(x), x^{10'} = -x^{10}.$$

С точностью до внутренних автоморфизмов подалгебры различных размерностей приведены в [18, 20]. Это оптимальная система серий классов подобных подалгебр. Параметры серий являются инвариантами внутренних автоморфизмов. С помощью оптимальной системы можно определить вложена ли фиксированная подалгебра из оптимальной системы в некоторую подалгебру большей размерности из оптимальной системы. Для этого нужно использовать внутренние автоморфизмы.

В таблице оптимальной системы из приложения в [20] введены следующие обозначения. Подалгебры записаны в виде символа $k.n$, где k — размерность подалгебры, n — порядковый номер подалгебры в данной размерности. Базис подалгебры образован линейными комбинациями операторов X_i . В оптимальной системе вместо X_i пишутся их номера i . Например, подалгебра 2.20 имеет базис

$$a1 + c3 + 5 = aX_1 + cX_3 + X_5, b1 + d2 + 6 = bX_1 + dX_2 + X_6,$$

$$a^2 + b^2 + (c+d)^2 = 1 - \text{уравнение на инварианты внутренних автоморфизмов.}$$

Целью работы является указать всевозможные вложения подалгебр. Таких вложений огромное количество, поэтому граф вложений необозрим, если представлять его с помощью стрелок. Предлагается записать граф в виде таблицы, в которой указаны только непосредственные вложения. То есть, вложение подалгебры L_k размерности k в подалгебру L_m размерности m , $m > k$ не указывается, если L_k вложена в подалгебру L_l размерности l , $k < l < m$, вложенную в L_m .

Таблица устроена следующим образом. В первом столбце указана размерность подалгебры. Во втором столбце — порядковый номер подалгебры данной размерности. В третьем — базисные операторы подалгебры. При наличии уравнений на инварианты внутренних автоморфизмов, они указаны после точки с запятой. В четвертом столбце — подалгебры, в которые вложена рассматриваемая подалгебра. Размерность этих подалгебр возрастает, а порядковый номер внутри каждой размерности убывает. Подалгебры разных размерностей разделяются точкой с запятой. Каждая размерность k , $k = \overline{2, 11}$, указывается не более одного раза при первом появлении подалгебры размерности k . Для остальных подалгебр размерности k указываются только их порядковые номера. Если в четвертом столбце, начиная с некоторой подалгебры с порядковым номером n , подалгебры одной размерности идут подряд до подалгебры с порядковым номером m , $m > n + 1$, то это записывается в виде $n-m$. Прочерк для подалгебр какой-то размерности означает, что рассматриваемая подалгебра не вкладывается в подалгебры этой размерности или непосредственно не вкладывается. После всех подалгебр, в которые непосредственно вкладывается рассматриваемая подалгебра, ставится точка.

2. ВЛОЖЕННЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Приведем алгоритм поиска вложения подалгебры L_k размерности k в подалгебру L_m размерности $m > k$.

1. Как правило, к подалгебре L_k или L_m необходимо применить преобразования автоморфизмов так, чтобы в результате этого базисные операторы подалгебры, эквивалентной L_k , стали бы представимы в виде линейной комбинации элементов базиса подалгебры, эквивалентной L_m .

2. После этого найденное вложение нужно проверить методом перебора, является ли оно непосредственным. Если в таблице указано вложение L_k в подалгебру L_l размерности l , $k < l < m$, вложенную в L_m , найденное вложение не указывается в таблице графа.

3. Найденное вложение заносится в таблицу. Некоторые вложения могут быть получены только при определенных значениях параметров серии подалгебр. Они указываются в круглых скобках. Для коэффициентов L_k выражения в скобках стоят перед подалгеброй L_m , а для коэффициентов L_m — после самой L_m .

Процесс поиска вложений можно разбить на следующие этапы.

1. Вложение одномерных подалгебр в двумерные.

Рассмотрим в качестве примера вложение подалгебры 1.11 в 2.21

$$1.11 = \{3 + 4\}, 2.21 = \{3 + 5, 2 - 6\}.$$

Применим к 1.11 преобразование S . В результате поворота вокруг оси 3 на угол 90° подалгебра подобна подалгебре: $1.11 \sim \{3 + 5\}$, которая очевидно вложена в 2.21.

2. Вложение двумерных подалгебр в трехмерные.

Рассмотрим в качестве примера вложение подалгебры 2.20 в 3.35

$$2.20 = \{a1 + c3 + 5, b1 + d2 + 6\}, a^2 + b^2 + (c + d)^2 = 1,$$

$$3.35 = \{a1 + 4, b3 + 5, b2 - 6\}, a^2 + b^2 = 1.$$

Составим линейную комбинацию из двух базисных операторов 3.35. Сложим второй оператор с первым, умноженным на коэффициент k , и раскроем скобки. В результате 3.35 примет вид

$$3.35 \sim \{ak1 + b3 + k4 + 5, b2 - 6, b3 + 5\}$$

Применим к подалгебре 3.35 преобразование S . Поворотами вокруг осей 3 и 6 на угол φ приведем часть первого оператора $k4 + 5$ к виду $\gamma 5$, где $\gamma = \sqrt{k^2 + 1}$, а $\text{ctg } \varphi = k$ в соответствии с рисунком 1.

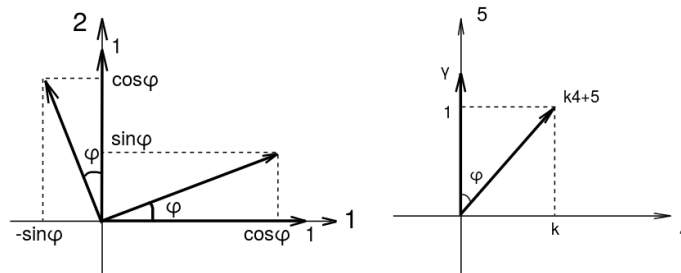


Рис. 1. Повороты вокруг осей 3 и 6 на угол φ векторов 1, 2 и $k4 + 5$ подалгебры 3.35

$$3.35 \sim \{ak(\cos \varphi 1 + \sin \varphi 2) + b3 + \gamma 5, b(\cos \varphi 2 - \sin \varphi 1) - 6, b3 + \cos \varphi 5 - \sin \varphi 4\}.$$

Преобразование A_{10} с коэффициентом $a_{10} = -ak \sin \varphi$ приводит базисные операторы к виду

$3.35 \sim \{\alpha_1 1 + \alpha_2 3 + 5, \beta_1 1 + \beta_2 2 - 6, \gamma_1 3 + \gamma_2 4 + \gamma_3 5\}$, где $\alpha_1 = ak\gamma^{-1} \cos \varphi$, $\alpha_2 = b\gamma^{-1}$, $\beta_1 = -b \sin \varphi$, $\beta_2 = b \cos \varphi$. Подалгебра 2.20 очевидно содержится в полученной подалгебре.

3. Вложение одномерных подалгебр в трехмерные.

Приведем в качестве примера вложение подалгебры 1.11 в 3.38

$$1.11 = \{3 + 4\}, 3.38 = \{a1 + 3, 5, 6\}.$$

Чтобы из базисных операторов 3.38 можно было составить линейную комбинацию, равную $3 + 4$, необходимо, чтобы коэффициент a был равен нулю. Тогда $3.38 = \{3, 5, 6\}$. С помощью поворота S вокруг оси 3 на угол 90° можно привести подалгебру к виду $3.38 \sim \{3, 4, 6\}$. Сумма первых двух операторов даст подалгебру 1.11.

Не было найдено какой-либо двумерной подалгебры, через которую 1.11 вкладывается в 3.38. Поэтому для 1.11 в таблице указывается 3.38 ($a = 0$).

В качестве второго примера рассмотрим подалгебры

$$1.3 = \{7\}, 3.3 = \{4, 7, 11\}.$$

Без каких-либо преобразований 1.3 вкладывается в 3.3. Однако, 1.3 вложена в 2.1 при $a = 0$, а 2.1 – в 3.3. Следовательно, вложение 1.3 в 3.3 не указывается в таблице.

4. Вложение трехмерных подалгебр в четырехмерные.

Рассмотрим в качестве примера вложение подалгебры 3.28 в 4.38

$$3.28 = \{1, 2 + 4, 10\}, 4.38 = \{2, 3, 5, 10\}.$$

Применим к подалгебре 4.38 оператор вращения S вокруг биссектрисы трехгранного угла декартовых осей на угол 120° в соответствии с рисунком 2.

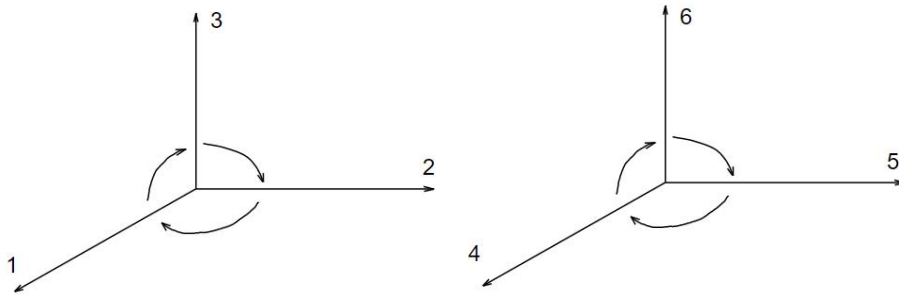


Рис. 2. Повороты вокруг биссектрис трехгранных углов на угол 120° в пространствах 1, 2, 3 и 4, 5, 6 для подалгебры 4.38

Тогда $4.38 \sim \{1, 2, 4, 10\}$. Можно представить базис 3.28 в виде линейной комбинации базиса эквивалентной подалгебры 4.38. Следовательно, вложение указывается в таблице.

В качестве второго примера рассмотрим подалгебры 3.37 и 4.42. Для удобства восприятия вернемся к исходным обозначениям: вместо номера базисного оператора i используем их полное обозначение X_i .

$$3.37 = \{aX_1 + X_3, bX_1 + X_5, cX_1 + dX_2 + X_6\}, b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

$$4.42 = \{X_1, X_4, X_3 + X_5, X_2 - X_6\}.$$

Сделаем поворот S вокруг осей 2 и 5 на угол φ такой, что базисный элемент X_1 примет вид $aX_1 + X_3$, где $\operatorname{tg} \varphi = a$ в соответствии с рисунком 3.

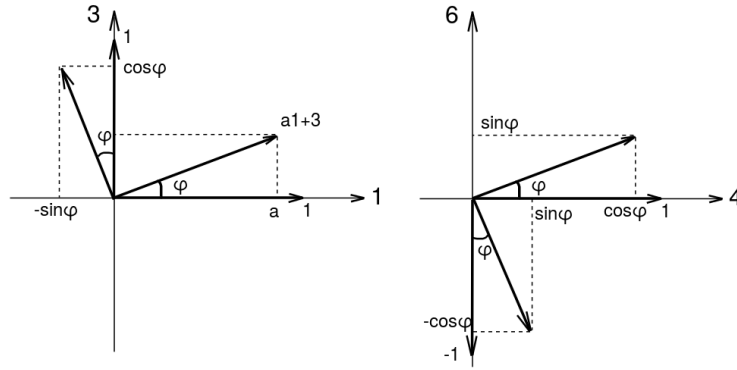


Рис. 3. Повороты вокруг осей 2 и 5 на угол φ векторов X_1, X_3, X_4 и $-X_6$ подалгебры 4.42

Тогда $\sin \varphi = a(a^2 + 1)^{-1/2}$, $\cos \varphi = (a^2 + 1)^{-1/2}$,
 $4.42 \sim \{aX_1 + X_3, aX_4 + X_6, -X_1 \sin \varphi + X_3 \cos \varphi + X_5,$
 $X_2 + X_4 \sin \varphi - X_6 \cos \varphi\}$.

Составим из базисных операторов 4.42 линейные комбинации. Сложим третий базисный оператор с первым, умноженным на $-\cos \varphi$,
 $-X_1 \sin \varphi + X_3 \cos \varphi + X_5 - \cos \varphi(aX_1 + X_3) = X_5 - (\sin \varphi + a \cos \varphi)X_1 =$
 $X_5 - X_1 \sqrt{a^2 + 1}$. Из этого следует, что вложение получится, если параметр $b = -\sqrt{a^2 + 1}$.

Затем сложим второй и четвертый базисные операторы, умноженные на $-\sin \varphi$ и на a соответственно. Получим равенство

$$a(X_2 + X_4 \sin \varphi - X_6 \cos \varphi) - \sin \varphi (aX_4 + X_6) = aX_2 - (\sin \varphi + a \cos \varphi)X_6 = aX_2 - X_6 \sqrt{a^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{a^2 + 1} \left[a(a^2 + 1)^{-1/2} X_2 - X_6 \right].$$

Это значит, что вложение получится, если параметр $c = 0$, а параметр $d = a(a^2 + 1)^{-1/2}$.

Полученное вложение будет указано в таблице следующим образом
 $(b = -\sqrt{a^2 + 1}, c = 0, d = a(a^2 + 1)^{-1/2})$ 4.42.

5. Вложение двумерных подалгебр в четырехмерные.

Приведем в качестве примера вложение подалгебры 2.23 в 4.41

$$2.23 = \{\tilde{a}1 + 2, 3 + 4\},$$

$$4.41 = \{1, a^2 + b^3 + 4, c^3 + 5, d^2 + 6\}, a^2 + b^2 + (c + d)^2 = 1.$$

Рассмотрим два случая.

1) $\tilde{a} = 0$. При этом $2.23 = \{2, 3 + 4\}$. Преобразованием вращения S вокруг оси 3 повернем оператор 2 в 1, тогда $3 + 4$ перейдет в $3 - 5$. $2.23 \sim \{1, 3 - 5\}$. Применим дискретное преобразование $\epsilon_2 : 2.23 \sim \{1, 3 + 5\}$.

Преобразование A_{11} позволяет умножать $p_1(x)$ на любой постоянный коэффициент. Значит, в таблице укажем $(\tilde{a} = 0)$ 4.41.

2) $\tilde{a} \neq 0$. Применим оператор вращения S вокруг оси 3 на угол φ такой, что базисный элемент $\tilde{a}1 + 2$ примет вид $\gamma 1$, где $\gamma = \sqrt{\tilde{a}^2 + 1}$, а $\operatorname{ctg} \varphi = \tilde{a}$ в соответствии с рисунком 4.

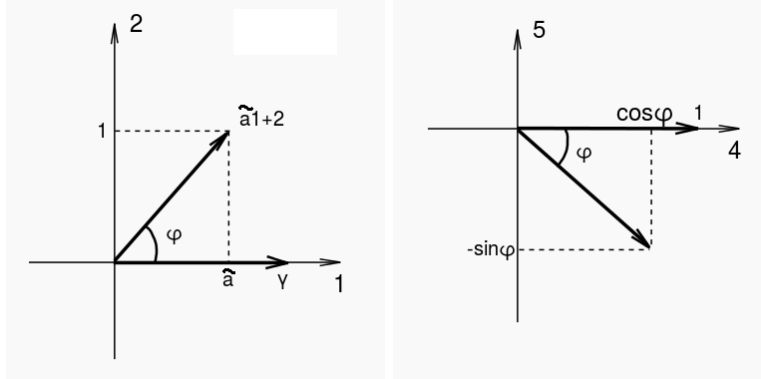


Рис. 4. Повороты вокруг осей 3 и 6 на угол φ векторов $\tilde{a}1 + 2$ и 4 подалгебры 2.23

Тогда $2.23 \sim \{1, 3 + \cos \varphi 4 - \sin \varphi 5\}$.

Сложим второй и третий базисные операторы 4.41, умножив их на $\cos \varphi$ и на $-\sin \varphi$ соответственно

$$\cos \varphi (2 + b3 + 4) - \sin \varphi (c3 + 5) = a \cos \varphi 2 + (b \cos \varphi - c \sin \varphi)3 + \cos \varphi 4 - \sin \varphi 5.$$

Чтобы 2.23 была подалгеброй 4.41, коэффициент a должен быть равен 0. Величину $b \cos \varphi - c \sin \varphi$ можно сделать равной единице с помощью преобразования A_{11} . Итак, найдено вложение подалгебры 2.23 в подалгебру

$$(\tilde{a} = 0) 4.41 \vee (\tilde{a} \neq 0) 4.41 (a = 0), \text{ где } \vee - \text{логическое "или"}.$$

Не было найдено какой-либо трехмерной подалгебры, через которую 2.23 вкладывается 4.41, поэтому в таблице найденное вложение указывается.

В качестве второго примера рассмотрим подалгебры

$$2.24 = \{a1 + 2, 4\}, 4.43 = \{1, 4, 5, 6\}.$$

Применим к 2.24 оператор вращения S вокруг оси 3 на угол φ такой, что базисный оператор $a1 + 2$ примет вид $\gamma 1$, где $\gamma = \sqrt{a^2 + 1}$, а $\operatorname{ctg} \varphi = a$ в соответствии с рисунком 5.

Тогда $2.24 \sim \{1, \cos \varphi 4 - \sin \varphi 5\}$. Подалгебру можно представить в виде линейной комбинации операторов 4.43, тогда 2.24 вкладывается в 4.43. Однако, в таблице указаны следующие вложения: $2.24 \rightarrow (a = 0) 3.41$, $3.41 \rightarrow 4.43$. Это значит, что подалгебра 2.24 вкладывается в 4.43 без промежуточных вложений только тогда, когда ее параметр a не равен нулю.

6. Вложение одномерных подалгебр в четырехмерные.

Рассмотрим в качестве примера вложение подалгебры 1.9 в 4.39

$$1.9 = \{4 + 10\}, 4.39 = \{1, 2, 3, 4 + 10\}.$$

Легко заметить, что 1.9 вкладывается в 4.39. Однако, с помощью таблицы можно найти следующую цепочку вложений $1.9 \rightarrow 2.19 \rightarrow 3.31 \rightarrow 4.39$. Следовательно, найденное вложение в таблице не указывается.

Методом перебора было обнаружено, что нет ни одного вложения одномерной подалгебры в четырехмерную без промежуточных вложений. То есть, для каждой 1-мерной подалгебры, вложенной в 4-мерную, существует подалгебра

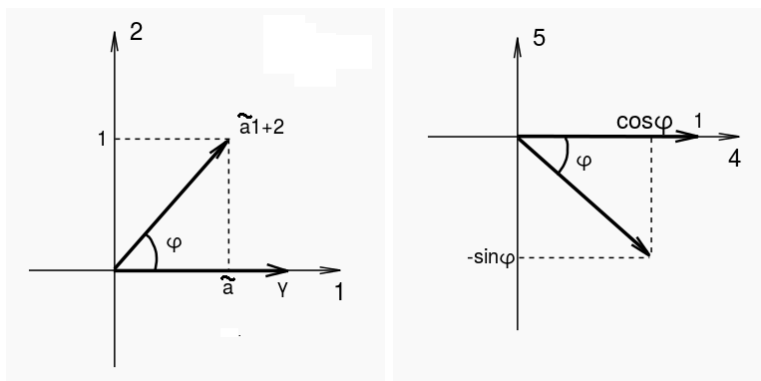


Рис. 5. Повороты вокруг осей 3 и 6 на угол φ векторов $a_1 + 2$ и 4 подалгебры 2.24

размерности 2 или 3, в которую вложена 1-мерная подалгебра и которая вложена в 4-мерную подалгебру.

Были проведены следующие рассуждения

- 1) для каждой 1-мерной подалгебры найдены все 2-мерные подалгебры, содержащие 1-мерную;
- 2) для каждой 2-мерной подалгебры найдены все 3-мерные подалгебры, содержащие 2-мерную;
- 3) для каждой 1-мерной подалгебры найдены все 3-мерные подалгебры, содержащие 1-мерную, и исключены те, в которые 1-мерная входит через некоторую 2-мерную;
- 4) для каждой 3-мерной подалгебры найдены все 4-мерные подалгебры, содержащие 3-мерную;
- 5) для каждой 2-мерной подалгебры найдены все 4-мерные подалгебры, содержащие 2-мерную, и исключены те, в которые 2-мерная входит через некоторую 3-мерную;
- 6) для каждой 1-мерной подалгебры найдены все 4-мерные подалгебры, содержащие 1-мерную, и для каждой нашлась подалгебра размерности 2 или 3, в которую вложена 1-мерная и которая вложена в 4-мерную, а значит, в таблице нет 4-мерных подалгебр в списке одномерных.

Таким образом, на первом этапе составлена таблица графа вложенных подалгебр размерностей от 1 до 4.

3. ВЛОЖЕНИЕ ПОДАЛГЕБР РАЗМЕРНОСТИ БОЛЬШЕ 4

Были проведены следующие рассуждения.

Для каждой подалгебры L_k размерности k , $k = \overline{1, 10}$, найдены все подалгебры L_m размерности m , $m = \overline{5, 11}$, $m > k$, содержащие L_k , и исключены те, в которые L_k входит через некоторую подалгебру L_l размерности l , $k < l < m$, или цепочки подалгебр, вложенных в L_m . Вложение в L_{11} выполняется для любой подалгебры.

Рассмотрим в качестве примера подалгебры

- 1) $1.11 = \{3 + 4\}$, $8.5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11\}$.

Без каких-либо преобразований 1.11 вкладывается в 8.5. Однако, с помощью оптимальной системы можно найти следующую цепочку вложений:

$$1.11 \rightarrow 2.25 \rightarrow 3.45 \rightarrow 4.48 \rightarrow 5.37 \rightarrow 6.25 \rightarrow 7.15 \rightarrow 8.5$$

Следовательно, найденное вложение в таблице не указывается.

$$2) 3.13 = \{1, 4, 7\}, 9.2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Легко заметить, что 3.13 вкладывается в 9.2. Занести найденное вложение в таблицу не дает следующая цепочка $3.13 \rightarrow 5.25 \rightarrow 7.12 \rightarrow 9.2$

$$3) 4.2 = \{7, 8, 9, 10\}, 7.3 = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}.$$

Выполнено вложение 4.2 в 7.3. В оптимальной системе нет подалгебр размерности 5 или 6, через которую 4.2 вкладывалась в 7.3. Следовательно, найденное вложение заносится в таблицу. Будем говорить, что подалгебра 4.2 непосредственно вложена в подалгебру 7.3. Справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. Подалгебры, не содержащие простую подалгебру вращений $\{X_7, X_8, X_9\}$, могут непосредственно вкладываться только в подалгебры размерности на одну или две единицы большей исходной подалгебры. Если такая подалгебра вложена в подалгебру размерности больше чем на две единицы исходной размерности, то существует цепочка вложенных подалгебр промежуточной размерности.

Предложение 2. Подалгебры, содержащие простую подалгебру вращений $\{X_7, X_8, X_9\}$, могут непосредственно вкладываться только в подалгебры размерности не более трех единиц большей исходной подалгебры.

Эти утверждения проверены непосредственно построением цепочки вложенных подалгебр. Но иногда для выбранной подалгебры, вложенной в подалгебру большой размерности, достаточно найти подалгебру промежуточной размерности в подалгебре большей размерности, содержащей выбранную подалгебру. Все непосредственные вложения представлены в таблице графа вложенных подалгебр (см. приложение).

4. НАГЛЯДНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОДГРАФОВ В ВИДЕ СТРЕЛОК

Таблицу вложенных подалгебр наглядно изобразить в виде стрелок на плоскости не удастся, в виду огромного пересечения стрелок. Потому выбраны подграфы, содержащие замечательные трехмерные подалгебры: одна простая (Рис. 6), другая разрешимая (Рис. 7). Также частично построены подграфы, состоящие из некоторых одномерных подалгебр и подалгебр, в которые данные подалгебры вложены (Рис. 8 и Рис. 9).

Простая подалгебра состоит из операторов вращений. Разрешимая подалгебра состоит из оператора переноса по времени, одного оператора вращения и оператора растяжения. В подграфе, содержащем разрешимую подалгебру, представлены только подалгебры, содержащие трехмерную подалгебру 3.2, включая саму 3.2.

Подграфы представлены на рисунках ниже. Входящие в них подалгебры изображены в виде прямоугольников, внутри которых написаны размерность и порядковый номер внутри размерности подалгебры, разделенные точкой. Вложения обозначены стрелками, соединяющими соответствующие подалгебры. Приведем алгоритм построения подграфа.

1. В оптимальной системе найдены все подалгебры, содержащие замечательную подалгебру.

2. Найденные подалгебры расположены по возрастанию размерности сверху вниз. Порядок расположения подалгебр одной размерности выбирался так, чтобы после построения стрелок избежать чрезмерно большого их пересечения. Использовалась программа Graphus.

3. В таблице графа вложений выделены все вложения, в которых участвуют только найденные подалгебры.

4. В соответствии с найденными вложениями нарисованы стрелки, соединяющие подалгебры.

5. Если граф построен частично, то пунктирной линией отсекаются те подалгебры, после которых граф перестал строиться.

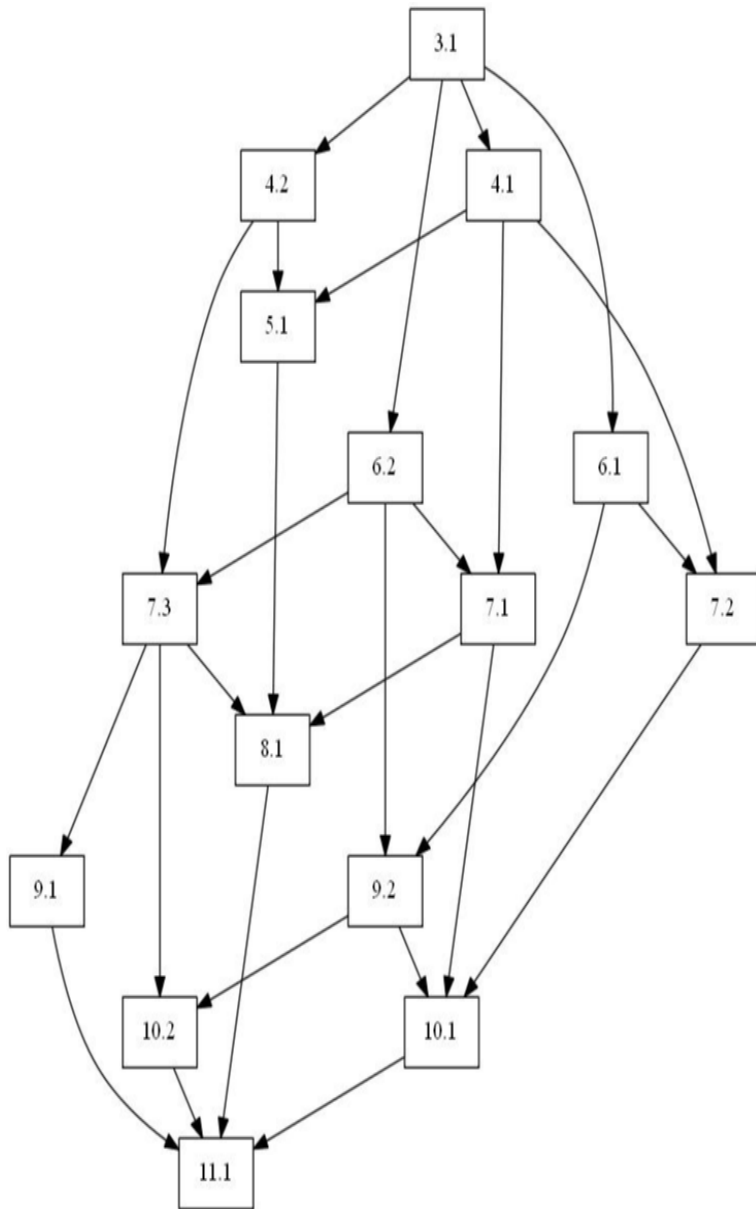


Рис. 6. Подграф подалгебр, содержащих подалгебру вращений

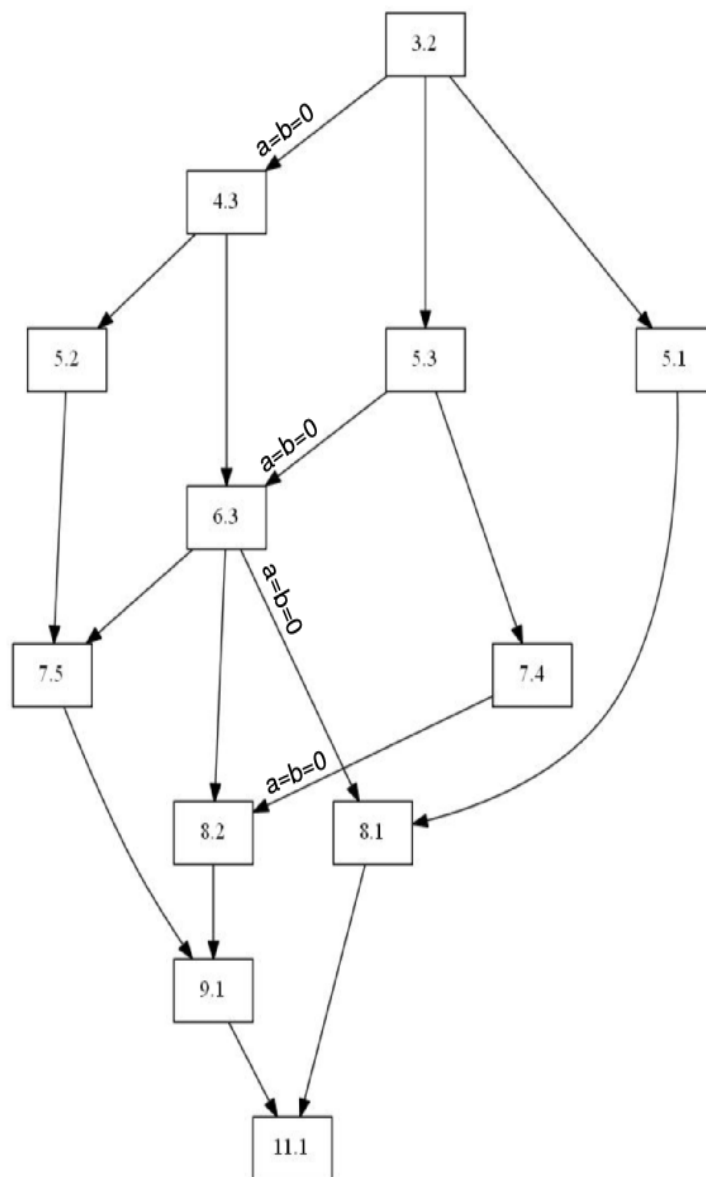


Рис. 7. Подграф подалгебр, содержащих одно вращение, растяжение и перенос по времени

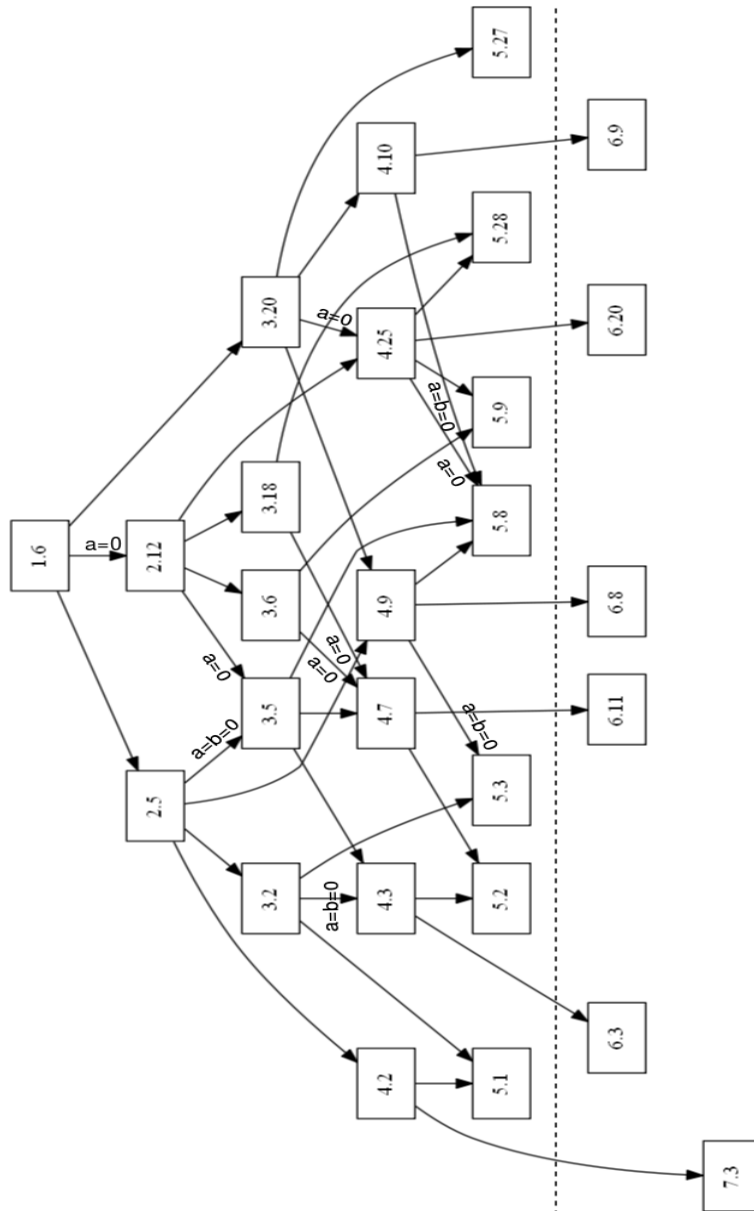


Рис. 8. Подграф подалгебр, содержащих подалгебру 1.6

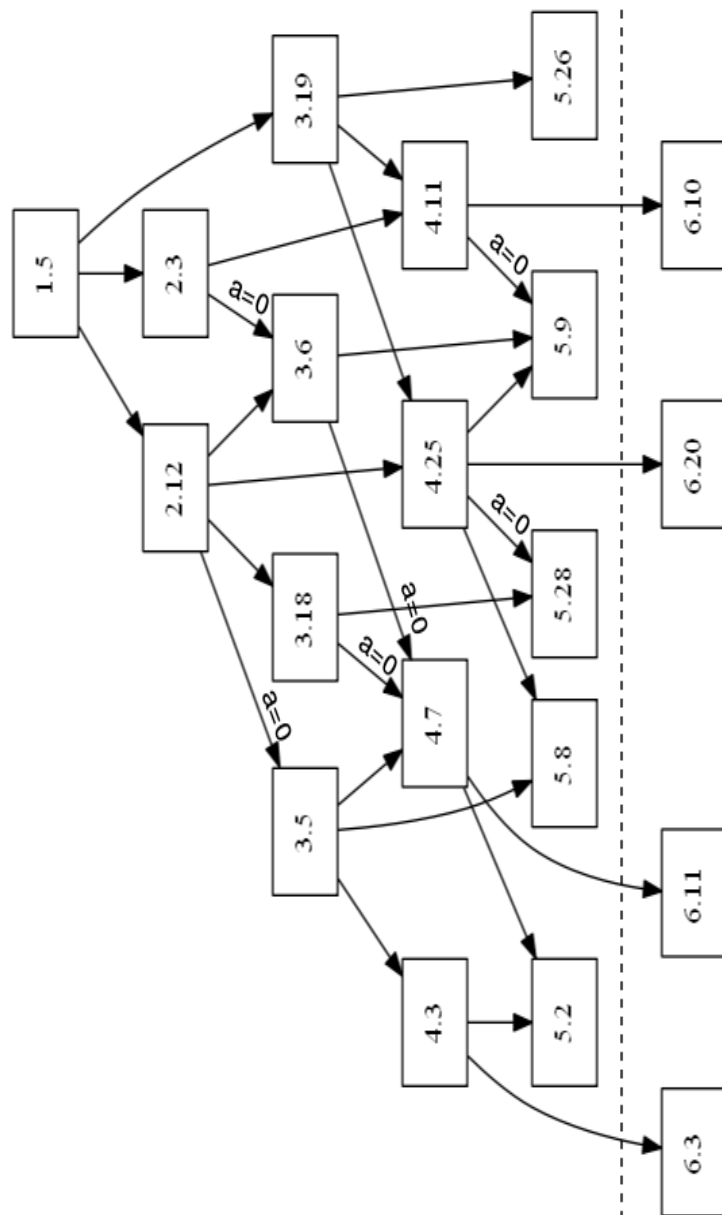


Рис. 9. Подграф подалгебр, содержащих подалгебру 1.5

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пользуясь оптимальной системой подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды, были указаны всевозможные вложения подалгебр. Учитывая внутренние автоморфизмы, результат был представлен в виде таблицы. Доказаны два утверждения о подалгебрах, содержащих простую подалгебру вращений, и не содержащих ее.

Наглядно представлены подграфы подалгебр, содержащих всю подалгебру вращений (Рис. 6); подалгебр, содержащих оператор переноса по времени, один оператор вращения и оператор растяжения одновременно (Рис. 7); подалгебр, в которые вложена подалгебра 1.5 (Рис. 8) и подалгебра 1.6 (Рис. 9).

Цепочки вложенных подалгебр порождают вложенные друг в друга подмодели [2]. Такое вложение позволяет находить множество точных решений подмоделей большего ранга через решения подмоделей меньшего ранга. Некоторые или даже все частично инвариантные решения могут редуцироваться в инвариантную подмодель из цепочки вложенных подалгебр. Такой способ нахождения точных решений инвариантных подмоделей ранга, большего нуля, обобщает симметричный анализ подмодели, основанной на фактор-алгебре нормализатора, допускаемой подмоделью.

Для инвариантных подмоделей появляются дополнительные нелинейности, поэтому найти точные не инвариантные решения весьма важно. Этот метод открывает новый способ нахождения точных решений. Подмодель можно вложить в систему уравнений, отличную от исходной, но с большей симметрией. Тогда подалгебры, содержащие ту, по которой подмодель построена, дают новые точные решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ТАБЛИЦА ГРАФА ВЛОЖЕННЫХ ПОДАЛГЕБР

г	і	Базис	Подалгебры
10	1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11	11.1.
	2	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	11.1.
9	1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11	-; 11.1.
	2	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	10.2, 1.
8	1	1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11	-; -; 11.1.
	2	1, 2, 3, 5, 6, $a4+7$, 10, $b4+11$	9.1.
	3	1, 2, 3, 4, 5, 6, $7+a11$, 10	9.1; ($a=0$) 10.2.
	4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11	9.1; 10.1.
	5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11	9.1.
7	1	1, 2, 3, 7, 8, 9, 11	8.1; -; 10.1.
	2	4, 5, 6, 7, 8, 9, 11	-; -; 10.1.
	3	1, 2, 3, 7, 8, 9, 10	8.1; 9.1; 10.2.
	4	2, 3, 5, 6, 7, 10, 11	8.2 ($a=b=0$).
	5	1, 2, 3, 4, 7, 10, 11	-; 9.1.
	6	1, 2, 3, 5, 6, 10, $b4+7+a11$	8.3, 2.
	7	1, 2, 3, 5, 6, $a4+7$, $4+10$	8.3 ($a=0$).
	8	2, 3, 4, 5, 6, 7, 11	8.4.
	9	1, 2, 3, 5, 6, $a4+7$, $b4+11$	8.4, 2.

	10	1, 2, 3, 5, 6, 10, $a4+11$	8.5, 2.
	11	1, 2, 3, 4, 5, 6, $7+a11$; $a \neq 0$	8.4, 3.
	12	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8.4, 3 ($a = 0$); 9.2.
	13	1, 2, 3, 4, 5, 6, $7 + 10$	8.3 ($a = 0$).
	14	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10	8.5, 3.
	15	1, 2, 3, 4, 5, 6, 11	8.5, 4.
6	1	4, 5, 6, 7, 8, 9	7.2; -; 9.2.
	2	1, 2, 3, 7, 8, 9	7.3, 1; -; 9.2.
	3	1, 2, 3, $a4 + 7$, 10, $b4 + 11$	7.5; 8.2, ($a = b = 0$) 1.
	4	1, 4, 5, 6, 7, 11	-; 8.4.
	5	1, 2, 3, 4, 7, 11	7.5; 8.4.
	6	2, 3, 5, 6, $a4+7$, $b4+11$	7.9, 8, ($a = b = 0$) 4.
	7	2, 3, 5, 6, $7 + a11$, 10; $a \neq 0$	7.6 ($b = 0$), 4.
	8	2, 3, 5, 6, 7, 10	7.6 ($a = b = 0$).
	9	2, 3, 5, 6, $1 + 7$, 10	7.6 ($a = b = 0$).
	10	2, 3, 5, 6, $a1 + 7$, $4 + 10$	7.7 ($a = 0$).
	11	1, 2, 3, 4, $7 + a11$, 10	7.5; 8.3.
	12	2, 3, 5, 6, 10, 11	7.10 ($a = 0$), 4.
	13	1, 2, 3, 4, 10, $a5 + 11$; $a \neq 0$	7.10.
	14	1, 2, 3, 4, 10, 11	7.10 ($a = 0$), 5.
	15	2, 3, 4, 5, 6, $7 + a11$; $a \neq 0$	7.11, 8.
	16	2, 3, 4, 5, 6, $1 + 7$	7.12.
	17	2, 3, 4, 5, 6, 7	7.12, 8.
	18	1, 2, 3, 5, 6, $b4 + 7 + a11$; $a \neq 0$	7.11, 9, 6.
	19	1, 2, 3, 5, 6, $a4 + 7$	7.12, 9, 7, 6 ($a = 0$).
	20	1, 2, 3, 5, 6, $a4 + 7 + 10$	7.13, 7, 6 ($a = 0$).
	21	1, 2, 3, 5, 6, 10	7.14, 10, 6.
	22	1, 2, 3, 5, 6, $4 + 10$	7.14, 7.
	23	2, 3, 4, 5, 6, 11	7.15, 8.
	24	1, 2, 3, 5, 6, $a4 + 11$	7.15, 10, 9.
	25	1, 2, 3, 4, 5, 6	7.15-11.
5	1	7, 8, 9, 10, 11	-; -; 8.1.
	2	1, 4, 7, 10, 11	-; 7.5.
	3	2, 3, 7, 10, 11	6.3 ($a = b = 0$); 7.4.
	4	4, 5, 6, 7, 11	6.4; 7.8, 2.
	5	1, 5, 6, $a4 + 7$, $b4 + 11$	6.4; 7.9.
	6	2, 3, 4, 7, 11	6.5; 7.8.
	7	1, 2, 3, $a4 + 7$, $b4 + 11$	6.5, 3; 7.9, ($a = b = 0$) 1.
	8	1, 2, 3, 10, $b4 + 7 + a11$	6.11, 3; 7.9, ($a = b = 0$) 3.
	9	1, 2, 3, $a4 + 7$, $4 + 10$	6.11 ($a = 0$); 7.7.
	10	2, 3, 5, 10, $a6 + 11$	($a = 0$) 6.14, 13, 12.
	11	1, 2, 3, 10, 11	6.14, 3 ($b = 0$).
	12	1, 2, 3, 10, $4 + a11$	($a = 0$) 6.21, 14, 13, ($a = 0$) 11, 3.
	13	2, 3, $a1 + 5$, 6, $4 + 10$; $a \neq 0$	6.22.

	14	2, 3, 1+5, 6, 10	6.21.
	15	2, 3, 5, 6, 4+10	6.22, 10.
	16	2, 3, 5, 6, 10	6.21, 12, 9-7.
	17	1, 2, 3, 6, 4 + 10	6.22, 21.
	18	1, 4, 5, 6, 7 + a11	6.4; (a = 0) 7.12, 11.
	19	2, 3, 5, 6, 7 + a11; a ≠ 0	6.18 (b = 0), 15, 7, 6.
	20	2, 3, 5, 6, a4 + 7; a ≠ 0	6.19, 17, 6.
	21	2, 3, 5, 6, 1 + 7	6.19 (a = 0), 16, 10, 9.
	22	2, 3, 5, 6, 7	6.19 (a = 0), 17, 10 (a = 0), 8, 6 (a = 0).
	23	1, 2, 3, 4, 7 + a11; a ≠ 0	6.11, 5; 7.11.
	24	1, 2, 3, 4, 7	6.19 (a = 0), 11 (a = 0), 5.
	25	1, 4, 3 + 5, 2 - 6, 7	-; 7.12.
	26	2, 3, 5, 6, a4 + 7 + a10; a ≠ 0	6.20, 10 (a = 0).
	27	2, 3, 5, 6, 7 + 10	6.20 (a = 0), 8.
	28	1, 2, 3, 4, 7 + 10	6.11 (a = 0); 7.13.
	29	1, 4, 5, 6, 11	6.23, 4.
	30	2, 3, a4 + 5, 6, b4 + 11	6.24, 23, (a = b = 0) 12, (a = 0) 6.
	31	2, 3, 5, 6, a4 + 11	6.24, 23, (a = 0) 12, 6.
	32	2, 3, 4, 6, a5 + 11	6.24; 7.8.
	33	1, 2, 3, 4, a5 + 11; a ≠ 0	6.25, 13; 7.9.
	34	1, 2, 3, 4, 11	6.24 (a = 0), 14, 5.
	35	2, 3, 4, 5, 6	6.25, 23, 17-15.
	36	2, 3, 4, 5, 1 + 6	6.25.
	37	1, 2, 3, 5, 6	6.25, 24, 22-18.
4	1	7, 8, 9, 11	5.1; -; 7.2, 1.
	2	7, 8, 9, 10	5.1; -; 7.3.
	3	1, a4 + 7, 10, b4 + 11	5.2; 6.3.
	4	5, 6, a4 + 7, b4 + 11	5.5, 4; 6.6.
	5	1, 4, 7, 11	5.2; 6.5, 4.
	6	2, 3, a4 + 7, b4 + 11	5.7, 6, (a = b = 0) 3; 6.6.
	7	1, 4, 10, 7 + a11	5.2; 6.11.
	8	2, 3, 10, 7 + a11; a ≠ 0	5.8 (b = 0), 3; 6.7.
	9	2, 3, 7, 10	5.8 (a = b = 0), 3; 6.8.
	10	2, 3, 1 + 7, 10	5.8 (a = b = 0); 6.9.
	11	2, 3, a1 + 7, 4 + 10	5.9 (a = 0); 6.10.
	12	1, 4, 10, 11	5.10 (a = 0), 2.
	13	2, 3, 10, a5 + 11; a ≠ 0	5.12, 10.
	14	2, 3, 10, 11	5.11, 10 (a = 0), 3.
	15	4, 5, 6, 7 + a11; a ≠ 0	5.18, 4; 6.15.
	16	4, 5, 6, 7	5.18 (a = 0), 4; 6.17, 1.
	17	a1 + 4, 3 + 5, 2 - 6, b1 + 7	5.25; (a = b = 0) 6.17, (a = 0) 16, 4.
	18	a1 + 4, 5, 6, b1 + 7; a ² + b ² = 1	5.18 (a = 0); (a = 0) 6.16.
	19	1, 5, 6, b4 + 7 + a11	5.18, 5; (a = 0) 6.19, 18.
	20	1, 3 + 5, 2 - 6, a4 + 7	5.25; 6.19.
	21	2, 3, 4, 7 + a11	(a = 0) 5.24, 23, 6; (a = 0) 6.17, 15.

	22	2, 3, 4, $1 + 7$	5.24; 6.16.
	23	1, 2, 3, $b4 + 7 + a11$; $a \neq 0$	5.23, 8, 7; 6.18.
	24	1, 2, 3, $a4 + 7$	5.28, 9, 8 ($a = 0$), 7; 6.19 ($a \neq 0$).
	25	1, 2, 3, $a4 + 7 + 10$	5.28, 9, 8 ($a = 0$); 6.20.
	26	4, 5, 6, 11	5.29, 4.
	27	1, $a4 + 5$, 6, $b4 + 11$; $a \neq 0$	5.29.
	28	1, 5, 6, $a4 + 11$	5.32, 29, 5.
	29	1, 4, 6, $a5 + 11$	5.32, 31, 30 ($a = 0$), 29.
	30	2, 3, $a4 + 6$, $b4 + c5 + 11$	($b = c = 0$) 5.34, ($b = 0$) 33, 32, ($a = 0$) 31, 30, ($a = b = 0$) 10.
	31	2, 3, 4, $a5 + 11$; $a \neq 0$	5.33, 32; 6.23.
	32	2, 3, 4, 11	5.34, 32 ($a = 0$), 6; 6.23.
	33	1, 2, 3, $a4 + 11$; $a \neq 0$	5.34, 33, 12, 7; 6.24 ($a \neq 0$).
	34	1, 2, 3, 11	5.34, 11, 7 ($b = 0$).
	35	2, 3, $a1 + 5$, 4 + $b6 + 10$	($b = 0$) 5.17, ($a = 0$) 15, 13.
	36	2, 3, $a1 + 5$, 6 + 10	5.17, ($a = 0$) 16, 14.
	37	2, 3, 1 + 5, 10	5.14, 12 ($a = 0$).
	38	2, 3, 5, 10	5.16, 14, 12 ($a = 0$), 10.
	39	1, 2, 3, 4 + 10	5.17, 12 ($a = 0$), 9.
	40	1, 2, 3, 10	5.12, 11, 8
	41	1, $a2 + b3 + 4$, $c3 + 5$, $d2 + 6$; $a^2 + b^2 + (c + d)^2 = 1$	($a = 0 \vee b = 0$) 5.36, ($a = d = 0 \vee b = c = 0$) 35; ($a \neq 0 \wedge b \neq 0$) 6.25.
	42	1, 4, 3 + 5, 2 - 6	5. 36, 25.
	43	1, 4, 5, 6	5.35, 29, 18.
	44	2, 1 + $a3$, 3 + 5, 6	5.37, ($a = 0$) 36.
	45	2, 3, 1 + 5, 6	5.37, 36, 14, 13.
	46	2, 3, 5, 6	5.37, 35, 31, 30 ($a = 0$), 27, 26, 22-19, 16, 15.
	47	1 + $a3$, 2, 5, 6	5.37, 35, ($a = 0$) 32.
	48	1, 2, 3, 4	5.37, 34, 33, 28, 24, 23, 17, 12 ($a = 0$).
3	1	7, 8, 9	4.2, 1; -, 6.2, 1.
	2	7, 10, 11	4.3 ($a = b = 0$); 5.3, 1.
	3	4, 7, 11	4.5; 5.6, 4.
	4	1, $a4 + 7$, $b4 + 11$	4.5, 3; 5.7, 5.
	5	1, 10, $b4 + 7 + a11$	4.7, 3; 5.8.
	6	1, 4 + 10, $a4 + 7$	4.7 ($a = 0$); 5.9.
	7	1, 10, $a4 + 11$	($a = 0$) 4.14, 13, 12, 3.
	8	5, 6, $b4 + 7 + a11$; $a \neq 0$	4.19, 15, 4; ($b = 0$) 5.19.
	9	3 + 5, 2 - 6, $a1 + b4 + 7$	4.20, 17; ($a = b = 0$) 5.22, ($b = 0$) 21, ($a = 0$) 20.
	10	5, 6, 1 + $b4 + 7$	4.19 ($a = 0$), 18; ($b = 0$) 5.21.
	11	5, 6, $a4 + 7$	4.19 ($a = 0$), ($a = 0$) 18 ($b = 0$) \vee ($a \neq 0$) 18, 16, 4; ($a = 0$) 5.22, 20.
	12	1, 4, 7 + $a11$; $a \neq 0$	4.7, 5; 5.23, 18.

13	1, 4, 7	4.7 ($a = 0$); 5.25, 24, 18 ($a = 0$).
14	2, 3, $b4 + 7 + a11$; $a \neq 0$	4.23, 21, ($b = 0$) 8, 6; ($b = 0$) 5.19.
15	2, 3, $a4 + 7$; $a \neq 0$	4.24, 21 ($a = 0$), 6; 5.20.
16	2, 3, 1 + 7	4.24 ($a = 0$), 22, 11, 10; 5.21.
17	2, 3, 7	4.24 ($a = 0$), 21 ($a = 0$), 11 ($a = 0$), 9, 6 ($a = 0$); 5.22.
18	1, 4, 7 + 10	4.7 ($a = 0$); 5.28.
19	2, 3, $a4 + 7 + a10$; $a \neq 0$	4.25, 11; 5.26.
20	2, 3, 7 + 10	4.25 ($a = 0$), 10, 9; 5.27.
21	5, 6, $a4 + 11$	4.29, 28, 26, 4.
22	1, $a4 + 5$, $b4 + c6 + 11$	($a = b = c = 0$) 4.32, ($a = c = 0$) 31, ($a = 0$) 30 ($a = 0$) \vee ($b = 0$) 30 ($b = 0$), 29, ($a = 0$) 28, 27.
23	1, 4, $a5 + 11$; $a \neq 0$	4.30 ($a = b = 0$), 29.
24	1, 4, 11	4.30 ($b = c = 0$), 29 ($a = 0$), 12, 5.
25	2, 3, $a4 + b5 + 11$; $b \neq 0$	4.33, 31, 30, ($a = 0$) 13.
26	2, 3, $a4 + 11$	($a = 0$) 4.34, 33, 32, 30 ($c = 0$), ($a = 0$) 14, 6.
27	3, $a1 + b2 + 6$, 4 + 10	4.36, 35.
28	1, 2 + 4, 10	4.38, 37.
29	1, 4, 10	4.38, 12, 7.
30	2, 3, 4 + $a5 + 10$; $a \neq 0$	4.39, 35.
31	2, 3, 5 + 10	4.39–36.
32	2, 3, 4 + 10	4.39, 35 ($b = 0$), 11.
33	2, 3, 10	4.40, 38, 37, 14, 13, 10–8.
34	$-a2 + b3 + 4$, $a1 + d2 - c3 + 5$, $-b1 + c2 + e3 + 6$; $a^2(e - d)^2 + b^2e^2 + c^2d^2 = 1$	($c = d = 0$) 4.41, ($a = e = 1$, $b = c = d = 0$) 17; ($a = b = 0$) 5.35.
35	$a1 + 4$, $b3 + 5$, $b2 - 6$; $a^2 + b^2 = 1$	($b = 0$) 4.43, ($b \neq 0$) 42, 41 ($a = b = 0$), ($b = 0$) 18, ($b = 1$) 17; ($a = 0$, $b \neq 0$) 5.35.
36	4, 5, 6	4.43, 26, 18 ($a = 0$), 16, 15.
37	$a1 + 3$, $b1 + 5$, $c1 + d2 + 6$; $b^2 + c^2 + d^2 = 1$	($b = c = 0$) 4.47, ($a = b = c = 0$) 46, ($a = c = 0$) 45, 44, ($b = -\sqrt{a^2 + 1}$, $c = 0$, $d = a(a^2 + 1)^{-1/2}$) 42, 41; ($a = 0$) 5.32, ($a = d = 0$) 29, ($a = c = d = 0$, $b = 1$) 25.
38	$a1 + 3$, 5, 6	4.47, ($a = 0$) 46, 43, ($a = 0$) 41 ($b = c = 0$); ($a \neq 0$) 5.36.
39	1, 3 + 5, $a2 + 6$; $a \neq -1$	4.44 ($a = 0$), 41; ($a = 0$) 5.32.
40	1, 3+5, 2-6	4.44 ($a = 0$), 42, 41 ($c = 1$, $d = -1$), 20.
41	1, 5, 6	4.47 ($a = 0$), 43, 41 ($c = d = 0$), 28, 19.
42	2, $a1 + 3$, 4; $a \neq 0$	4.48, 47, 44, 30.
43	2, 3, 4	4.48, 47 ($a = 0$), 32, 31, 22, 21; 5.36.
44	1, 2, 3+4	4.48; 5.36, 14, 13.
45	1, 2, 4	4.48, 46, 45; 5.32, 30 ($a = 0$), 10.

	46	1, 2, 3	4.48, 40, 39, 34, 25-23.	
2	1	$a4 + 7, b4 + 11$	3.4, 3, ($a = b = 0$) 2; 4.6, 4, ($a = b = 0$) 1.	
	2	$10, 7 + a11; a \neq 0$	3.5 ($b = 0$), 2; 4.8.	
	3	$a1 + 7, 4 + 10$	3.6 ($a = 0$); 4.11.	
	4	$1 + 7, 10$	3.5 ($a = b = 0$); 4.10.	
	5	7, 10	3.5 ($a = b = 0$), 2; 4.9, 2.	
	6	10, 11	3.7 ($a = 0$), 2.	
	7	$4, 7 + a11; a \neq 0$	3.12, 3; 4.21, 15.	
	8	$1, b4 + 7 + a11; a \neq 0$	3.12, 5, 4; 4.23, 19.	
	9	$4, 1 + 7$	3.13; 4.22, 18($a = 0, b = 1$), 17 ($a = 0$).	
	10	4, 7	3.13, 3; 4.21 ($a = 0$), 17 ($a = b = 0$), 16.	
	11	$1, a4 + 7$	3.13, 6, 5 ($a = 0$), 4; 4.24, 20, 19 ($a = 0$).	
	12	$1, a4 + 7 + 10$	3.18, 6, 5 ($a = 0$); 4.25.	
	13	4, 11	3.24, 22 ($b = c = 0$), 21 ($a = 0$), 3.	
	14	$4, a5 + 11; a \neq 0$	3.23, 22 ($a = c = 0$), 21;.	
	15	$1, a4 + b5 + 11; b \neq 0$	($a = 0$) 3.26, 25, 23, 22.	
	16	$1, a4 + 11$	($a = 0$) 3.26 ($a = 0$), 25 ($a = 0$), 24, 22 ($a = 0$), 7, 4.	
	17	1, 10	3.33, 29, 28, 7, 5.	
	18	$3, 4 + a6 + 10$	($a = 0$) 3.32, 31, 30, 27 ($a = b = 0$).	
	19	$1, 4 + 10$	3.31, 29, 6.	
20		$a1 + c3 + 5, b1 + d2 + 6; a^2 + b^2 + (c + d)^2 = 1$	($c = d = 0$) 3.41, ($c = 0, d = -1$) 40, 39, 37, 35, 34.	
	21	$3 + 5, 2 - 6$	3.40, 37 ($a = b = c = 0$), 3.35 ($a = 0, b = 1$), 9.	
	22	5, 6	3.41, 38, 36, 35 ($b = 0$), 21, 11, 10, 8; 4.46, 27.	
	23	$a1 + 2, 3 + 4$	3.44, ($a = 0$) 43, 42, ($a = 0$) 40, ($a = 0$) 39; 4.45, ($a = 0$) 41 \vee ($a \neq 0$) 41 ($a = 0$), 37-35.	
	24	$a1 + 2, 4$	3.45, ($a = 0$) 43, 42, ($a = 0$) 41, 22; ($a \neq 0$) 4.43, ($a = 0$) 41 ($c = 0, b \neq 0$) \vee ($a \neq 0$) 41 ($a = 0$), 38, 36 ($a = 0$), 35 ($a = 0$).	
	25	$1, 3 + 4$	3.45, 44, 28; 4.47, 44, 41, 36, 35, 30 ($a = 0$).	
	26	1, 4	3.45, 29, 24, 23, 18, 13, 12; 4.47, 43, 42, 41 ($a = b = 0$), 36 ($a = 0$), 35 ($a = 0$), 30 ($a = 0$).	
	27	2, 3	3.46-42, 33-30, 26-25, 20, 19, 17-14.	
	1	1	$b4 + 7 + a11; a \neq 0$	2.8, 7, ($b = 0$) 2, 1; 3.14, 8.
		2	$a4 + 7; a \neq 0$	2.11-9, 1; 3.15, 11, 9 ($a = 0$).
3		7	2.11 ($a = 0$), 10, 5, 3 ($a = 0$), 1; 3.17, 11 ($a = 0$), 9 ($a = b = 0$), 1.	

4	$1 + 7$	2.11 ($a = 0$), 9, 4, 3; 3.16, 10 ($b = 0$), 9 ($b = 0$).
5	$a4 + 7 + 10$; $a \neq 0$	2.12, 3; 3.19
6	$7 + 10$	2.12 ($a = 0$), 5; 3.20.
7	$a4 + 11$; $a \neq 0$	2.16–13, 1.
8	11	2.16 ($a = 0$), 13, 6, 1 ($b = 0$).
9	$4 + 10$	2.19, 18 ($a = 0$), 3.
10	10	2.17, 6–4, 2.
11	$3 + 4$	2.25, 24 ($a = 0$), 23, 20($a = 0, c = 1$); 3.38 ($a = 0$), 9.
12	4	2.26, 24, 22, 20, 14, 13, 10, 9, 7.
13	1	2.27–23, 19–15, 12, 11, 8; 3.38, 37, 27 ($a^2 + b^2 \neq 0$), 22 ($c \neq 0$), 21, 11–8, 3–1.

REFERENCES

- [1] Yu.A. Chirkunov, S.V. Khabirov, *Elements of symmetry analysis of differential equations of continuum mechanics*, Novosibirsk: NSTU, 2012.
- [2] S.V. Khabirov, *A hierarchy of submodels of differential equations*, Siberian Math. J., **54**:6 (2013), 1111–1120. MR3184104
- [3] P.J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, New-York: Springer-Verlag, 1986. MR0836734
- [4] W. Fushchych, R. Popowych, *Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. I, II*, Nonlinear Mathematical Physics, **1**:1 (1994), 75–113; **1**:2 (1994), 158–189. MR1275296; MR1307478
- [5] H. Liu, J. Li, L. Liu, *Lie symmetry analysis, optimal system and exact solutions to the fifth-order KdV types equation*, Mathematical Analysis and Application, **368** (2010), 551–558. MR2643822
- [6] X.-R. Hu, Y. Chen, *Two dimensional symmetry reduction of (2+1)-dimensional nonlinear Klein–Gordon equation*, Applied Mathematics and Computation, **215** (2009), 1141–1145.
- [7] F. A. Kiraz, *A note on one dimensional system of generalized Boussinesq equation*, Applied Mathematical Sciences, **2** (2008), 1541–1548. MR2443918
- [8] E. Hizek, N. C. Turguy, Guldon, *Symmetry analysis of three dimensional independent Scrodinger - Newton equation*, Applied Mathematical Sciences, **2** (2008), 341–351. MR2397436
- [9] C. M. Khalique, A. Biswas, *Analysis of nonlinear Klein–Gordon equation using Lie symmetry analysis*, Applied Mathematics Letter, **23** (2010), 1397–1400. MR2718518
- [10] J. Patera, P. Winterwitz, H. Zassenhaus, *Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. 1. General method and the Poincare group*, Journal Mathematical Physics, **16** (1975), 1597–1614. MR0372124
- [11] L.V. Ovsyannikov, A.P. Chupakhin, *Regular partially invariant submodels of equations of gas dynamics*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **60**:6 (1996), 969–978. MR1627739
- [12] S.V. Khabirov, *Irregular partially invariant solutions of rank 2 and defect 1 to equations of gas dynamics*, Siberian Math. J., **43**:5 (2002), 1168–1181. MR1946272
- [13] S.V. Khabirov, *Definition of the differential invariant submodels and an example of its classification*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **9** (2004), 473–480. MR2061623
- [14] S.V. Khabirov, *The differential-invariant solutions for the axis-symmetric gas flows*, Ufa Mathematical Journal, **3** (2009), 154–159. Zbl 1228.76123
- [15] S.V. Khabirov, *Partially invariant solutions for a submodel of radial motions of a gas*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **48**:5 (2007), 26–34. MR2355446
- [16] E.V. Makarevich, *Gasdynamics equations submodels hierarchy in case of state equation with separated density*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9** (2012), 306–328. MR2982996

- [17] L.V. Ovsyannikov, *Hierarchy of invariant submodels of differential equations*, Doklady Akademii Nauk, **361**:6 (1998), 740–742. MR1696058
- [18] L.V. Ovsyannikov, *The SUBMODELS program. Gas dynamics*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **58**:4 (1994), 30–55. MR1310991
- [19] S.V. Khabirov, *Lecture on mechanics*, Ufa: USATU, 2012.
- [20] S.V. Khabirov, *Analytical methods in gas dynamics*, Ufa: BSU, 2013.

TIMUR FLUROVICH MUKMINOV
UFA STATE AVIATION TECHNICAL UNIVERSITY,
12, UL. K. MARKSA,
UFA, 450000, RUSSIA
E-mail address: mukminov.tf@yandex.ru

SALAVAT VALEEVICH KHABIROV
MAVLYUTOV INSTITUTE OF MECHANICS, UFA INVESTIGATION CENTER, R.A.S.,
71, PR. OKTYABRYA,
UFA, 450054, RUSSIA
E-mail address: habirov@anrb.ru