

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1233–1244 (2019)

УДК 510.67

DOI 10.33048/semi.2019.16.084

MSC 03C60, 03C68, 03C10

JSp-КОСЕМАНТИЧНОСТЬ *R*-МОДУЛЕЙ

А.Р. ЕШКЕЕВ, О.И. УЛЬБРИХТ

ABSTRACT. The main purpose of this article is to study the model-theoretic properties of R -modules within Jonsson theories. We obtain a criterion of JSp -cosemanticness of R -modules, which generalizes the elementary equivalence of modules. We describe countably categorical perfect existentially closed Jonsson R -modules.

Keywords: Jonsson theory, model companion, existentially closed model, perfectness, cosemanticness, R -modules.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретико-модельные вопросы модулей являются актуальными задачами современной алгебры, что подтверждается большим списком работ в этой области. Существуют хорошие обзоры по данной тематике [1], [2], но нужно заметить, что работы из этих обзоров связаны в основном с изучением полных теорий некоторых фиксированных модулей. В данной статье мы будем иметь дело с йонсоновскими теориями модулей, которые, вообще говоря, не являются полными. Как хорошо известно, модуль является одним из основным понятий общей алгебры. В частности, таковыми являются векторные пространства и абелевы группы. Если R – поле, то левый R -модуль является линейным пространством. Если $R = \mathbf{Z}$ – кольцо целых чисел, то R -модуль M – не что иное, как абелева группа, т.к. умножение на положительные целые числа сводится к многократному сложению.

Данная работа является естественным продолжением работы [3], в которой был получен аналог теоремы В. Шмелёвой об элементарной эквивалентности абелевых групп на языке косемантичности абелевых групп в рамках изучения йонсоновских теорий абелевых групп. Понятие косемантичности двух моделей является более общим понятием, чем элементарная эквивалентность этих

YESHKEYEV, A.R., ULBRIKHT, O.I., *JSp*-COSEMANTICNESS OF R -MODULES.

© 2019 ЕШКЕЕВ А.Р., УЛЬБРИХТ О.И.

Поступила 3 октября 2018 г., опубликована 10 сентября 2019 г.

моделей. Как выяснилось, для получения косемантичности абелевых групп, достаточно сравнения двух инвариантов В. Шмелёвой, а именно, инвариантов делимой части. Это напрямую связано со спецификой изучения произвольных совершенных йонсоновских теорий, а именно, оказалось, что теория абелевых групп является совершенной йонсоновской теорией [3]. Понятно, что было бы интересно получить более общий аналогичный результат относительно косемантичности для модулей.

Напомним, что при изучении йонсоновских теорий мы, как правило, имеем дело не с элементарными мономорфизмами, а изоморфными вложениями, либо соответствующими гомоморфизмами [4]. В силу критерия совершенности йонсоновской теории [5] (предложение 3.4 при $\alpha = 0$), мы можем заметить, что в случае совершенной йонсоновской теории, нам достаточно изучать экзистенциально замкнутые модели данной теории, которые между собой не различаются относительно $\forall\exists$ -предложений. Важным условием является требование хоть какой-то полноты для изучаемой теории, обычно это полнота либо для $\forall\exists$ -предложений, либо для \exists -предложений. Все вышеуказанные требования необходимы для осуществления переноса изучаемых теоретико-модельных свойств центра йонсоновской теории на саму эту теорию.

В самой теории моделей, как замечено в обзорной статье Х. Дж. Кейслера «Основы теории моделей» в справочной книге под ред. Дж. Барвайса [4], исторически сложилось два направления. В [4] их называют «западной» и «восточной» теорией моделей, эти названия условны, они связаны с географическим местом проживания основоположников теории моделей. А. Робинсон жил на восточном побережье США, а А. Тарский жил на западном. Основную разницу между этими направлениями развития теории моделей можно прочесть в [4], [6].

Таким образом, классификация фиксированной йонсоновской теории и её класса моделей относительно задач синтаксического и семантического характера описания центра этой теории является одной из актуальных задач классической теории моделей, в которой воедино связаны задачи «западного» и «восточного» направлений теории моделей.

В данной статье мы рассматриваем теоретико-модельные вопросы классификации теории модулей относительно понятия косемантичности в классе йонсоновских теорий модулей.

Работа состоит из 4 параграфов, первый из которых является введением. Содержание второго параграфа представляет собой общие сведения и известные факты из теории моделей. Третий параграф включает в себя необходимые для нас сведения и результаты, касающиеся атрибутов йонсоновских теорий. Четвёртый параграф содержит основные необходимые в этой статье сведения о модулях, их теоретико-модельных свойствах и основные результаты данной статьи.

Все неопределённые понятия и связанные с ними результаты в данной статье относительно йонсоновских теорий можно найти в [6].

2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ

Если задан какой-нибудь класс K алгебраических систем сигнатуры σ , то этот класс называется абстрактным, если с каждой системой A класс K содержит и все изоморфные ей системы сигнатуры σ .

Хорошо известно, что всякий аксиоматизируемый класс моделей некоторой сигнатуры является абстрактным.

Следующие определения и результаты являются хорошо известными в теории моделей и широко используются при работе с йонсоновскими теориями.

Определение 1 ([4], стр. 97). *Модель A теории T называется **экзистенциально замкнутой**, если экзистенциальное предложение φ языка L_A , истинное в некоторой T -модели, расширяющей A , истинно и в A .*

Определение 2 ([4], стр. 80). *Теория T обладает **свойством совместного вложения (JEP)**, если любые две модели A, B теории T изоморфно вкладываются в некоторую модель C теории T .*

Теорема 1 ([7], стр. 363). *Пусть L – язык первого порядка и T теория в L . Предположим, что T имеет JEP, A, B – экзистенциально замкнутые модели теории T . Тогда каждое $\forall\exists$ -предложение языка L , которое истинно в A , также истинно и в B .*

Определение 3 ([4], стр. 61). *Теория T называется **модельно полной**, если для любых моделей A и B теории T любая подсистема $A \subseteq B$ будет элементарной подсистемой B . Эквивалентно, каждое изоморфное вложение есть элементарное вложение.*

Теорема 2 ([8], стр. 36). *Теория T модельно полна, если и только если теория $T \cup D(A)$ полна для любой модели M теории T .*

Определение 4 ([4], стр. 156). *Пусть T, T^* – некоторые L -теории. Теория T^* называется **модельным дополнением** теории T , если:*

- (a) *T и T^* взаимно модельно совместны, т.е. любая модель теории T вкладывается в модель теории T^* и наоборот;*
- (b) *T^* – модельно полная теория;*
- (c) *если $A \models T$, то $T^* \cup D(A)$ – полная теория.*

Теория T^* называется модельным компаньоном теории T , если выполнены условия (a) и (b).

Теорема 3 (Сараццо [4], стр. 164). *Если L – счетный язык и T – полная ω -категоричная теория, то T имеет ω -категоричный модельный компаньон T^M .*

3. ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ, КАСАЮЩИЕСЯ ЙОНСОНОВСКИХ ТЕОРИЙ

Дадим известные определения понятий и результаты, связанные с йонсоновскими теориями, необходимые для изучения модулей в рамках йонсоновости.

Определение 5 ([4], стр. 80). *Теория T называется **йонсоновской**, если*

- (1) *T имеет бесконечную модель;*
- (2) *T индуктивна, т.е. T эквивалентна множеству $\forall\exists$ -предложений;*
- (3) *T обладает свойством совместного вложения (JEP);*
- (4) *T обладает свойством амальгамируемости (AP), то есть если для любых $A, B, C \models T$ таких, что $f_1 : A \rightarrow B, f_2 : A \rightarrow C$ – изоморфные вложения, существуют $D \models T$ и изоморфные вложения $g_1 : B \rightarrow D, g_2 : C \rightarrow D$ такие, что $g_1 f_1 = g_2 f_2$.*

Так, например, йонсоновскими теориями являются хорошо известные классические примеры теорий в алгебре, такие, как группы, абелевы группы, булевы алгебры, линейные порядки, поля фиксированной характеристики и полигоны. Примеры этих теорий являются важными как в алгебре, так и в других областях математики.

Определение 6 ([9], стр. 529). Пусть $\kappa \geq \omega$. Модель M теории T называется κ -**универсальной** для T , если каждая модель T мощности строго меньше κ изоморфно вкладывается в M .

Определение 7 ([9], стр. 529). Пусть $\kappa \geq \omega$. Модель M теории T называется κ -**однородной** для T , если при любых двух моделях A и A_1 теории T , являющихся подмоделями M , мощности строго меньше, чем κ , и изоморфизме $f : A \rightarrow A_1$, для каждого расширения B модели A , являющегося подмоделью M и моделью T мощности строго меньше κ существует расширение B_1 модели A_1 , являющееся подмоделью M , и изоморфизм $g : B \rightarrow B_1$, продолжающий f .

Однородной-универсальной моделью для T называется κ -однородная-универсальная модель для T мощности κ , где $\kappa \geq \omega$.

Теорема 4 ([9], стр. 529). Каждая йонсоновская теория T имеет κ^+ -однородную-универсальную модель мощности 2^κ . Обратно, если T индуктивна, имеет бесконечную модель и имеет ω^+ -однородную-универсальную модель, то теория T является йонсоновской теорией.

Теорема 5 ([9], стр. 529). Пусть T йонсоновская теория. Две модели A и B κ -однородные-универсальные для T являются элементарно эквивалентными.

Определение 8 ([9], стр. 529). **Семантической моделью** S_T йонсоновской теории T называется ω^+ -однородная - универсальная модель теории T .

Для любой йонсоновской теории семантическая модель всегда существует, поэтому она играет важную роль в качестве семантического инварианта.

Из определения семантической модели следует, что:

Предложение 1. Любые две семантические модели йонсоновской теории T являются элементарно эквивалентными между собой.

Лемма 1 ([6], стр. 25). Семантическая модель S_T йонсоновской теории T является T -экзистенциально замкнутой.

Определение 9 ([6], стр. 25). **Семантическим пополнением (центром)** йонсоновской теории T называется элементарная теория T^* семантической модели S_T теории T , т.е. $T^* = Th(S_T)$.

Лемма 2. Пусть T – йонсоновская теория, а T^* – её центр. Тогда T и T^* взаимно модельно совместны.

Доказательство. Пусть T – йонсоновская теория, тогда всякая её модель A изоморфно вкладывается в семантическую модель S_T теории T , где $|A| \leq |S_T|$. S_T также является и моделью теории T^* . Так как $T \subset T^*$, то $\text{Mod}(T^*) \subset \text{Mod}(T)$. Поэтому всякая модель B теории T^* также является и моделью теории T . Таким образом, T и T^* взаимно модельно совместны. \square

Определение 10 ([6], стр. 26). *Йонсоновская теория T называется совершенной, если каждая семантическая модель T является насыщенной моделью T^* .*

Теорема 6 ([6], стр. 26). *Пусть T – произвольная йонсоновская теория, тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) *теория T – совершенна;*
- 2) *T^* – модельный компаньон теории T .*

Пусть E_T – класс всех экзистенциально замкнутых моделей теории T .

Теорема 7 ([6], стр. 26). *Если йонсоновская теория T совершенна, то $E_T = \text{Mod}(T^*)$, где $T^* = \text{Th}(C_T)$.*

Предложение 2 ([4], стр. 368). *Если теория T индуктивна, то любая модель теории T вкладывается в экзистенциально замкнутую модель теории T .*

Определение 11 ([6], стр. 40). *Мы говорим, что йонсоновская теория T_1 косемантична йонсоновской теории T_2 ($T_1 \bowtie T_2$), если $C_{T_1} = C_{T_2}$, где C_{T_i} – семантическая модель T_i , $i = 1, 2$.*

Пусть T – некоторая йонсоновская теория фиксированной сигнатуры σ и $\text{Mod}(T)$ – класс всех моделей теории T . Рассмотрим произвольную модель A из $\text{Mod}(T)$. Назовём **йонсоновским спектром** модели A множество:

$$JSp(A) = \{T \mid T \text{ – йонсоновская теория в языке } \sigma \text{ и } A \in \text{Mod}(T)\}.$$

Отношение косемантичности на множестве теорий является отношением эквивалентности. Тогда $JSp(A)/\bowtie$ – фактор множество йонсоновского спектра модели A по отношению \bowtie .

Пусть A и B – модели одной и той же сигнатуры.

Определение 12. *Мы будем говорить, что модель A йонсоновски элементарно эквивалентна модели B ($A \equiv_J B$), если $JSp(A) = JSp(B)$.*

Учитывая факторизацию можно дать следующее определение.

Определение 13. *Мы говорим, что модель A *JSp*-косемантична модели B ($A \bowtie_{JSp} B$), если $JSp(A)/\bowtie = JSp(B)/\bowtie$.*

Легко заметить, что *JSp*-косемантичность двух моделей йонсоновской теории обобщает понятие элементарной эквивалентности двух моделей полной теории. Верна следующая лемма:

Лемма 3. *Пусть A и B некоторые модели произвольной сигнатуры, тогда*

$$A \equiv B \Rightarrow A \equiv_J B \Rightarrow A \bowtie_{JSp} B.$$

Доказательство. Следует из определения. □

Определение 14 ([4], стр. 194). *Полная теория T называется κ -стабильной, если число полных 1-типов, реализуемых в произвольной модели A теории T над произвольным подмножеством C множества A , $|C| \leq \kappa$, самое большее κ .*

Рассмотрим йонсоновский аналог понятия стабильности.

Пусть T – йонсоновская теория, $S^J(X)$ – множество всех экзистенциальных полных n -типов над X , совместных с T , для любого конечного n , где $X \subset C$.

Определение 15 ([6], стр. 66). Будем говорить, что йонсоновская теория T J - λ -стабильна, если для любой T -экзистенциально замкнутой модели A , для любого подмножества X из A , $|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^J(X)| \leq \lambda$.

Теорема 8. Пусть T – совершенная йонсоновская теория, полная для \exists -предложений, $\lambda \geq \omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) T – J - λ -стабильна;
- (2) T^* – λ -стабильна, где T^* – центр йонсоновской теории T .

Доказательство. Следует из теоремы 2.1 из [10]. □

Определение 16 ([5], стр. 145). Модель $A \models T$ называется $\Sigma_{\alpha+1}$ -насыщенной моделью, если для любого подмножества $E \subseteq |A|$, меньшего по мощности, чем A , для любой модели $B \models T$ такой, что $A \subseteq_{\Pi_\alpha} B$, и любого элемента $b \in B$ найдётся элемент $a \in A$, удовлетворяющий включению $Th_{\Sigma_{\alpha+1}}(A, E \cup \{a\}) \supseteq Th_{\Sigma_{\alpha+1}}(B, E \cup \{b\})$.

Теорема 5.10 из [5] Пусть T – α -йонсоновская полная относительно $\Pi_{\alpha+2}$ теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $I(0, T) = 1$;
- 2) $I(0, T^*) = 1$;
- 3) T имеет счётную модель, являющуюся одновременно $\Sigma_{\alpha+1}$ -насыщенной и $(\Sigma_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$ -атомной;
- 4) для любого $n < \omega$ каждое максимальное совместное с T множество $\Sigma_{\alpha+1}$ -формул n переменных содержит $(\Sigma_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$ -полную формулу;
- 5) $|S_{\Sigma_{\alpha+1}}^n(T)| < \omega$ для всех $1 \leq n \leq \omega$;
- 6) для каждого $n < \omega$ с точностью до эквивалентности в T существует лишь конечное число $\Sigma_{\alpha+1}$ -формул n переменных x_1, \dots, x_n ;
- 7) все модели T являются $(\Sigma_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$ -атомными.

Теорема 9. Пусть T – йонсоновская теория, полная относительно $\forall\exists$ -предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) T – ω -категорична;
- (2) T^* – ω -категорична.

Доказательство. Доказательство следует из эквивалентности пунктов (1) и (2) теоремы 5.10 из работы [5] при $\alpha = 0$. □

4. МОДУЛИ И ИХ ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

Мы будем рассматривать левые модули над ассоциативным кольцом R с 1.

Определение 17. Пусть R – некоторое ассоциативное кольцо с элементом $1 \in R$. **Левым R -модулем** называется аддитивная абелева группа M с операцией умножения на элементы кольца R : $R \times M \rightarrow M$, $(r, m) \mapsto rm$, которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$ для любых $m \in M$ и $r_1, r_2 \in R$;
- 2) $r(m_1 + m_2) = r m_1 + r m_2$ для любых $m_1, m_2 \in M$ и $r \in R$;
- 3) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$ для любых $m \in M$ и $r_1, r_2 \in R$;
- 4) $1m = m$ для любого $m \in M$.

R -модули – L_R -структуры, где язык L_R содержит $0, +, -$ и унарный функциональный символ для каждого $r \in R$.

Обозначим через T_R L_R -теорию R -модулей. Легко заметить, что теория T_R является универсальной.

Следствие 1. *Класс всех R -модулей абстрактен.*

Формулу вида $\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi$, где φ – конъюнкция атомных формул, называют **позитивно примитивной (п.п.)** формулой. П.п. формулы выражают разрешимость в модулях над кольцом R конечных систем линейных уравнений вида $r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n = 0$. Нетрудно показать, что п.п. формулы замкнуты относительно конъюнкции и навешивания квантора существования. Истинность п.п. формул сохраняется относительно расширений, прямых произведений и гомоморфизмов R -модулей.

Заметим, что всякая п.п. формула $\varphi(x)$ определяет подгруппу $\varphi(M)$ группы M .

Важность п.п. формул в теоретико-модельном смысле для R -модулей показывает следующая теорема:

Теорема 10 ([11], стр. 153). *Для каждого модуля M , каждая L_R -формула эквивалентна булевой комбинации позитивно примитивных формул.*

Пусть M_1 и M_2 две произвольные модели теории R -модулей T_R .

Следующий результат даёт критерий элементарной эквивалентности двух модулей на языке п.п.формульных подмножеств.

Теорема 11 ([11], стр. 155). *Модель M_1 элементарно эквивалентна M_2 тогда и только тогда, когда $\varphi/\psi(M_1) = \varphi/\psi(M_2)$ для всех п.п.формул $\psi \subset \varphi$.*

Следующий класс формул играет важную роль при исследовании замкнутости теорий относительно прямых произведений.

Базисной хорновой формулой называется формула вида $\bigwedge \Phi \rightarrow \psi$, где Φ – множество атомных формул, а ψ – либо атомная формула, либо \perp (тождественно ложная формула). Φ может быть пустым, тогда базисная хорнова формула есть только ψ . Хорновой формулой называется формула, состоящая из конечной (возможно пустой) строки кванторов, за которой следует конъюнкция базисных хорновых формул. Теория T называется хорновой, если она имеет систему аксиом, состоящую из хорновых предложений.

Легко заметить, что теория T_R является хорновой.

Теорема 12 ([12], стр. 521). *Пусть T_R – теория модулей. Тогда следующие условия эквивалентны.*

- (a) T_R замкнута относительно прямого произведения.
- (b) T_R – Хорнова теория.

Хорошо известная классическая теорема Вота устанавливает связь между замкнутостью теории относительно прямых произведений произвольного числа моделей этой теории и замкнутостью относительно декартова произведения двух моделей данной теории.

Теорема 13 (Вот [12], стр. 515). *Теория T замкнута относительно прямых произведений тогда и только тогда, когда она замкнута относительно декартова произведения двух сомножителей.*

Лемма 4. Пусть T – совершенная хорнова йонсоновская теория, $A \in \text{Mod}(T)$. Если $A \in E_T$, то прямое произведение семейства таких моделей $\prod_I A \in E_T$.

Доказательство. Пусть C_T – семантическая модель йонсоновской теории T . Заметим, что найдётся такое изоморфное вложение $f : A \rightarrow \prod_I A$, что $f(A) = \tilde{A} \subseteq \prod_I A$ и $\tilde{A} \cong A$. Так как класс всех моделей теории T абстрактен, то $A \subseteq \prod_I A \subseteq C_T$.

Предположим противное, пусть $\prod_I A \notin E_T$. Тогда найдётся такая экзистенциальная формула $\exists \bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, что для всякого кортежа $\bar{a} \in \prod_I A$ из того, что $C_T \models \exists \bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ следует, что $\prod_I A \not\models \exists \bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{a})$, т.е. $\prod_I A \models \forall \bar{x}\neg\varphi(\bar{x}, \bar{a})$. Но, т.к. A экзистенциально замкнута в C_T , то $A \models \exists \bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{a})$, а поскольку $A \subseteq \prod_I A$, мы должны иметь $\prod_I A \models \exists \bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{a})$. Пришли к противоречию, значит наше предположение было неверно. \square

Предложение 3. Теория T_R – йонсоновская теория.

Доказательство. Проверим выполнимость условий (1)-(4) определения 5.

Тривиально выполняются условия (1) и (2): теория T_R имеет бесконечную модель и является индуктивной, т.к. она эквивалентна множеству \forall -предложений, а значит и $\forall\exists$ -предложений.

(3) Поскольку теория T_R является хорновой, то, согласно теореме 12, она замкнута относительно прямого произведения. Тогда по теореме 13 замкнута относительно декартовых произведений двух сомножителей. Следовательно, если M_1 и M_2 – два R -модуля, то их прямое произведение $M_1 \times M_2$ также является R -модулем. Множество элементов $\langle m, 0^{M_2} \rangle \in M_1 \times M_2$, где 0^{M_2} – нейтральный элемент M_2 , является подмодулем $M_1 \times M_2$, изоморфным M_1 . Аналогично, множество элементов $\langle 0^{M_1}, n \rangle \in M_1 \times M_2$, где 0^{M_1} – нейтральный элемент M_1 , является подмодулем $M_1 \times M_2$, изоморфным M_2 . Таким образом, теория T_R обладает свойством совместного вложения (*JEP*).

Проверим выполнимость условия (4). Пусть $M, M_1, M_2 \in \text{Mod}(T_R)$ и $f_1 : M \rightarrow M_1$, $f_2 : M \rightarrow M_2$ – изоморфные вложения. Т.к. класс модулей – абстрактный, т.е. замкнут относительно изоморфизмов, мы можем представить, что M_1 и M_2 пересекаются по M . Следовательно, можно определить фактор множество $M_1 \times_M M_2 = (M_1 \times M_2) / \{(m, -m) : m \in M\}$. Тогда канонические инъекции $g_1 : M_1 \rightarrow M_1 \times_M M_2$ и $g_2 : M_2 \rightarrow M_1 \times_M M_2$ индуцируют вложения $g_1^* : M_1 \rightarrow M_1 \times_M M_2$ и $g_2^* : M_2 \rightarrow M_1 \times_M M_2$ соответственно такие, что $g_1^* f_1 = g_2^* f_2$:

$$\begin{array}{ccc}
 & M_1 & \\
 f_1 \nearrow & & \searrow g_1^* \\
 M & & M_1 \times_M M_2 \\
 f_2 \searrow & & \nearrow g_2^* \\
 & M_2 &
 \end{array}$$

Т.е. T_R обладает свойством амальгамируемости (*AP*), а следовательно T_R является йонсоновской теорией. \square

Вопрос о существовании модельного компаньона теории *R*-модулей связан с когерентными кольцами. Напомним определение таких колец.

Определение 18 ([13], стр. 97). *Кольцо R называется когерентным (слева), если каждый (левосторонний) идеал в R конечного типа является конечно представимым, т.е. фактормодулем конечно порожденного свободного модуля по конечно порожденному свободному подмодулю.*

Следующие кольца являются примерами когерентных колец: левые нётеровы кольца, кольца, у которых конечно-порождённые левые идеалы являются инъективными, регулярные кольца.

Следующая теорема даёт критерий существования модельного компаньона для *R*-модулей.

Теорема 14 ([13], стр. 97). *Теория R -модулей имеет модельный компаньон тогда и только тогда, когда кольцо R когерентно, в этом случае она допускает модельное пополнение, являющееся полным и допускающее элиминацию кванторов.*

Заметим, что согласно теореме 14 теория T_R будет иметь модельный компаньон только в случае, если кольцо *R* когерентно, а так как T_R йонсоновская теория, то из теоремы 6 следует, что теория T_R , вообще говоря, не является совершенной, а совершенной является в случае, когда кольцо *R* когерентно.

Пусть *M* – произвольный *R*-модуль, $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ – п.п.формулы языка теории T_R , где $\psi \subset \varphi$. **Йонсоновским инвариантом модуля *M*** относительно $JSp(M)/\bowtie$, будем называть следующее множество индексов: $\{(\varphi(C_{[T]}): (\varphi \wedge \psi)(C_{[T]})) \mid [T] \in JSp(M)/\bowtie, C_{[T]} \text{ – семантическая модель класса } [T]\}$ и обозначать это множество через $JInv(M)$.

Следующая теорема есть уточнение теоремы 11 в рамках изучения йонсоновских теорий модулей.

Теорема 15. *Пусть M_1 и M_2 – два произвольных R -модуля, тогда следующие условия эквивалентны:*

- (1) $M_1 \underset{JSp}{\bowtie} M_2$;
- (2) $JInv(M_1) = JInv(M_2)$.

Доказательство. Пусть выполнено (1), тогда $JSp(M_1)/\bowtie = JSp(M_2)/\bowtie$. Предположим противное, т.е. $JInv(M_1) \neq JInv(M_2)$. Тогда найдутся две такие п.п.формулы $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ языка теории T_R и $[T] \in JSp(M_1)/\bowtie$, что $(\varphi(C_{[T]}): (\varphi \wedge \psi)(C_{[T]})) \neq (\varphi(C_{[\tilde{T}]}) : (\varphi \wedge \psi)(C_{[\tilde{T}]}))$ для всех $[\tilde{T}] \in JSp(M_2)/\bowtie$. Но тогда по теореме 11 $C_{[T]} \not\equiv C_{[\tilde{T}]}$ для всех $[\tilde{T}] \in JSp(M_2)/\bowtie$, следовательно $[T] \notin JSp(M_2)/\bowtie$, а значит $T \notin JSp(M_2)$. А это противоречит условию (1), значит наше предположение неверно.

Из (2) в (1). Пусть $JInv(M_1) = JInv(M_2)$, тогда по теореме 11 $M_1 \equiv M_2$ и согласно лемме 3 $M_1 \underset{JSp}{\bowtie} M_2$. \square

Класс экзистенциально замкнутых моделей индуктивной теории существует, но не всегда элементарен. Когда мы рассматриваем йонсоновские теории,

элементарность этого класса совпадает с классом моделей центра рассматриваемой йонсоновской теории. К примеру, теория групп является йонсоновской и её класс экзистенциально замкнутых моделей не элементарен [14]. Но, тем не менее, изучение свойств этого класса представляет большой интерес, так как, к примеру, до сих пор неизвестно строение семантической модели этой теории. Хорошо известно, что ([15], стр. 185) любые две экзистенциально замкнутые модели, принадлежащие классу моделей любой индуктивной теории, нельзя различить между собой с помощью $\forall\exists$ -предложений. Поэтому требование $\forall\exists$ -полноты является необходимым условием при рассмотрении связи экзистенциально замкнутых модулей с понятием категоричности. Рассмотрим следующий результат.

Теорема 16. *Пусть T_R – $\forall\exists$ -полная йонсоновская теория. Тогда, если T_R – κ -категорична, где $\kappa \geq \omega$, то T_R – совершенна.*

Доказательство. Если $\kappa \geq \omega_1$, то в силу теоремы Морли о несчётной категоричности T_R – совершенна.

Пусть T_R – ω -категоричная теория. Так как T_R полна для $\forall\exists$ -предложений и, согласно предложению 3, T_R является йонсоновской теорией, то, по теореме 9, T_R^* – ω -категорична. Но T_R^* – полная теория, тогда, по теореме 3, T_R^* имеет ω -категоричный модельный компаньон T^M . Из определения модельного компаньона следует, что T_R^* и T^M взаимно модельно совместны. Заметим, что согласно лемме 2, теории T_R и T_R^* являются взаимно модельно совместными. Следовательно, по транзитивности, теории T_R и T^M также взаимно модельно совместны. Поскольку T^M – модельно полная теория, то T^M является модельным компаньоном T_R .

Для доказательства основного результата достаточно доказать, что $T_R^* = T^M$. Тогда, в силу теоремы 6, будет следовать совершенность теории T_R . Для этого нам необходимо сначала показать, что счётная модель T_R , T_R^* и T^M одна и та же.

Поскольку T_R – индуктивная теория, то, согласно предложению 2, всякая её модель вкладывается в некоторую экзистенциально замкнутую модель E' этой теории. По теореме Лёвенгейма – Скулема (вниз), существует такая модель E мощности ω , что $E \preceq E'$. Согласно лемме 1, семантическая модель C_{T_R} теории T_R является экзистенциально замкнутой, а по теореме Лёвенгейма – Скулема (вниз), существует элементарная подмодель C' модели C_{T_R} : $|C'| = \omega$, которая также является экзистенциально замкнутой моделью теорий T_R и T_R^* . Но, так как эти теории ω -категоричны, то $C' \cong E$. Так как теории T_R^* и T^M взаимно модельно совместны, то модель E теории T_R^* изоморфно вкладывается в некоторую модель A теории T^M и $(T_R^*)_{\forall} = (T^M)_{\forall}$. Но тогда E также будет являться и моделью T^M . Если бы это было не так, то, поскольку теория T^M модельно полная, то нашлось бы такое универсальное предложение $\varphi \in (T^M)_{\forall}$, что $A \models \varphi$ и $E \not\models \varphi$, откуда следует, что $\varphi \notin (T_R^*)_{\forall}$. Получили противоречие. Таким образом, $E \in \text{Mod}(T_R) \cap \text{Mod}(T_R^*) \cap \text{Mod}(T^M)$.

Теперь покажем, что $T_R^* = T^M$. Пусть $\varphi \in T_R^*$, тогда возможны случаи: 1) $\varphi \notin T^M$, а $\neg\varphi \in T^M$; 2) $\varphi \notin T^M$ и $\neg\varphi \notin T^M$; 3) $\varphi \in T^M$. Случай 1) невозможен, т.к. $E \in \text{Mod}(T_R^*) \cap \text{Mod}(T^M)$ и мы бы имели $E \models \varphi$ и $E \models \neg\varphi$. В случае 2) имеем, что теории $T^M \cup \{\varphi\}$ и $T^M \cup \{\neg\varphi\}$ – совместны. Тогда найдутся такие модели $A_1 \in \text{Mod}(T^M \cup \{\varphi\})$ и $A_2 \in \text{Mod}(T^M \cup \{\neg\varphi\})$, что $A_1 \models \varphi$, а $A_2 \models \neg\varphi$. По теореме Лёвенгейма – Скулема найдутся счётные элементарные подмодели

$B_1 \prec A_1$ и $B_2 \prec A_2$. Но, так как теория T^M ω -категорична, то $B_1 \cong B_2 \cong E$ и мы имеем, что $E \models \varphi$ и $E \models \neg\varphi$. Получили противоречие. Значит второй случай невозможен. Таким образом, имеем только случай 3), где $\varphi \in T^M$.

Пусть теперь $\varphi \in T^M$. Так как теория T_R^* полна, то либо 1) $\varphi \in T_R^*$, либо 2) $\neg\varphi \in T_R^*$. Но случай 2) невозможен, так как мы бы имели, что $E \models \varphi$ и $E \models \neg\varphi$.

Итак, мы доказали, что $T_R^* = T^M$. т.е. T_R^* является модельным компаньоном теории T_R . Тогда по теореме 6 теория T_R – совершенна. \square

Лемма 5. Пусть T – йонсоновская теория. Тогда для любой модели $A \in E_T$ теория $Th_{\forall\exists}(A)$ является йонсоновской теорией.

Доказательство можно извлечь из [6].

Хорошо известен следующий результат о счётной категоричности произвольного счётного модуля над счётным кольцом.

Теорема 17 ([16], стр. 217). Для всякого счётного кольца R и любого счётного R -модуля A следующие условия эквивалентны:

- (1) A – \aleph_0 -категорична;
- (2) существует $n \in \omega$, конечные R -модули B_0, \dots, B_{n-1} и кардиналы $\kappa_0, \dots, \kappa_{n-1} \leq \omega$ такие, что $A = \bigoplus_{i < n} B_i^{(\kappa_i)}$.

В связи с этой теоремой мы получили аналогичный результат о счётно категоричных экзистенциально замкнутых R -модулей, когда теория этих модулей совершенна.

Теорема 18. Пусть T_R – теория R -модулей, полная для $\forall\exists$ -предложений, $M \in E_{T_R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $Th_{\forall\exists}(M)$ – ω -категорична;
- (2) $Th_{\forall\exists}^*(M)$ – ω -категорична, где $Th_{\forall\exists}^*(M)$ – центр теории $Th_{\forall\exists}(M)$;
- (3) для всякого счётного когерентного кольца R и всякого счётного R -модуля $A \in E_{T_R}$ существует $n \in \omega$, конечные R -модули B_0, \dots, B_{n-1} и кардиналы $\kappa_0, \dots, \kappa_{n-1} \leq \omega$ такие, что $A = \bigoplus_{i < n} B_i^{(\kappa_i)}$.

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из леммы 5 и теоремы 9.

Эквивалентность условий (1) и (3) следует из теорем 16 и 17. \square

REFERENCES

- [1] K.I. Beidar, A.V. Mikhalev, G.E. Puninski, *Logical aspects of the theory of rings and modules*, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, **1:1** (1995), 1–62. Zbl 0892.16001
- [2] E.I. Bunina, A.V. Mikhalev, *Elementary equivalence of categories of modules over rings, endomorphism rings, and automorphism groups of modules*, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, **10:2** (2004), 51–134. Zbl 1073.16001
- [3] A.R. Yeshkeyev, O.I. Ulbrikht, *JSp-cosemanticness and JSB property of Abelian groups*, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **13** (2016), 861–874. Zbl 1390.03036
- [4] J. Barwise Ed., *Handbook of mathematical logic*, Part 1. Model theory, Moscow: Nauka, 1982.
- [5] T.G. Mustafin, *Generalized Jonsson Conditions and a Description of Generalized Jonsson Theories of Boolean Algebras*, *Siberian Adv. Math.*, **10:3** (2000), 1–58.
- [6] A.R. Yeshkeyev, *Jonsson theories*, Karaganda: KarGU, 2009.
- [7] W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge: Cambridge University Press, 1993. Zbl 0789.03031

- [8] G.E. Sacks, *Saturated Model Theory*, Mathematics Lecture Note Series. Reading, Mass.: W. A. Benjamin, Inc. Advanced Book Program, 1972. Zbl 0242.02054
- [9] Y.T. Mustafin, *Quelques proprietes des theories de Jonsson*, The Journal of Symbolic Logic, **67**:2 (2002), 528–536. Zbl 1013.03046
- [10] A.R. Yeshkeyev, G.S. Begetayeva, *Stability of Δ -PM-theory and its center*, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, **4(56)** (2009), 29–34.
- [11] M. Ziegler, *Model theory of modules*, Annals of Pure and Applied Logic, **26** (1984), 149–213. Zbl 0593.16019
- [12] R. Villemaire, *Theories of modules closed under direct products*, The Journal of Symbolic Logic, **57**:2 (1992), 515–521. Zbl 0805.03021
- [13] B. Poizat, *A Course in Model Theory: An Introduction to Contemporary Mathematical Logic*, Translated by Moses Klein, New York, NY: Springer, 2000. Zbl 0951.03002
- [14] A. Macintyre, *On algebraically closed groups*, Ann. Math., **96** (1972), 53–97. Zbl 0254.20021
- [15] W. Hodges, *A Shorter Model Theory*, Cambridge: Cambridge University Press, 1997. Zbl 0873.03036
- [16] W. Baur, *\aleph_0 -Categorical Modules*, The Journal of Symbolic Logic, **40** (1975), 213–220. Zbl 0309.02059

AIBAT RAFHATOVICH YESHKEYEV
BUKETOV KARAGANDA STATE UNIVERSITY,
28, UNIVERSITETSKAYA STR.,
KARAGANDA, 100028, KAZAKHSTAN
E-mail address: modth1705@mail.ru

OLGA IVANOVNA ULBRIKHT
BUKETOV KARAGANDA STATE UNIVERSITY,
28, UNIVERSITETSKAYA STR.,
KARAGANDA, 100028, KAZAKHSTAN
E-mail address: ulbrikht@mail.ru