S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1260–1275 (2019) УДК 517.925
DOI 10.33048/semi.2019.16.085 MSC 34C05

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ТИПА ДАРБУ

Е.П. ВОЛОКИТИН, В.М. ЧЕРЕСИЗ

Abstract. We construct the integrating factor of the differential systems of the form $\dot{x} = x+P_n(x,y)$, $\dot{y} = y+Q_n(x,y)$ where $P_n(x,y)$ and $Q_n(x,y)$ are homogeneous polynomials.

Keywords: polynomial systems, integrating factor, polynomial first integrals, rational first integrals, symmetries.

Введение

Задача интегрирования плоских систем обыкновенных дифференциальных уравнений возникла вместе с самим понятием дифференциального уравнения и является классической задачей качественной теории уравнений. Чаще всего эта задача рассматривается для полиномиальных систем.

Одним из приёмов, позволяющих решить дифференциальное уравнение или систему уравнений, является отыскание интегрирующего множителя.

Пусть имеется плоская система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x,y),\ \dot{y} = Q(x,y), \tag{1}$$

где $P(x,y), Q(x,y)$ — функции класса $C^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество.

Непрерывно дифференцируемая функция $H(x,y)$ называется первым интегралом системы (1) в открытом множестве $U \subset G$, если она сохраняет постоянное значение вдоль любого решения этой системы.

Volokitin, E.P., Cheresiz, V.M., An integrating factor of the Darboux differential systems.

© 2019 Волокитин Е.П., Чересиз В.М.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проект № 0314-2019-0007), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00057).

Поступила 2 июля 2019 г., опубликована 19 сентября 2019 г.

Первый интеграл характеризуется соотношением

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}P(x,y)+\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}Q(x,y)=0.$$

Наличие первого интеграла системы позволяет нам описать её фазовый портрет, поскольку все траектории определяются множествами уровня $H(x,y)=\mathrm{const}$.

Если выполнено условие

$$\operatorname{div}(P,Q)=\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}=0,\quad (x,y)\in U,$$

система (1) называется гамильтоновой. В каждой односвязной подобласти множества U существует первый интеграл системы, и он восстанавливается из сооношений

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}=Q(x,y),\ \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}=-P(x,y).$$

Поэтому будем считать, что $\operatorname{div}(P,Q)\not\equiv 0$ ни в каком открытом подмножестве множества G.

Непрерывно дифференцируемая функция $m(x,y)$, определённая и не обращающаяся в нуль в области $U\subset G$, называется интегрирующим множителем системы (1), если

$$\frac{\partial}{\partial x}(m(x,y)P(x,y))+\frac{\partial}{\partial y}(m(x,y)Q(x,y))=0\quad (x,y)\in U. \tag{2}$$

С помощью интегрирующего множителя первый интеграл $H(x,y)$ системы (1) восстанавливается из соотношений

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}=m(x,y)Q(x,y),\ \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}=-m(x,y)P(x,y).$$

Равенство (2) можно переписать в виде

$$Pm_x+Qm_y=-m(P_x+Q_y). \tag{3}$$

Мы имеем уравнение в частных производных[1] для определения неизвестной функции $m(x,y)$. Как правило, задача интегрирования этого уравнения не проще, чем исходная задача интегрирования системы (1). Отчасти проблема облегчается тем обстоятельством, что достаточно найти только одно частное решение уравнения (3).

Пример 1.

Расмотрим плоскую систему ОДУ

$$\dot x=xy+x^3,\ \dot y=y^2 \tag{4}$$

и отвечающее ей уравнение

$$y^2dx-(xy+x^3)dy=0. \tag{5}$$

Уравнение (3) является квазилинейным уравнением в частных производных

$$(xy+x^3)m_x+y^2m_y=-3(x^2+y)m. \tag{6}$$

Характеристическая система для него имеет вид

$$\frac{dx}{x^3+xy}=\frac{dy}{y^2}=-\frac{dm}{3m(x^2+y)}\,. \tag{7}$$

[1]Иногда это уравнение принимают за определение интегрирующего множителя.

Система (7) имеет очевидный первый интеграл

$$mx^3 = C,$$

который даёт частное решение уравнения (6)

$$m(x,y) = \frac{1}{x^3}\,,$$

и мы получаем интегрирующий множитель системы (4).

Для того, чтобы найти общее решение уравнения (6), нам нужен другой первый интеграл системы (7). Нетрудно видеть, что для его отыскания нам придётся рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{x^3+xy} = \frac{dy}{y^2},$$

которое эквивалентно уравнению (5).

Для отыскания интегрирующего множителя иногда оказывается полезным следующий приём: искать решение уравнения (3) в виде суперпозиции $m(x,y) = \mu(\varphi(x,y))$, где $\varphi(x,y)$ — фиксированная нами непрерывно дифференцируемая функция на открытом множестве $G_\varphi \subset G$, а $\mu(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемая функция одной переменной φ, которую следует найти. Такой интегрирующий множитель называют φ-автомодельным интегрирующим множителем.

Уравнение (3) в таком случае можно записать в виде

$$P\frac{d\mu}{d\varphi}\varphi_x + Q\frac{d\mu}{d\varphi}\varphi_y = -\mu(\varphi)(P_x + Q_y). \tag{8}$$

Из (8) следует, что $P(x,y)\varphi_x(x,y) + Q(x,y)\varphi_y(x,y)$ не равно тождественно нулю на G_φ.

Обозначим

$$D = \{(x,y) \in G_\varphi : P\varphi_x + Q\varphi_y \neq 0\}.$$

D — непустое открытое множество. Очевидно, $\operatorname{grad}\varphi \neq (0,0)$ на множестве D.

Уравнение (8) может быть переписано в следующей форме

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\varphi}\Big|_{\varphi(x,y)} = -\frac{P_x + Q_y}{P\varphi_x + Q\varphi_y} = -F(x,y),\ (x,y) \in D. \tag{9}$$

Здесь левая часть как функция от x, y зависит лишь от $\varphi(x,y)$. Значит, стоящая в правой части функция $F(x,y)$ тоже зависит от $\varphi(x,y)$, то есть $F(x,y) = f(\varphi(x,y))$, где $f(\varphi)$ — функция одной переменной φ.

Поэтому равенство (9) можно записать в виде

$$\frac{1}{\mu(\varphi)}\frac{d\mu}{d\varphi}(\varphi) = -f(\varphi). \tag{10}$$

В (10) левая часть непрерывно зависит от φ. Значит и $f(\varphi)$ непрерывно зависит от φ.

Итак, если существует интегрирующий множитель $m(x,y) = \mu(\varphi(x,y))$ с непрерывно дифференцируемой функцией $\mu(\varphi)$, то функция $F(x,y)$ равна $f(\varphi(x,y))$, где $f(\varphi)$ — непрерывная функция от φ. Таким образом, φ-автомодельность функции $F(x,y)$ и непрерывность функции $f(\varphi)$ являются необходимыми условиями существования непрерывно дифференцируемого φ-автомодельного интегрирующего множителя $\mu(\varphi(x,y))$.

Значит, прежде, чем доказывать существование φ-автомодельного интегрирующего множителя $\mu(\varphi(x,y))$, необходимо доказать непрерывность функции $f(\varphi)$ по переменной φ.

Пусть $(x_0, y_0) \in D$.

Тогда либо $\varphi_y(x_0,y_0) \neq 0$, либо $\varphi_x(x_0,y_0) \neq 0$. Предположим, что оказалось $\varphi_y(x_0,y_0) \neq 0$. (В случае $\varphi_x(x_0,y_0) \neq 0$ рассуждения аналогичны.) Обозначим $D_1 = \{(x,y) \in D : \varphi_y(x,y) \neq 0\}$. Это непустое открытое множество, ибо $(x_0,y_0) \in D_1$. Пусть $D_y \subset D_1$ — любое открытое выпуклое по переменной y множество, содержащее точку (x_0,y_0). (Таков, например, прямоугольник $\Pi = \{(x,y) : |x-x_0| < a, |y-y_0| < b\} \subset D_1$, где a, b достаточно малы.) На множестве D_y введём новые координаты $u = x$, $v = \varphi(x,y)$.

Отображение $T : (x,y) \to (u,v)$ непрерывно и инъективно на множестве D_y: $(x,y) \neq (\tilde{x},\tilde{y}) \Rightarrow (u,v) \neq (\tilde{u},\tilde{v})$. Действительно, если $x \neq \tilde{x} \Rightarrow u \neq \tilde{u}$, а если $x = \tilde{x}, y \neq \tilde{y}$, но $v = \varphi(x,y)$, а $\tilde{v} = \varphi(x,\tilde{y})$, и так как функция $\varphi(x,y)$ строго монотонна по y на D_y, $v \neq \tilde{v}$. Тогда по теореме Брауэра об инвариантности области [1] отображение T открытое: образ любого открытого множества есть открытое множество. Значит, обратное отображение $T^{-1} : (u,v) \to (x(u,v), y(u,v))$ непрерывно по u, v на открытом множестве $T(D_y)$.

Функция $F(x,y)$, непрерывная на D_y, в новых координатах перейдёт в функцию $\tilde{F}(u,v) = F(x(u,v), y(u,v))$, непрерывную на $T(D_y)$. Точка $(x(u,v), y(u,v)) \in D_y \subset D$, а функция $F(x,y) = f(\varphi(x,y)) = f(v)$ при $(x,y) \in D$. Значит, функция $\tilde{F}(u,v)$ равна $f(v)$, и потому $f(v)$ непрерывна по v на множестве $V = \{v \in \mathbb{R} : (u,v) \in T(D_y)\}$. Так как D_y открыто, его проекция V — непустое открытое множество. Значит, V есть объединение не более, чем счётной совокупности открытых непересекающихся интервалов V_j. Из (10) получаем

$$\frac{d}{d\varphi} \ln \mu(\varphi) = -f(\varphi), \ \varphi \in V_j.$$

Отсюда следует, что

$$\ln(\mu(\varphi)) = -\mathcal{F}_j(\varphi),$$

где $\mathcal{F}_j(\varphi)$ — первообразная $f(\varphi)$ на интегрвале V_j.

Значит, $\mu(\varphi) = \exp(-(\mathcal{F}_j(\varphi)), \ \varphi \in V_j$.

Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема 1. *Пусть $P(x,y), Q(x,y) \in C^1(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество такие, что $\partial P(x,y)/\partial x + \partial Q(x,y)/\partial y \not\equiv 0$ ни в каком открытом подмножестве множества G. Пусть $\varphi(x,y) \in C^1(G_\varphi)$, где $G_\varphi \subset G$ — открытое множество.*

Для того, чтобы у системы (1) *существовал интегрирующий множитель вида $m(x,y) = \mu(\varphi(x,y))$ с непрерывно дифференцируемой функцией $\mu(\varphi)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство*

$$\frac{P_x + Q_y}{P\varphi_x + Q\varphi_y} = f(\varphi(x,y)),$$

где $f(\varphi)$ — функция одной переменной φ. При этом

$$\mu(\varphi) = \exp\left(-\int f(\varphi) d\varphi\right).$$

Замечание 1. *Обычно в литературе при непрерывной дифференцируемости функций $P(x,y), Q(x,y)$ для существования интегрирующего множителя дополнительно требовалась непрерывность функции $f(\varphi)$. Мы доказали, что это дополнительное требование является излишним.*

Кроме того из доказательства следует, что теорема 1 носит глобальный характер.

Наряду с интегрирующим множителем рассматривают функцию $V(x,y) = 1/m(x,y)$, так называемый обратный интегрирующий множитель. Множество нулей обратного интегрирующего множителя играет заметную роль при изучении динамики системы (1), см., например, [2].

В первом разделе нашей работы мы докажем существование автомодельного интегрирующего множителя для полиномиальных систем типа Дарбу.

Второй раздел посвящён обсуждению проблемы существования φ-автомодельного множителя в том случае, когда функция $\varphi(x,y)$ является инвариантом группы Ли, соответствующей исходной системе.

1. Интегрирующий множитель для систем типа Дарбу

Системой типа Дарбу называется плоская система ОДУ вида

$$\dot{x} = x + P_n(x,y),\ \dot{y} = y + Q_n(x,y), \tag{11}$$

где $P_n(x,y),\ Q_n(x,y)$ — однородные многочлены степени n.

Системы вида ввёл в рассмотрение Дарбу [3] в своих исследованиях по алгебраической геометрии. Впоследствие системы вида (11) рассматривались различными авторами, см. [4] и процитированную там литературу. В основном в этих работах рассматривались вопросы, связанные с аналитическими и динамическими свойствами систем типа Дарбу (интегрируемость, наличие или отсутствие предельных циклов, локальные и глобальные фазовые портреты и т. д.).

Системы типа Дарбу возникают также при рассмотрении проблемы изохронности центра, [5], [6]. Имеется связь между системами типа Дарбу и уравнениями Абеля и Риккати [7].

Теорема 2. *Система* (11) *имеет интегрирующий множитель $m(x,y)$ вида*

$$m(x,y) = \frac{1}{x^2}\,\mu\big(\frac{y}{x}\big).$$

Доказательство. В качестве вспомогательного утверждения докажем вначале что однородная система

$$\dot{x} = P_n(x,y),\ \dot{y} = Q_n(x,y)$$

имеет автомодельный интегрирующий множитель $m_1 = \mu(y/x)$.

В самом деле, в расматриваемом случае (9) имеет вид

$$F(x,y) = \frac{\big(P_n(x,y)\big)_x + \big(Q_n(x,y)\big)_y}{P_n(x,y)\varphi_x(x,y) + Q_n(x,y)\varphi_y(x,y)},\quad \varphi = \frac{y}{x}.$$

Числитель и знаменатель этого выражения являются однородными функциями одной и той же степени $n-1$. Поделив их на x^{n-1}, получим

$$F(x,y) = F\big(1, \frac{y}{x}\big) = f(\varphi),$$

что и требовалось в соответствии с теоремой 1.

Система

$$\dot{x} = \frac{P_n(x,y)}{x^2},\ \dot{y} = \frac{Q_n(x,y)}{x^2}$$

является однородной степени $n-2$, и из предыдущего следует что она имеет автомодельный интегрирующий множитель $m_1(x,y) = \mu(y/x)$. Для найденной функции $m_1(x,y)$

$$\Big(\frac{P_n(x,y)}{x^2}\mu(y/x)\Big)_x + \Big(\frac{Q_n(x,y)}{x^2}\mu(y/x)\Big)_y = 0. \tag{12}$$

Покажем, что функция $m(x,y) = m_1(x,y)/x^2 = \mu(y/x)/x^2$ будет интегрирующим множителем для системы (11).

Имея в виду (12), получим

$$\Big((x+P_n(x,y))m(x,y)\Big)_x + \Big((y+Q_n(x,y))m(x,y)\Big)_y =$$
$$= \Big(x\frac{1}{x^2}\mu(y/x)\Big)_x + \Big(y\frac{1}{x^2}\mu(y/x)\Big)_y + \Big(\frac{P_n(x,y)}{x^2}\mu(y/x)\Big)_x + \Big(\frac{Q_n(x,y)}{x^2}\mu(y/x)\Big)_y =$$
$$= -\frac{1}{x^2}\nu(y/x) + \frac{1}{x}\frac{d\nu}{d\omega}\Big(-\frac{y}{x^2}\Big) + \frac{1}{x^2}\nu(y/x) + \frac{y}{x^2}\frac{d\nu}{d\omega}\frac{1}{x} = 0.$$

что и требовалось доказать.

□

Замечание 2. *В принципе, изложенный результат может быть получен на основе исследований, приведённых в* [8]. *Однако в целях полноты изложения мы предпочли привести здесь наш вариант формулировки и простое доказательство требуемого утверждения.*

Пример 2.

Рассмотрим систему типа Дарбу

$$\dot{x} = x + p_n(x,y),\ \dot{y} = y + q_n(x,y), \tag{13}$$

в которой однородные нелинейности $p_n(x,y),\ q_n(x,y)$ удовлетворяют условиям Коши—Римана

$$\partial p_n/\partial x = \partial q_n/\partial y,\ \partial p_n/\partial y = -\partial q_n/\partial x. \tag{14}$$

Если ввести переменную $z = x + iy \in \mathbb{C}$, система (13) может быть записана в виде

$$\dot{z} = z + az^n,\ a, z \in \mathbb{C}.$$

Без потери общности мы можем считать, что $a = 1$ и рассматривать систему (13), в которой $p_n(x,y) + iq_n(x,y) = (x+iy)^n$.

Полагая $\varphi = y/x$, найдём для системы (13) интегрирующий множитель $m(x,y) = \mu(y/x)/x^2$.

Вначале ищем φ-автомодельный множитель $\mu(\varphi)$ для системы

$$\dot{x} = \frac{p_n(x,y)}{x^2},\ \dot{y} = \frac{q_n(x,y)}{x^2}. \tag{15}$$

В данном случае функция $F(x,y)$ из (9) имеет вид

$$F(x,y)=\frac{\partial(p_n/x^2)/\partial x+\partial(q_n/x^2)/\partial y}{(p_n/x^2)\varphi_x+(q_n/x^2)\varphi_y}=-\frac{2xp_n-x^2\partial p_n/\partial x-x^2\partial q_n/\partial y}{xq_n-yp_n}=$$
$$=-\frac{2xp_n-2x^2\partial p_n/\partial x}{xq_n-yp_n}.$$

Последнее равенство имеет место вследствие (14).

Докажем, что

$$\frac{2xp_n-2x^2\partial p_n/\partial x}{xq_n-yp_n}=\frac{2(n-2)xy}{x^2+y^2}-\frac{2x\,\partial q_{n-1}/\partial y}{q_{n-1}},\quad q_{n-1}=\Im(x+iy)^{n-1}. \tag{16}$$

Поскольку

$$xq_n-yp_n=(x^2+y^2)q_{n-1}, \tag{17}$$

достаточно доказать, что

$$p_n-x\,\partial p_n/\partial x-(n-2)yq_{n-1}+(x^2+y^2)\,\partial q_{n-1}/\partial y=0. \tag{18}$$

Используя очевидные равенства

$$p_n=\frac{z^n+\bar z^n}{2},\ q_n=\frac{z^n-\bar z^n}{2i},\ q_{n-1}=\frac{z^{n-1}-\bar z^{n-1}}{2i},$$
$$z_x=\bar z_x=1,\ z_y=i,\ \bar z_y=-i,$$
$$\partial p_n/\partial x=\frac{n}{2}(z^{n-1}+\bar z^{n-1}),\ \partial q_{n-1}/\partial y=\frac{n-1}{2}(z^{n-2}+\bar z^{n-2}),$$

имеем

$$p_n-x\,\partial p_n/\partial x-(n-2)yq_{n-1}+(x^2+y^2)\,\partial q_{n-1}/\partial y=$$
$$=\frac{z^n+\bar z^n}{2}-x\frac{n}{2}(z^{n-1}+\bar z^{n-1})-(n-2)y\frac{n-1}{2}(z^{n-2}+\bar z^{n-2})+$$
$$+(x^2+y^2)\frac{n-1}{2}(z^{n-2}+\bar z^{n-2})=$$
$$=\frac{z^{n-2}}{2}(z^2-nxz+(n-2)yz+(n-1)(x^2+y^2))+$$
$$\frac{\bar z^{n-2}}{2}(\bar z^2-nx\bar z+(n-2)y\bar z+(n-1)(x^2+y^2))+ixy(2-n+n-2)=0.$$

Тем самым равенство (18), а значит, и (16) доказано.

Ввиду однородности

$$q_{n-1}(x,y)=x^{n-1}q_{n-1}(1,\frac{y}{x}).$$

Поэтому

$$\partial q_{n-1}(x,y)/\partial y=x^{n-2}\frac{dq_{n-1}(1,\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=y/x}.$$

Отсюда вытекает, что

$$f(\varphi)=-\frac{2xp_n-2x^2\,\partial p_n/\partial x}{xq_n-yp_n}=-\frac{2(n-2)xy}{x^2+y^2}-\frac{2x\,\partial q_{n-1}(x,y)/\partial y}{q_{n-1}(x,y)}=$$
$$=-2\frac{(n-2)\varphi}{1+\varphi^2}+\frac{2}{q_{n-1}(1,\varphi)}\frac{dq_{n-1}(1,\varphi)}{d\varphi}.$$

В таком случае

$$L(\varphi) = -\int f(\varphi)d\varphi = (n-2)\ln(1+\varphi^2) - 2\ln q_{n-1}(1,\varphi),$$

и

$$\mu(\varphi) = \exp L(\varphi) = \frac{(1+\varphi^2)^{n-2}}{q_{n-1}^2(1,\varphi)},$$

то есть

$$\tilde{\mu}(x,y) = \mu(y/x) = \frac{x^2(x^2+y^2)^{n-2}}{q_{n-1}^2(x,y)}$$

является интегрирующим множителем системы (15).

В силу (17)

$$\tilde{\mu}(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2)^n}{(xq_n(x,y) - yp_n(x,y))^2}.$$

Окончательно

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x^2}\tilde{\mu}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^n}{(xq_n(x,y) - yp_n(x,y))^2}$$

будет искомым интегрирующим множителем системы (13)–(14).

Пусть даны гладкие векторные поля

$$\mathcal{X} = P(x,y)\partial_x + Q(x,y)\partial_y, \quad \mathcal{Y} = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y.$$

Скобкой Ли этих векторных полей называется поле $\mathcal{Z} = [\mathcal{X},\mathcal{Y}]$

$$\mathcal{Z} = [\mathcal{X},\mathcal{Y}] = \big(P_x\xi - P\xi_x + P_y\eta - Q\xi_y\big)\partial_x + \big(Q_x\xi - P\eta_x + Q_y\eta - Q\eta_y\big)\partial_y.$$

Говорят, что системы

$$\dot{x} = P(x,y),\ \dot{y} = Q(x,y), \quad \dot{x} = \xi(x,y),\ \dot{y} = \eta(x,y)$$

коммутируют, если $[\mathcal{X},\mathcal{Y}] = (0,0)^\top$.

Если рассматриваемые системы коммутируют, то функция

$$\mu(x,y) = \frac{1}{P(x,y)\eta(x,y) - Q(x,y)\xi(x,y)}$$

является интегрирующим множителем для каждой из систем [9] (так называемый интегрирующий множитель Ли).

В [10] было показано, что система (13) коммутирует с системой

$$\dot{x} = -y - q_n(x,y),\ \dot{y} = x + p_n(x,y). \tag{19}$$

Отсюда следует, что функция

$$\mu_1(x,y) = \frac{1}{(x+p_n(x,y))^2 + (y+q_n(x,y))^2}. \tag{20}$$

будет интегрирующим множителем для каждой из коммутирующих систем (13), (19).

В свою очередь, отношение двух интегрирующих множителей является интегралом системы.

Значит, функция

$$H(x,y) = \frac{\mu(x,y)}{\mu_1(x,y)} = \frac{(x^2+y^2)^n((x+p_n(x,y))^2 + (y+q_n(x,y))^2)}{(xq_n(x,y) - yp_n(x,y))^2} \tag{21}$$

будет первым интегралом системы (13), причём рациональным.

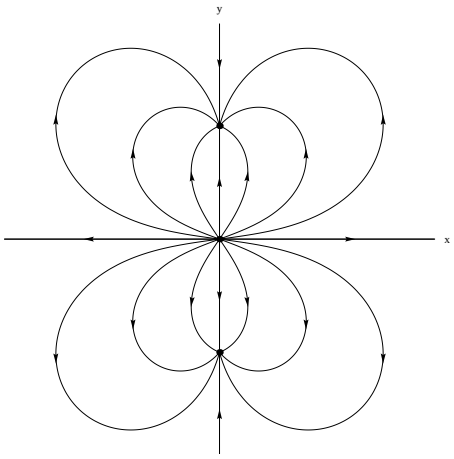

Рис. 1. Фазовый портрет системы $\dot{x} = x + x^3 - 3xy^2$, $\dot{y} = y + 3x^2y - y^3$

Замечание 3. *Наличие рационального интеграла у системы* (13) *было доказано в* [11] *с использованием теории интегрирования Дарбу. Здесь мы в дополнение приводим явную формулу для рационального интеграла.*

На рис. 1 приведён фазовый портрет системы

$$\dot{x} = x + x^3 - 3xy^2,\ \dot{y} = y + 3x^2y - y^3,$$

которая является овеществлением комплексного уравнения $\dot{z} = z + z^3$.

Рациональный интеграл (21) системы имеет вид

$$H(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2(1+x^2-2y+y^2)(1+x^2+2y+y^2)}{4x^2y^2}. \tag{22}$$

Для полиномиальных систем естественно рассматривать полиномиальные и рациональные первые интегралы.

Рациональный первый интеграл имеет вид $H = p/q$, где $p(x,y), q(x,y)$ — многочлены; при этом $H(x,y)$ сохраняет постоянное значение вдоль любой траектории в $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$, $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : q(x,y) = 0\}$.

Интерес к системам, имеющим полиномиальный или рациональный первый интеграл, обуславливается, в частности, тем обстоятельством, что все орбиты таких систем будут алгебраическими кривыми. Более детальную историю вопроса и ссылки на литературу можно найти в [12], [13].

Пусть $H = p/q$ — рациональный первый интеграл системы (1). Говорят, что этот интеграл имеет степень m, если число m является максимумом степеней многочленов p, q. Интеграл H называется интегралом минимальной степени, если любой другой интеграл имеет степень не меньше m.

Следуя [12]–[14], мы будем называть $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ замечательным значением интеграла H, если многочлен $p + cq$ является разложимым в $\mathbb{C}[x,y]$. Здесь, подразумевается, что если $c = \infty$, то $p + cq$ означает q. Отметим, что при всех $c \in \mathbb{C}$ $p + cq = 0$ является инвариантной алгебраической кривой. Кривые $u_i = 0$ в разложении $p + cq$ на множители u_i, если c — замечательное значение, называются замечательными кривыми.

В [12] доказано, что любой рациональный минимальный интеграл имеет лишь конечное число замечательных значений.

Пусть $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ является замечательным значением рационального интеграла $H = p/q$ и $u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_r}$ — факторизация $p + cq$ на неразложимые множители. Если $\alpha_i > 1$ для некоторого i, то c называется критическим замечательным значением, соответствующая кривая $u_i = 0$ назывется критической замечательной кривой с показателем α_i.

В работе [13] получен следующий результат

Теорема 3. *Пусть X — полиномиальное векторное поле. Предположим, что $H = p/q$ — минимальный рациональный первый интеграл поля X. Если X не имеет полиномиального первого интеграла, то X имеет полиномиальный обратный интегрирующий множитель в том и только в том случае, когда когда число критических замечательных значений интеграла H не превосходит двух.*

Система (13), очевидно, не имеет полиномиального интеграла (как и вообще любого интеграла, определённого на всём фазовом пространстве $\mathbb{R}^2$), поскольку начало координат является особой точкой этой системы типа дикритический узел. Выше показано, что у рассматриваемой системы (13) имеется обратный полиномиальный интегрирующий множитель Ли (20), с помощью которого генерируется рациональный первый интеграл (21). На основании теоремы 3 заключаем, что число критических замечательных значений этого интеграла не больше двух.

Для интеграла (22) $c = 0,\ c = \infty$ задают критические замечательные значения. Критическими замечательными кривыми служат точка покоя $O(0,0)$ и прямые $x = 0,\ y = 0$. То же самое имеет место и в общем случае для интеграла (21).

2. Симметрии и интегрирующие множители

Изложенные в этом разделе факты сравнительно мало известны специалистам, хотя и представляют определённый интерес. По словам Ю. А. Чиркунова, такие факты образуют часть математического фольклора, касающуюся группового анализа дифференциальных уравнений, и заслуживают упоминания и обсуждения.

1) Мы доказали наличие у однородной системы

$$\dot{x} = P_n(x,y),\ \dot{y} = Q_n(x,y)$$

h-автомодельного интегрирующего множителя, зависящего от $h = y/x$, при том, что $h = y/x$ является инвариантом группы растяжений

$$\dot{x} = x,\ \dot{y} = y,$$

которая есть группа Ли для однородного поля направлений

$$Q_n(x,y)dx - P_n(x,y)dy = 0,$$

соответствующего однородной системе.

Обратный интегрирующий множитель Ли имеет вид

$$V(x,y) = xQ_n(x,y) - yP_n(x,y).$$

Аналогичные факты имеются также для других типов уравнений. Приведём несколько примеров.

2) Полиномиальная система

$$\dot{x} = P(x,y),\ \dot{y} = Q(x,y)$$

называется квазиоднородной, если многочлены $P(x,y), Q(x,y)$ являются квазиоднородными, то есть $P(e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y) = e^{\gamma s}P(x,y),\ Q(e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y) = e^{\delta s}Q(x,y)$, и при этом $\delta - \gamma = \beta - \alpha$. Числа α, β называются весами переменных.

Соответствующее поле направлений

$$Q(x,y)dx - P(x,y)dy = 0$$

инвариантно относительно группы квазиоднородных растяжений с инфинитезимальной образующей

$$\dot{x} = \alpha x,\ \dot{y} = \beta y,$$

которая имеет инвариантом функцию $h = y^{\alpha}/x^{\beta}$.

Можно показать, что в этом случае функция $F(x,y)$ из (9) представима в виде $F(x,y) = f(y^{\alpha}/x^{\beta})$, то есть квазиоднородная система (уравнение) имеет h-автомодельный интегрирующий множитель.

Пример 3.

$$\dot{x} = x^3 + xy,\ \dot{y} = y^2. \tag{23}$$

Соответствующее дифференциальное уравнение

$$y^2dy - (x^3 + xy)dy = 0 \tag{24}$$

будет квазиоднородным с весами переменных $\alpha = \deg x = 1,\ \beta = \deg y = 2$.

Положим $\varphi = y/x^2$ и воспользуемся теоремой 1.

В рассматриваемом случае

$$F(x,y) = -\frac{3x^2(x^2+y)}{y(2x^2+y)} = -\frac{3(1+\varphi)}{\varphi(2+\varphi)}, \quad \int(-\frac{3(1+\varphi)}{\varphi(2+\varphi)}d\varphi = -\frac{3}{2}\ln\varphi(2+\varphi),$$

поэтому

$$\mu(x,y) = \frac{(y(2x^2+y))^{3/2}}{x^6}$$

будет интегрирующим множителем системы (23) и уравнения (24).

С другой стороны система (23) имеет интегрирующий множитель $\mu_1 = 1/x^3$ (см. пример 1). В таком случае отношение

$$H(x,y) = \frac{\mu}{\mu_1} \equiv \frac{(y(2x^2+y))^{3/2}}{x^3}$$

будет интегралом системы (23).

Инфинитезимальная система группы квазиоднородных растяжений для системы (23) имеет вид

$$\dot{x} = x,\ \dot{y} = 2y.$$

Поэтому имеем интегрирующий множитель Ли для системы (23)

$$\mu_2 = \frac{1}{xy(2x^2+y)}.$$

Отношение μ_2/μ_1 вновь даёт нам интеграл (рациональный) системы (23)

$$H_1(x,y) = \frac{x^2}{y(2x^2+y)}. \tag{25}$$

Отметим, что $H_1 = H^{-2/3}$.

Замечательными значениями рационального интеграла $H_1(x, y)$ являются $c = 0,\ c = \infty$, при этом значение $c = 0$ будет критическим. Замечательными кривыми являются точка покоя $O(0, 0)$, прямая $x = 0$, прямая $y = 0$ и парабола $2x^2 + y = 0$.

На рис. 2 приведён фазовый портрет системы (23), построенный с использованием найденного интеграла.

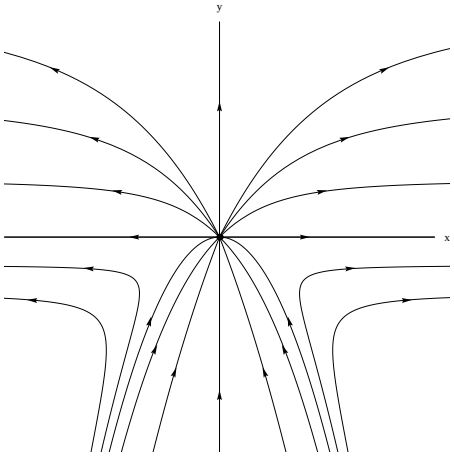

Рис. 2. Фазовый портрет системы $\dot{x} = x^3 + xy,\ \dot{y} = y^2$

Состояние равновесия $O(0, 0)$ является точкой покоя типа линейный нуль (матрица линейного приближения равна нулю). Обычно для исследования таких точек применяют специальную технику (раздутие, blow up), но в нашем случае строение окрестности точки покоя исчерпывающим образом описывается с помощью интеграла (25).

3) Если система инвариантна относительно группы параллельных переносов $x \to x + at,\ y \to y + bt$ с инфинитезимальной образующей

$$\dot{x} = a,\ \dot{y} = b,$$

поле направлений, отвечающее этой системе имеет вид $g(bx - ay)dx + dy = 0$, где $g(u)$ — произвольная функция. Инвариант группы симметрий $h = bx - ay$. Нетрудно показать, что в данном случае существует h-автомодельный интегрирующий множитель.

4) Если плоская система дифференциальных уравнений инвариантна относительно действия группы вращений $SO(2)$, то у неё существует h-автомодельный интегрирующий множитель, где функция $h = x^2 + y^2$ является инвариантом группы вращений $\dot{x} = -y,\ \dot{y} = x$.

5) Дифференциальное уравнение, инвариантное относительно группы гиперболических поворотов (группа Лоренца), представимо в виде

$$(1 + (x + y)^2 g(y^2 - x^2)dx + (1 - (x + y)^2 g(y^2 - x^2))dy = 0,$$

где $g(u)$ — произвольная функция. Генератор группы Лоренца $\mathcal{Y} = y\partial_x + x\partial_y$ с инвариантом $h = y^2 - x^2$. В данном случае мы вновь можем найти h-автомодельный множитель.

Напомним, что во всех случаях 1)–5) система имеет интегрирующий множитель Ли. Правда, в случаях 3)–5) он совпадает с декларированным автомодельным интегрирующим множителем.

Однако имеются примеры, когда у системы нет автомодельного интегрирующего множителя, зависящего от инварианта соответствующей группы Ли.

Пример 4.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = y - x^2,\ \dot{y} = -x - xy. \tag{26}$$

Система (26) рассматривалась в [15]. Она является следствием модифицированного уравнения Эмдена $\ddot{x} + 3x\dot{x} + x + x^3 = 0$.

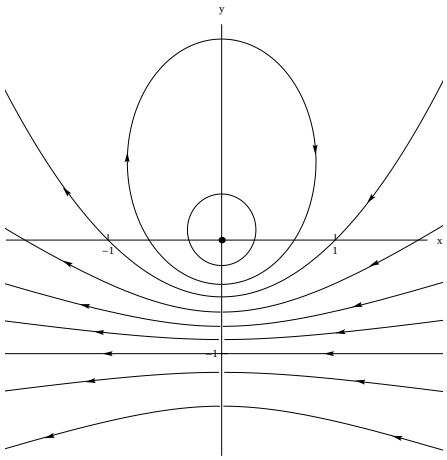

Рис. 3. Фазовый портрет системы $\dot{x} = y - x^2,\ \dot{y} = -x - xy$

В [15] для системы (26) с использованием методики Дарбу был найден обратный интегрирующий множитель Дарбу (он же интегрирующий множитель Ли)

$$V = (1 + y)(x^2 + y^2).$$

С помощью этого множителя был получен первый интеграл системы (26)

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + y)^2}, \tag{27}$$

а также построена коммутирующая с системой (26) система

$$\dot{x} = x + xy,\ \dot{y} = y + y^2. \tag{28}$$

Поскольку системы (26), (28) коммутируют, система (28) является инфинитезимальной образующей группы симметрий системы (26). Функция $h(x, y) = y/x$ является инвариантом системы (28), однако система (26) не имеет автомодельного интегрирующего множителя, функционально зависящего от отношения y/x: интересующая нас функция $F(x, y)$ в (9) имеет вид

$$F(x, y) = \frac{3x}{(y/x)^2 + y/x}$$

и, очевидно, не является функцией от $h = y/x$.

На рис. 3 приведён фазовый портрет системы (26).

Замечательными значениями рационального интеграла (27) являются $c = 0,\ c = \infty$, причём $c = \infty$ будет критическим замечательным значением. Замечательные кривые — точка покоя $O(0,0)$ и прямая $y = -1$.

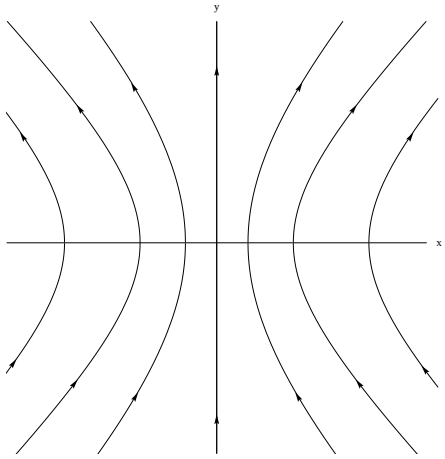

Рис. 4. Фазовый портрет системы $\dot{x} = 2xy,\ \dot{y} = 1 + x^2 + y^2$

Если для полиномиальной системы

$$\dot{x} = P(x,y),\ \dot{y} = Q(x,y)$$

нам известна группа Ли с полиномиальной образующей

$$\dot{x} = \xi(x,y),\ \dot{y} = \eta(x,y),$$

то мы построим полиномиальный обратный интегрирующий множитель Ли $V = P\eta - Q\xi$.

Обратное, вообще говоря, неверно. Так для системы

$$\dot{x} = 2xy,\ \dot{y} = 1 + x^2 + y^2 \tag{29}$$

функция $V(x,y) = x^2$ является обратным интегрирующим множителем. Если бы существовала соответствующая группа Ли с полиномиальным генератором

$$\dot{x} = \xi(x,y),\ \dot{y} = \eta(x,y),$$

то имело бы место равенство

$$V(x,y) = x^2 = 2xy\eta(x,y) - (1 + x^2 + y^2)\xi(x,y)$$

для некоторых многочленов $\xi(x,y), \eta(x,y)$, что невозможно. В самом деле, полагая $y = 0$, получим, что многочлен $\xi(x,0)$ должен удовлетворять условию $(1 + x^2)\xi(x,0) = -x^2$, которое, очевидно, не может выполняться.

Отметим, что система (29) имеет также обратным интегрирующим множителем функцию $V_1(x,y) = (1 - x^2 + y^2)^2 = \mu(y^2 - x^2)$, однако группа Лоренца

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = x$$

с инвариантом $h = y^2 - x^2$ не является группой симметрий для системы (29).

Наличие двух интегрирующих множителей позволяет нам получить рациональный интерал системы (29)

$$H(x,y) = \frac{1 - x^2 + y^2}{x}. \tag{30}$$

Фазовый портрет системы (29) приведён на рис. 4.

С помощью несложных вычислений можно показать, что интеграл (30) не имеет замечательных значений, то есть замечательные кривые на фазовом портрете отсутствуют.

References

[1] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1972. Zbl 0234.55001

[2] L. R. Berrone, *On vanishing set of inverse integrating factor*, Qual. Theory Dyn. Syst., **1**:2 (2000), 211–230. Zbl 1032.34027

[3] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébrique du premier ordre et du premier degré (Mélanges)*, Bull. Sci. Math. (1878), 60–96, 123–144, 151–200.

[4] A. Bendjeddou, J. Llibre, T. Salhi, *Dynamics of the polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities and a star node*, J. Diff. Equ., **254**:8 (2013), 3530–3537. Zbl 1269.34034

[5] V. Mazzi, M. Sabatini, *Commutators and linearizations of isochronous centers*, Atti Acad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei Mat. Appl., **11**:2 (2000), 81–98. Zbl 0973.34020

[6] E. P. Volokitin, *About uniformly isochronous polynomial systems (Russian)*, Izvestia RAEN (MMMIU), **5**:3 (2001), 22–28.

[7] I. A. García, J. Giné, *Generalized cofactors and nonlinear superposition principles*, Applied Mathematical Letters, **16**:7 (2003), 1137–1141. Zbl 1057.34002

[8] V. V. Ivanov, *An integrating multiplier of a pair of independent Pfaffian forms (Russian)*, Sobolev Readings, Abstracts, Novosibirsk, 2017.

[9] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo: Springer-Verlag, 1986. Zbl 0588.22001

[10] M. Villarini, *Regularity properties of the period function near a centre of planar vector fields*, Nonlenear Analysis, **19**:8 (1992), 787–802. Zbl 0769.34033

[11] E. P. Volokitin, *Algebraic first integrals of polynomial systems satisfying the Caushy-Riemann conditions*, Qual. Theory Dyn. Sys., **15**:2 (2016), 575–596. Zbl 1364.34037

[12] J. Chavarriga, H. Giacomini, J. Giné, J. Llibre, *Darboux integrability and the inverse integrating factor*, J. Diff. Equ., **194**:1 (2003), 116–139. Zbl 1043.34001

[13] A. Ferragut, J. Llibre, *On the remarkable values of the rational first integrals of polynomial vector fields*, J. Diff. Equ., **241**:2 (2007), 399–417. Zbl 1132.34030

[14] H. Poincaré, *Sur l´ integration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. **11** (1891), 193–239; **5** (1897), 161–191.

[15] A. G. Choudhury, P. Guha, *On commuting vector fields and Darboux functions for planar differential equations*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **34**:3 (2013), 212–226. Zbl 1288.34031

Volokitin Evgenii Pavlovich
Sobolev Institute of Mathematics
4, Acad. Koptyug ave.,
Novosibirck, 630090, Russia
Novosibirsk State University,
2, Pirogova str.,
Novosibirck, 630090, Russia
E-mail address: volok@math.nsc.ru

Cheresiz Vladimir Mikhaĭlovich
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug ave.,
Novosibirck, 630090, Russia
E-mail address: vladimir.cheresiz@gmail.com