

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1295–1311 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.090

УДК 517.51, 517.54

MSC 30C65, 46E35

ОТОБРАЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ
ФУНКЦИЯМИ ДЛЯ P-ЕМКОСТИ

А.С. РОМАНОВ

ABSTRACT. On the Euclidean plane, we consider the class of mappings, whose coordinate functions are extremal functions for p -capacity special type condensers.

Keywords: Sobolev spaces, capacity, extremal functions.

Нас будут интересовать свойства нелинейной ёмкости, связанной с пространствами Соболева, и следствия этих свойств. Поскольку в определении пространств Соболева используется интеграл Лебега, то элементом пространства, вообще говоря, является класс эквивалентных функций, отличающихся между собой на множестве нулевой меры Лебега. Поэтому, говоря о каком-либо свойстве соболевской функции, мы будем иметь в виду, что в классе эквивалентности содержится функция, обладающая этим свойством. В современных разделах теории пространств Соболева важную роль играет понятие ёмкости. Как функция множеств, изначально связанная с конкретным соболевским пространством, ёмкость оказывается более тонкой характеристикой по сравнению с мерой и позволяет получить более точные результаты, касающиеся соболевских функций.

В терминах искажения соответствующей ёмкости удается получить альтернативные определения классов квазиконформных и квазиизометрических отображений. Нас же будет интересовать несколько иная взаимосвязь пространств Соболева и теории отображений. При изучении ёмкостных соотношений в плоском четырехстороннике естественным образом возникает класс

ROMANOV, A.S., MAPPINGS RELATED TO EXTREMAL FUNCTIONS FOR P-CAPACITY.

© 2019 Романов А.С.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проект №0314-2016-0007, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-01-00801.

Поступила 27 июня 2019 г., опубликована 27 сентября 2019 г.

плоских отображений, у которых координатные функции являются экстремалами для ёмкости конденсаторов специального вида. С одной стороны, отображения этого класса имеют весьма специфические характеристики, с другой стороны, они обладают свойствами, вполне аналогичными свойствам конформных отображений.

В работе [1] был введен класс p -экстремальных отображений и сформулированы основные характеристические свойства таких отображений. К сожалению, краткость изложения привела к некоторым пробелам в доказательствах правильных по сути утверждений. В данной работе планируем привести полные доказательства всех основных утверждений и обсудить некоторые новые свойства экстремальных отображений.

§1. Ёмкость. Экстремальные функции

Нас будут интересовать различные характеристики подмножеств действительной плоскости R^2 . Для обозначения точек плоскости R^2 мы иногда будем использовать сокращенное обозначение одним символом z, w, a, b, \dots , полагая $z = (x, y)$, и т.д.

Рассмотрим область $G \subset R^2$. С пространством Соболева $L_p^1(G)$ связана функция множеств, называемая $(1, p)$ -ёмкостью. Для произвольного компакта $K \subset G$ класс допустимых функций определим условием

$$D(K) = \{u \in C_0^\infty(G) \mid u|_K = 1\},$$

а при $1 \leq p < \infty$ соответствующую $(1, p)$ -ёмкость определим равенством

$$C_p(K, G) = \inf_{u \in D(K)} \iint_G |\nabla u|^p dx dy.$$

Основы теории ёмкости можно найти в работах [2, 3, 4]. Начиная с компактных множеств, $(1, p)$ -ёмкость стандартным образом распространяется на более широкий класс множеств, содержащий σ -алгебру борелевских множеств.

Для нас в первую очередь будут важны свойства множеств нулевой $(1, p)$ -ёмкости. Из метрических оценок ёмкости следует, что множество нулевой $(1, p)$ -ёмкости имеет нулевую линейную меру Хаусдорфа при всех $1 < p < \infty$, следовательно $(1, p)$ -ёмкость произвольного континуума положительна, при этом $(1, p)$ -ёмкость точки положительна при $p > 2$. Термин квазिवсюду означает: всюду, за исключением быть может множества нулевой $(1, p)$ -ёмкости. Функцию u называют квазинепрерывной, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое множество V , что на дополнении к множеству V функция u непрерывна. Всякая квазинепрерывная функция однозначно определена квазिवсюду. Для всякой функции $u \in L_p^1(G)$ существует эквивалентная ей квазинепрерывная функция \tilde{u} [2, 4].

Нам понадобится еще одна разновидность ёмкости, которую иногда называют вариационной p -ёмкостью.

Рассмотрим ограниченную область $G \subset R^2$ и два непересекающихся компакта $K_0, K_1 \subset \bar{G}$. Класс допустимых функций для конденсатора $K = (K_0, K_1)$ определим условием

$$D(K_0, K_1, G) = \{u \in ACL(G) \cap C(G \cup K_0 \cup K_1) \mid u|_{K_0} = 0, u|_{K_1} = 1\},$$

а при $1 \leq p < \infty$ соответствующую p -ёмкость определим равенством

$$\text{cap}_p(K_0, K_1, G) = \inf_{u \in D(K_0, K_1, G)} \iint_G |\nabla u|^p dx dy.$$

Интеграл в определении ёмкости обычно называют p -интегралом Дирихле. Существуют и другие классы допустимых функций, на которых нижняя грань значений p -интеграла Дирихле равна $\text{cap}_p(K_0, K_1, G)$. К примеру, можно рассматривать непрерывные функции из пространства Соболева $L_p^1(G)$, которые равны нулю в некоторой окрестности K_0 и равны единице в некоторой окрестности K_1 , а можно рассматривать квазинепрерывные функции $u \in L_p^1(G)$, которые равны нулю квазिवсюду на K_0 равны единице квазिवсюду на K_1 [2].

Известно [2, 3], что при $1 < p < \infty$, в силу выпуклости множества допустимых функций и равномерной выпуклости пространства Лебега L_p , существует единственная экстремальная функция $u_0 \in \overline{D(K_0, K_1, G)} \cap L_p^1(G)$ такая, что

$$\text{cap}_p(K_0, K_1, G) = \iint_G |\nabla u_0|^p dx dy.$$

Далее без дополнительных напоминаний мы будем предполагать, что $1 < p < \infty$. В случаях, когда это не будет вызывать разночтений, мы иногда будем опускать в формулах символ области и писать, к примеру, $\text{cap}_p(K_0, K_1)$ вместо $\text{cap}_p(K_0, K_1, G)$.

Экстремальная для пары компактов K_0 и K_1 функция u является решением p -уравнения Лапласа $\text{div}(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) = 0$, понимаемого в слабом смысле, т.е.

$$\iint_G |\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u \cdot \nabla \varphi dx dy = 0$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

Согласно работе [5] при $1 < p < \infty$ экстремальная функция u является гладкой в области G ,

$$u \in C_{loc}^{k, \alpha}(G) \cap W_{q, loc}^{k+2}(G),$$

где целое $k \geq 1$, показатель $\alpha \in (0, 1]$ и

$$k + \alpha \geq \frac{1}{6} \left(7 + \frac{1}{p-1} + \sqrt{1 + \frac{14}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}} \right), \quad 1 \leq q < \frac{2}{2-\alpha}.$$

Заметим, что при всех $1 < p < \infty$ экстремальная функция u принадлежит классу $C_{loc}^{1, \alpha}(G)$, где $\alpha > 1/3$, а при $1 < p < 2$ функция $u \in C_{loc}^{2, \beta}(G)$, где $\beta > 0$.

Согласно следствию 1 работы [6] множество критических точек экстремальной функции

$$Z = \{(x, y) \in G \mid \nabla u(x, y) = 0\}$$

является дискретным, т.е. его точки являются изолированными в области G , при этом

$$u \in C^\infty(G \setminus Z).$$

Символом U_t будем обозначать множество уровня экстремальной функции u , т.е.

$$U_t = \{(x, y) \in G \mid u(x, y) = t\}.$$

При почти всех $t \in (0, 1)$ множества уровня U_t не пересекают множество критических точек и являются объединением локально спрямляемых гладких кривых [7].

Для доказательства важного свойства экстремальной функции нам потребуются два результата:

1. Если функция $u \in ACL(G)$, а неотрицательная функция $f \in L_1(G)$, то

$$\iint_G f(x, y) |\nabla u(x, y)| dx dy = \int_0^\infty \left(\int_{U_t} f(x, y) dl \right) dt. \quad (1)$$

2. Пусть Λ - множество неубывающих функций $\lambda \in C^\infty(R^1)$, удовлетворяющих условиям: $\lambda(t) = 0$ при $t \leq 0$, $\lambda(t) = 1$ при $t \geq 1$, $\text{supp } \lambda' \subset (0, 1)$. Тогда для всякой неотрицательной суммируемой на $[0, 1]$ функции h при $p \in (1, \infty)$ выполняется равенство

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \int_0^1 (\lambda')^p h dt = \left(\int_0^1 h^{\frac{1}{1-p}} dt \right)^{1-p}. \quad (2)$$

Первое утверждение содержится в работе [8] и в несколько иной форме в книге [3], второе в пункте 2.2.2 [3].

Лемма 1.1. Рассмотрим ограниченную область $G \subset R^2$ и два непересекающихся компакта $K_0, K_1 \subset \bar{G}$. Если функция u является экстремальной для пары (K_0, K_1) , то при почти всех $t \in (0, 1)$

$$\int_{U_t} |\nabla u|^{p-1} dl \equiv \text{const} = C_p, \quad (3)$$

где $C_p = \text{cap}_p(K_0, K_1, G)$.

Доказательство. Обозначим

$$h(t) = \int_{U_t} |\nabla u|^{p-1} dl.$$

Согласно равенству (1)

$$\iint_G |\nabla u|^p dx dy = \int_0^1 h(t) dt = C_p. \quad (4)$$

Следовательно, функция $h(t)$ однозначно определена, почти всюду конечна и в силу дискретности множества критических точек отлична от нуля.

Пусть $\lambda \in \Lambda$, тогда функция $\lambda(u)$ является допустимой для пары (K_0, K_1) , при этом $|\nabla \lambda(u)| = \lambda'(u) |\nabla u|$.

Поскольку функция u является экстремальной, то учитывая равенство (2), получаем

$$\int_0^1 h(t) dt = \iint_G |\nabla u|^p dx dy \leq \inf_{\lambda \in \Lambda} \iint_G |\nabla \lambda(u)|^p dx dy =$$

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \iint_G (\lambda'(u)|\nabla u|)^p dx dy = \inf_{\lambda \in \Lambda} \int_0^1 (\lambda')^p(t) h(t) dt = \left(\int_0^1 \frac{dt}{h^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{1-p}. \quad (5)$$

Используя неравенство Гельдера и учитывая неравенство (5), получаем

$$1 = \int_0^1 dt = \int_0^1 \frac{h^{\frac{1}{p}}}{h(t)^{\frac{1}{p}}} dt \leq \left(\int_0^1 h(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \frac{dt}{h^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq 1.$$

В данном случае неравенство Гельдера превращается в равенство. Равенство

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |g|^{p'} d\mu \right)^{1/p'}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $|f|^p = C|g|^{p'}$. Поэтому $h(t) = L \cdot [h(t)]^{1-p}$ почти всюду, т.е. $h(t) = const = L^{1/p}$. И согласно равенству (4) получаем $h(t) = C_p$ при почти всех $t \in (0, 1)$. ■

Обозначим символом T множество значений t , при которых выполняется равенство (3), для семейства линий уровня и соответствующего множества будем использовать обозначения

$$G_T = \{U_t \mid t \in T\}, \quad E_T = \{z \in G \mid z \in U_t, t \in T\}.$$

Легко показать, что множество E_T всюду плотно в области G . Если предположить противное, то существует такая неотрицательная функция $f \in C_0^\infty$, что f не является постоянной и $supp f \cap E_T = \emptyset$, но это противоречит равенству (1), т.к. с учетом дискретности множества критических точек экстремальной функции получим

$$0 < \iint_G f(x, y)|\nabla u(x, y)| dx dy = \int_0^1 \left(\int_{U_t} f(x, y) dl \right) dt = \int_T \left(\int_{U_t} f(x, y) dl \right) dt = 0.$$

Замечание. В n -мерном случае аналог равенства (3) для конформной ёмкости ($p = n$) содержится в работе [8], а при $p \neq n$ может быть получен в качестве следствия основного результата работы [9].

В основном нас будут интересовать конденсаторы специального вида и связанные с ними экстремальные функции.

Рассмотрим на плоскости R^2 ограниченную односвязную область G с жордановой границей Γ и четыре различные последовательные граничные точки $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \Gamma$. Для определенности будем считать, что нумерация точек согласована с положительной ориентацией границы.

Область G с отмеченными четырьмя граничными точками будем называть четырехсторонником и обозначать G_* , а замкнутые граничные дуги $F_0 = \Gamma_{a_4a_1}$, $F_1 = \Gamma_{a_2a_3}$, $E_0 = \Gamma_{a_1a_2}$, $E_1 = \Gamma_{a_3a_4}$ будем называть его "сторонами".

Имея дело с четырехсторонником, нам иногда будет удобнее вместо выражений « p -ёмкость конденсатора $K = (F_0, F_1, G)$ и экстремальная функция для конденсатора $K = (F_0, F_1, G)$ » использовать выражения « p -ёмкость пары "сторон" (F_0, F_1) , экстремальная функция для F_0 и F_1 ».

Если $0 < \text{cap}_p(F_0, F_1, G) < \infty$, то будем называть четырехсторонник G_* невырожденным. Из оценок p -ёмкости следует, что равенство нулю или бесконечности возможно в случае вырождения одной из "сторон" в точку.

Так как экстремальная функция u непрерывна, то она принимает все промежуточные значения на всякой непрерывной кривой $\gamma \subset G$, соединяющей "стороны" F_0 и F_1 , т.е. кривая γ пересекает все множества уровней U_t , $t \in (0, 1)$. При $t \in (0, 1)$ всякое множество уровня U_t разделяет "стороны" F_0 и F_1 . Множество уровня U_t не может содержать более одной компоненты, разделяющей "стороны" F_0 и F_1 , т.к. экстремальная функция во всех точках между этими компонентами принимала бы постоянное значение, а градиент ее был бы равен нулю, но это противоречит дискретности множества критических точек.

Рассмотрим открытые множества

$$G_t^+ = \{(x, y) \in G \mid u(x, y) > t\} \quad \text{и} \quad G_t^- = \{(x, y) \in G \mid u(x, y) < t\}.$$

В любой окрестности точки $a \in U_t$ содержатся точки и множества G_t^+ и множества G_t^- . Предположим противное, тогда существует такая окрестность точки a , которая пересекается только с одним из множеств, к примеру, с G_t^+ . В этом случае точка a является точкой экстремума и $\nabla u(a) = 0$, т.е. точка $a \in Z$. Поскольку множество критических точек является дискретным, то существует проколотый замкнутый шар $\overline{B_0} = \overline{B(a, r)} \setminus \{a\}$, который не содержит других точек экстремума и $u(z) > t$ при все $z \in \overline{B_0}$. Однако это противоречит свойству монотонности экстремальной функции [2], согласно которому, с учетом непрерывности функции u , получаем

$$t = \inf_{z \in B(a, r)} u(z) = \inf_{z \in \partial B(a, r)} u(z) > t.$$

Множество уровня U_t является связным и одновременно принадлежит границам множеств G_t^+ и G_t^- .

В четырехстороннике множества уровней U_t при почти всех $t \in (0, 1)$ не пересекают множество критических точек и являются локально спрямляемыми гладкими кривыми, разделяющими "стороны" F_0 и F_1 [7].

Пусть в невырожденном четырехстороннике G_* функция u является экстремальной для пары "сторон" F_0 и F_1 .

Рассмотрим в области $G \setminus Z$ векторное поле $\mathbf{V} = |\nabla u|^{p-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$. Поле \mathbf{V} является ортогональным градиенту функции u и касательным к линиям уровня. Поскольку $|\mathbf{V}| = |\nabla u|^{p-1}$, то $|\mathbf{V}(z)| = 0$ при $z \in Z$. Доопределяя по непрерывности в критических точках функции u , мы можем считать поле \mathbf{V} непрерывным в области G . Следовательно, циркуляция векторного поля \mathbf{V} вдоль любого замкнутого спрямляемого контура определена и конечна.

Если C_r - окружность радиуса r с центром в критической точке $z \in Z$, а τ - единичный касательный вектор к окружности, то

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{C_r} (\mathbf{V}, \tau) dl \right| \leq \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} |\mathbf{V}| dl = 0. \quad (6)$$

Покажем, что у поля \mathbf{V} существует потенциал или иными словами у дифференциальной формы

$$\omega = |\nabla u|^{p-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)$$

существует первообразная, понимаемая в смысле работы [10].

Напомним необходимые нам результаты работы [10]. Непрерывное векторное поле \mathcal{F} называется безвихревым, если его циркуляция

$$\Gamma(C) = \int_C (\mathcal{F}, \tau) dl = \int_C \mathcal{F}_1 dx + \mathcal{F}_2 dy$$

вдоль любого простого замкнутого липшицева контура $C \subset G$ равна нулю. Как отмечено в [10], нет необходимости проверять данное свойство для всех липшицевых контуров, достаточно проверить равенство нулю циркуляции вдоль контуров, составленных из параллельных координатным осям отрезков.

Однозначно определенная функция f называется потенциалом векторного поля \mathcal{F} или первообразной дифференциальной формы $\mathcal{F}_1 dx + \mathcal{F}_2 dy$ в области G , если

$$f(a) - f(b) = \int_C (\mathcal{F}, \tau) dl = \int_C \mathcal{F}_1 dx + \mathcal{F}_2 dy$$

для любых точек $a, b \in G$ и для почти всех липшицевых кривых, соединяющих точку a с точкой b . В односвязной области G для существования потенциала (первообразной) необходимо и достаточно, чтобы векторное поле было безвихревым. Согласно работе [10] функция f будет абсолютно непрерывной на почти всех прямых, параллельных координатным осям, и почти всюду в области G будут существовать частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathcal{F}_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathcal{F}_2.$$

Если поле $\mathcal{F} \in L_p(G)$, то функция $f \in L_p^1(G)$.

Лемма 1.2. Циркуляция векторного поля \mathbf{V} вдоль любой простой замкнутой ломаной $C \subset G$, образованной параллельными координатным осям отрезками, равна нулю.

Доказательство. Пусть D - область, ограниченная контуром C . В множестве \bar{D} может содержаться не более конечного числа критических точек: z_1, z_2, \dots, z_n в области D и w_1, w_2, \dots, w_m на контуре C . Выберем значение $r > 0$ достаточно малым, чтобы замкнутые круги радиуса r с центрами в перечисленных критических точках попарно не пересекались и окружности радиуса r с центрами в граничных критических точках w_k имели две точки пересечения с ломаной C .

В области

$$D_r = D \setminus \left(\sum_{i=1}^n \overline{B(z_i, r)} \cup \sum_{k=1}^m \overline{B(w_k, r)} \right)$$

векторное поле \mathbf{V} принадлежит пространству $C^\infty(D_r)$.

Поскольку экстремальная функция u является слабым решением p -уравнения Лапласа, то для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(D_r)$

$$\iint_{D_r} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) \varphi \, dx \, dy = \iint_{D_r} |\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dy = 0.$$

Из этого равенства, с учетом гладкости экстремальной функции в области D_r , получаем $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) \equiv 0$ в D_r .

Воспользуемся формулой Грина

$$\int_{\partial D_r} (\mathbf{V}, \tau) \, dl = \iint_{D_r} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) \, dx \, dy = 0.$$

Используя (6), получаем

$$\int_C (\mathbf{V}, \tau) \, dl = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial D_r} (\mathbf{V}, \tau) \, dl = 0.$$

Это и завершает доказательство леммы. ■

Согласно работе [10] векторное поле \mathbf{V} будет безвихревым и у него существует потенциальная функция h , определяемая с точностью до постоянного слагаемого.

Отметим свойства функции h .

1. В силу непрерывности поля \mathbf{V} и определения первообразной функция h является непрерывной, ее частные производные будут существовать всюду и являться непрерывными функциями, $\nabla h = \mathbf{V}$ в области G .

2. Из определения векторного поля \mathbf{V} следует, что

$$\iint_G |\mathbf{V}|^{p'} \, dx \, dy = \iint_G |\nabla u|^p \, dx \, dy < \infty,$$

здесь p' - сопряженный показатель суммируемости, т.е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Следовательно, функция h принадлежит пространству Соболева $L_{p'}^1(G)$.

§2. Экстремальные отображения

Нам понадобятся некоторые сведения из теории p -модулей семейств кривых [10]. Пусть Γ – семейство кривых $\gamma \subset G$. Класс допустимых борелевских метрик определим условием

$$N(\Gamma) = \{ \rho \in L_p(D) \mid \int_{\gamma} \rho \, dl \geq 1 \text{ для всех } \gamma \in \Gamma \},$$

а p -модуль семейства Γ определим равенством

$$\operatorname{mod}_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in N(\Gamma)} \iint_G \rho^p \, dx \, dy.$$

При $1 < p < \infty$ существует единственная экстремальная метрика, для которой $\|\rho\|_{L_p(G)}^p = \operatorname{mod}_p(\Gamma)$.

Вполне очевидно свойство монотонности: если семейство кривых $\Gamma_1 \subset \Gamma$, то $\text{mod}_p(\Gamma_1) \leq \text{mod}_p(\Gamma)$.

В случае, когда Γ является семейством спрямляемых кривых, соединяющих "стороны" F_0 и F_1 четырехсторонника G_* , будем использовать обозначение $\text{mod}_p(F_0, F_1)$. При этом [11]

$$\text{cap}_p(F_0, F_1) = \text{mod}_p(F_0, F_1).$$

Если u - экстремальная функция для $\text{cap}_p(F_0, F_1)$, а ρ_0 - экстремальная метрика для $\text{mod}_p(F_0, F_1)$, то $\rho_0 = |\nabla u|$. Далее вместо $\text{cap}_p(F_0, F_1, G)$ мы будем иногда кратко писать C_p .

Экстремальную функцию для p' -ёмкости "сторон" E_0 и E_1 обозначим символом v_0 , а экстремальную метрику для семейства кривых, соединяющих "стороны" E_0 и E_1 (разделяющих "стороны" F_0 и F_1), обозначим символом ρ и заметим, что $\rho = |\nabla v_0|$.

Согласно работе [9]

$$\text{cap}_{p'}(E_0, E_1) = \text{mod}_{p'}(E_0, E_1) = [\text{cap}_p(F_0, F_1)]^{1-p'} = C_p^{1-p'}. \tag{7}$$

Рассмотрим семейство кривых Γ_T , состоящее из линий уровня экстремальной функции u , для которых выполняется равенство (3). Пусть $\tilde{\rho}$ - произвольная допустимая метрика для семейства Γ_T , т.е.

$$\int_{U_t} \tilde{\rho} dl \geq 1,$$

для всех $t \in T$.

Используя неравенство Гельдера и формулу интегрирования по множествам уровня (1), получаем

$$1 \leq \int_0^1 \left(\int_{U_t} \tilde{\rho} dl \right) dt = \iint_G \tilde{\rho} \cdot |\nabla u| dx dy \leq \left(\iint_G \tilde{\rho}^{p'} dx dy \right)^{1/p'} \cdot \left(\iint_G |\nabla u|^p dx dy \right) = \left(\iint_G \tilde{\rho}^{p'} dx dy \right)^{1/p'} \cdot C_p^{1/p}.$$

Следовательно

$$\text{mod}_{p'}(\Gamma_T) \geq C_p^{1-p'}.$$

Рассмотрим еще одну метрику

$$\rho_0 = \frac{|\nabla u|^{p-1}}{C_p}.$$

Согласно равенству (3) метрика ρ_0 является допустимой для семейства линий уровня Γ_T и

$$\iint_G \rho_0^{p'} dx dy = C_p^{1-p'}.$$

Это означает, что метрика ρ_0 является экстремальной. При этом

$$C_p^{1-p'} = \text{mod}_{p'}(\Gamma_T) \leq \text{mod}_{p'}(E_0, E_1) = C_p^{1-p'}.$$

В силу единственности экстремальной метрики, метрики $\rho = |\nabla v_0|$ и ρ_0 совпадают почти всюду, а в силу непрерывности обеих метрик они совпадают всюду в области G .

Фиксируем на линиях уровня U_t направление от "стороны" E_0 к "стороне" E_1 . Поскольку линии уровня не пересекаются, то на множестве E_T можно однозначно определить векторное поле τ , образованное единичными касательными векторами к линиям уровня U_t , $t \in T$.

Поскольку функция v_0 является экстремальной, то

$$1 = \int_{U_t} (\nabla v_0, \tau) dl \leq \int_{U_t} |\nabla v_0| dl = \int_{U_t} \rho_0 dl = \int_{U_t} (C_p^{-1} \mathbf{V}, \tau) dl = 1,$$

здесь $\mathbf{V} = |\nabla u|^{p-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$. Таким образом $(\nabla v_0, \tau) = |\nabla v_0|$, а функции $(\nabla v_0, \tau)$ и $(C_p^{-p} \mathbf{V}, \tau)$ являются экстремальными метриками для семейства Γ_T . Следовательно $(\nabla v_0 - C_p^{-1} \mathbf{V}, \tau) = 0$, т.е. $\nabla v_0 = C_p^{-1} \mathbf{V} + \vec{\omega}$, $(\vec{\omega}, \tau) = (\vec{\omega}, \mathbf{V}) = 0$, $|\nabla v_0|^2 = |C_p^{-p} \mathbf{V}|^2 + |\vec{\omega}|^2$. Предположение, что $\vec{\omega} \neq 0$, противоречит экстремальности метрики $\rho = |\nabla v_0|$ для семейства Γ_T . Поэтому $\nabla v_0 = C_p^{-1} |\nabla u|^{p-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$.

Определим функцию v равенством $v = C_p v_0$, $\nabla v = \mathbf{V}$. В результате возникает отображение $\Phi = (u, v)$ области G в плоскость R^2 .

§3. Свойства экстремальных отображений

Со всяким невырожденным четырехсторонником G_* связано отображение $\Phi : G \rightarrow R^2$. Будем называть p -экстремальным отображение

$$\Phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

первая координатная функция которого является экстремалью для пары "сторон" F_0 и F_1 , а вторая координатная функция пропорциональна экстремали для пары "сторон" E_0 и E_1 .

Далее мы рассмотрим некоторые свойства таких отображений.

1. По построению образом области G при отображении Φ является прямоугольник

$$P_* = \{(u, v) \in R^2 \mid 0 < u < 1, 0 < v < C_p = \text{cap}_p(F_0, F_1)\}.$$

2. Градиенты координатных функций ортогональны: $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ и $\nabla v = |\nabla u|^{p-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$, $\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{|\nabla v|} \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{|\nabla v|} \frac{\partial v}{\partial x}$, $|\nabla v| = |\nabla u|^{p-1}$, $|\nabla v|^p = |\nabla u|^p$.

Интегральные линии градиента одной координатной функции являются линиями уровня другой.

3. Координатные функции p -экстремального отображения

$$\Phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = |\nabla v|^{p'-2} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -|\nabla v|^{p'-2} \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \tag{8}$$

которая при $p = 2$ превращается в систему Коши-Римана.

4. Координатные функции p -экстремального отображения

$$\Phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

являются обобщенными решениями сопряженных нелинейных уравнений Лапласа, т.е.

$$\iint_G |\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dy = 0$$

и

$$\iint_G |\nabla v|^{p'-2} \cdot \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx \, dy = 0.$$

5. Матрица Якоби p -экстремального отображения $\Phi : G \rightarrow P$ имеет вид

$$\begin{aligned} J(\Phi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial y} & |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} |\nabla u| & 0 \\ 0 & |\nabla u|^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} |\nabla v|^{p'-1} & 0 \\ 0 & |\nabla v| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9}$$

Якобиан отображения p -экстремального отображения Φ имеет простой вид

$$|J(\Phi)| = \det J(\Phi) = |\nabla u|^p = |\nabla v|^{p'}.$$

6. В достаточно малой окрестности произвольной точки $a \in G \setminus Z$ отображение Φ является диффеоморфизмом, а линии уровня координатной функции u являются дугами гладких кривых, ортогональных линиям уровня функции v . Вне множества критических точек матрица Якоби обратного отображения локально определена и имеет вид

$$J(\Phi^{-1}) = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nabla u|^{-1} & 0 \\ 0 & |\nabla u|^{1-p} \end{pmatrix}.$$

7. Покажем, что отображение Φ является взаимно однозначным в области G . Предположим противное, что существуют две такие различные точки $a, b \in G$,

что $\Phi(a) = \Phi(b) = (t, s) \in P$. Это означает, что точки a и b лежат на пересечении линий уровня U_t и V_s и могут быть соединены кривыми $\gamma_t \subset U_t$ и $\gamma_s \subset V_s$. Кривые γ_t и γ_s не могут совпадать, т.к. в этом случае на некоторой общей дуге градиенты функций u и v должны быть одновременно и параллельными и ортогональными, т.е. равными нулю, но это противоречит дискретности множества критических точек. Если γ_t и γ_s не совпадают, то функция u принимает на γ_s значения отличные от t . Поэтому существует такое значение $t^* \in T$, что линия уровня $U_{t^*} \in \Gamma_T$ пересекает кривую γ_s в точках a^* и b^* , $a^* \neq b^*$. Пусть γ^* - дуга линии уровня U_{t^*} , соединяющая точки a^* и b^* . Тогда

$$\int_{\gamma^*} |\nabla u|^{p-1} dl = \int_{\gamma^*} (\nabla v, \tau) dl = |v(a^*) - v(b^*)| = 0.$$

Это возможно лишь при обращении в нуль градиента функции u почти всюду на дуге γ^* , но это противоречит дискретности множества критических точек.

Таким образом, из условия $a \neq b$ следует, что $\Phi(a) \neq \Phi(b)$. Поскольку каждая линия уровня функции u (разделяющая "стороны" F_0 и F_1) пересекается с каждой линией уровня функции v (соединяющей "стороны" F_0 и F_1), то отображение $\Phi : G \rightarrow P$ является гомеоморфизмом.

Лемма 3.1. Пусть G_* - невырожденный четырехсторонник со "сторонами" F_0, F_1, E_0, E_1 , функция u является допустимой для пары "сторон" (F_0, F_1) , а функция v является допустимой для пары "сторон" (E_0, E_1) . Если

$$\|u \mid L_p^1(G)\| \cdot \|v \mid L_{p'}^1(G)\| = 1, \quad (10)$$

то функция u является экстремалью для p -ёмкости пары "сторон" F_0, F_1 , а функция v является экстремалью для p' -ёмкости пары "сторон" E_0, E_1 .

Доказательство. Согласно условию

$$\|u \mid L_p^1(G)\|^p \geq \text{cap}_p(F_0, F_1) \quad \text{и} \quad \|v \mid L_{p'}^1(G)\|^{p'} \geq \text{cap}_{p'}(E_0, E_1).$$

Равенство (7) может быть записано в виде

$$[\text{cap}_p(F_0, F_1)]^{1/p} \cdot [\text{cap}_{p'}(E_0, E_1)]^{1/p'} = 1. \quad (11)$$

Из равенств (10) и (11) получаем

$$1 = \|u \mid L_p^1(G)\| \cdot \|v \mid L_{p'}^1(G)\| \geq [\text{cap}_p(F_0, F_1)]^{1/p} \cdot [\text{cap}_{p'}(E_0, E_1)]^{1/p'} = 1,$$

поэтому

$$\|u \mid L_p^1(G)\|^p = \text{cap}_p(F_0, F_1) \quad \text{и} \quad \|v \mid L_{p'}^1(G)\|^{p'} = \text{cap}_{p'}(E_0, E_1).$$

Искомый результат является следствием единственности экстремальной функции. ■

Рассмотрим невырожденный четырехсторонник G_* и связанное с ним p -экстремальное отображение Φ . Пусть $0 \leq t_0 < t_1 \leq 1, 0 \leq s_0 < s_1 \leq C_p$. Рассмотрим еще четырехсторонник G_{ts} , ограниченный линиями уровня U_{t_0}, U_{t_1} функции u и линиями уровня V_{s_0}, V_{s_1} функции v . Дугу линии уровня U_{t_0} , соединяющую линии уровня V_{s_0} и V_{s_1} обозначим γ_{ts} . Заметим, что

$$\int_{\gamma_{ts}} |\nabla u|^{p-1} dl = \int_{\gamma_{ts}} (\nabla v, \tau) dl = s_1 - s_0,$$

$$\int \int_{G_{ts}} |\nabla v|^{p'} dx dy = \int \int_{G_{ts}} |\nabla u|^p dx dy = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\gamma_{ts}} |\nabla u|^{p-1} dl = (t_1 - t_0) \cdot (s_1 - s_0).$$

Сужения функций

$$\tilde{u} = \frac{u - t_0}{t_1 - t_0}, \quad \tilde{v} = \frac{v - s_0}{s_1 - s_0}$$

на четырехсторонник G_{ts} являются допустимыми для соответствующих пар "противоположных сторон" $(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1)$ и $(\tilde{E}_0, \tilde{E}_1)$. При этом

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} | L_p^1(G_{ts})\| \cdot \|\tilde{v} | L_{p'}^1(G_{ts})\| &= \frac{\|u | L_p^1(G_{ts})\|}{(t_1 - t_0)} \cdot \frac{\|v | L_{p'}^1(G_{ts})\|}{(s_1 - s_0)} = \\ &= \frac{(s_1 - s_0)^{1/p}}{(t_1 - t_0)^{1/p'}} \cdot \frac{(t_1 - t_0)^{1/p'}}{(s_1 - s_0)^{1/p}} = 1. \end{aligned}$$

Согласно лемме 3.1 функции \tilde{u} и \tilde{v} являются экстремальными для четырехсторонника G_{ts} .

При отображении Φ четырехстороннику G_{ts} соответствует прямоугольник $P_{ts} \subset P$, а парам "противоположных сторон" $(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1)$ и $(\tilde{E}_0, \tilde{E}_1)$ четырехсторонника G_{ts} пары параллельных сторон (F_0^*, F_1^*) и (E_0^*, E_1^*) прямоугольника P_{ts} . При этом

$$\begin{aligned} \text{cap}_p(F_0^*, F_1^*, P_{ts}) &= \text{cap}_p(\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, G_{ts}) = \frac{s_1 - s_0}{(t_1 - t_0)^{p-1}}, \\ \text{cap}_{p'}(E_0^*, E_1^*, P_{ts}) &= \text{cap}_{p'}(\tilde{E}_0, \tilde{E}_1, G_{ts}) = \frac{t_1 - t_0}{(s_1 - s_0)^{p'-1}}. \end{aligned}$$

§4. Экстремальные отображения односвязных областей

Рассмотрим совокупность всевозможных четырехсторонников порождаемых областью G и обозначим класс всех соответствующих p -экстремальных гомеоморфизмов $\Phi : G_* \rightarrow P$ через $H_p(G)$. Учитывая граничные значения координатных функций, вполне очевидно, что отображения класса $H_p(G)$, соответствующие разным четырехсторонникам, являются различными. При этом классы отображений $H_p(G)$ и $H_q(G)$, соответствующие разным показателям суммируемости p и q , тоже оказываются существенно различными и могут пересекаться лишь по некоторому подмножеству линейных отображений.

Предположим, что $\Phi = (u, v) \in H_p(G) \cap H_q(G)$, $p < q$. Это означает, что функция u является экстремальной одновременно и для p -ёмкости и для q -ёмкости "сторон" F_0 и F_1 , при этом

$$\nabla v = |\nabla u|^{p-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = |\nabla u|^{q-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Поскольку множество критических точек экстремальной функции u является дискретным, то $|\nabla u| = 1$ почти всюду в области G , а в силу непрерывности градиента всюду в G . Поэтому система уравнений (8) превращается в систему уравнений Коши-Римана, а функция $f = u + iv$ является аналитической в области G . Модуль производной аналитической функции f является постоянным $|f'| = 1$, следовательно, и сама производная является постоянной. Поэтому f является линейной функцией комплексного переменного, а функции u и v являются линейными функциями двух действительных переменных. Учитывая

граничные значения экстремальных функций и взаимную ортогональность линий уровня функций u и v , легко заметить, что это возможно лишь в случае, когда область G является прямоугольником \mathcal{P} , а "стороны" F_0 и F_1 являются противоположными сторонами \mathcal{P} , при этом длина "сторон" E_0 и E_1 равна единице.

Отметим, что с прямоугольником \mathcal{P} связан целый класс четырехсторонников \mathcal{P}_* , у которых "вершины" не совпадают с вершинами прямоугольника \mathcal{P} . В общем случае отображение $\Phi \in H_p(\mathcal{P})$, соответствующее четырехстороннику \mathcal{P}_* , не обязано быть линейным и не будет принадлежать классу $H_q(\mathcal{P})$ при $q \neq p$.

Как уже отмечалось образом области G при любом отображении $\Phi \in H_p(G)$ будет некоторый прямоугольник. Для получения более широкого класса отображений воспользуемся естественной конструкцией, довольно часто применяемой в доказательствах различных утверждений теории функций.

Пусть $G_1, G_2 \subset R^2$ – ограниченные односвязные области с жордановыми границами. Будем говорить, что гомеоморфизм $L : G_1 \rightarrow G_2$ является p -экстремальным, если $L = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$, где $\Phi_1 \in H_p(G_1)$, $\Phi_2 \in H_p(G_2)$. Класс соответствующих p -экстремальных гомеоморфизмов обозначим через $H_p(G_1, G_2)$. Для p -экстремальных гомеоморфизмов удастся довольно просто получить аналог теоремы Римана о конформной эквивалентности односвязных областей.

Теорема 4.1. При всех $1 < p < \infty$ для любых ограниченных односвязных областей $G_1, G_2 \subset R^2$ с жордановыми границами существует гомеоморфизм $L : G_1 \rightarrow G_2$ класса $H_p(G_1, G_2)$.

Доказательство. Границы областей G_1 и G_2 обозначим соответственно Γ_1 и Γ_2 . Фиксируем три последовательные различные точки $a_1, a_2, a_3 \in \Gamma_1$ и три последовательные различные точки $b_1, b_2, b_3 \in \Gamma_2$. На дуге, соединяющей точки a_3 и a_1 , отметим некоторую точку $\alpha \in \Gamma_1$ и аналогично на дуге, соединяющей точки b_3 и b_1 , отметим некоторую точку $\beta \in \Gamma_2$.

Для замкнутых дуг кривой Γ_1 , лежащих между соответственными точками, будем использовать обозначения:

$$F_{10} = \Gamma_{\alpha a_1}, E_{10} = \Gamma_{a_1 a_2}, F_{11} = \Gamma_{a_2 a_3}, E_{11} = \Gamma_{a_3 \alpha}.$$

Аналогично для замкнутых дуг кривой Γ_2 будем использовать обозначения: $F_{20} = \Gamma_{\beta b_1}, E_{20} = \Gamma_{b_1 b_2}, F_{21} = \Gamma_{b_2 b_3}, E_{21} = \Gamma_{b_3 \beta}$.

Если $1 < p \leq 2$, то p -ёмкость точки равна нулю. Поэтому $\text{cap}_p(F_{10}, F_{11}) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow a_1$. Если $2 < p < \infty$, то $1 < p' < 2$ и $\text{cap}_{p'}(E_{10}, E_{11}) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow a_3$, и как следствие равенства (11), $\text{cap}_p(F_{10}, F_{11}) \rightarrow \infty$. Аналогичные оценки выполняются для дуг кривой Γ_2 . Поэтому при любом значении $p \in (1, \infty)$ мы можем выбрать точки α и β так, что

$$\text{cap}_p(F_{10}, F_{11}) = \text{cap}_p(F_{20}, F_{21}) = C_p.$$

Из ранее доказанного следует существование фиксированного прямоугольника P и p -экстремальных гомеоморфизмов $\Phi_i : G_i \rightarrow P$. Отображение $L = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ принадлежит классу $H_p(G_1, G_2)$ и является искомым. ■

При $p = 2$ отображения Φ_i и L будут конформными, и мы получаем альтернативное доказательство теоремы Римана.

§5. Отображения двусвязных областей

Рассмотрим ограниченную двусвязную область $G \subset R^2$, граница которой состоит из двух простых замкнутых жордановых кривых Γ_0 и Γ_1 . Для определенности будем считать, что контур Γ_1 лежит внутри контура Γ_0 , т.е. в односвязной области G_0 , ограниченной контуром Γ_0 .

Можно считать, что пара граничных компонент (Γ_0, Γ_1) образуют конденсатор в односвязной области G_0 , это позволяет естественным образом определить p -ёмкость двусвязной области G , т.е. значение $\text{cap}_p(G) = \text{cap}_p(\Gamma_0, \Gamma_1)$. При этом можно считать, что экстремальная функция u определена только в \bar{G} , поскольку $u = 1$ в области $G_1 = G_0 \setminus \bar{G}$ и $\|u \mid L_p^1(G_0)\| = \|u \mid L_p^1(G)\|$. Основные свойства экстремальных функций будут такими же как и в случае односвязных областей.

Известно, что две двусвязные области являются конформно эквивалентными тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый конформный модуль. Конформный модуль однозначно выражается через конформную 2-ёмкость, поэтому две двусвязные области D и D' конформно эквивалентны, если $\text{cap}_2(D) = \text{cap}_2(D')$. Вполне аналогичная ситуация и с p -экстремальными отображениями.

Рассмотрим две ограниченные двусвязные области G и \tilde{G} с соответствующими жордановыми граничными компонентами Γ_0, Γ_1 и $\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1$.

В области G вдоль не проходящей через критические точки интегральной линии градиента экстремальной функции u проведем разрез γ , соединяющий контуры Γ_0 и Γ_1 . Область $G^* = G \setminus \gamma$ является односвязной. Ориентация границы задается стандартным образом - как это принято в комплексном анализе. Во внутренней метрике разрез γ имеет две различные стороны, которые мы обозначим E_0 и E_1 . Полагая $F_0 = \Gamma_0$ и $F_1 = \Gamma_1$, мы получим четырехсторонник G^* .

Функция \tilde{u} , являющаяся сужением экстремальной функции u на область G^* , будет допустимой функцией для пары (F_0, F_1) , поэтому

$$\text{cap}_p(F_0, F_1, G^*) \leq \text{cap}_p(G) = C_p.$$

Противоположное неравенство не столь очевидно, поскольку допустимая для пары (F_0, F_1) функция $w(z)$, вообще говоря, может иметь различные предельные значения в точках $\xi \in \gamma$ при $z \rightarrow \xi$ с разных сторон разреза.

Оценим p' -ёмкость "сторон" E_0 и E_1 . Обозначим через \tilde{U}_t линию уровня функции \tilde{u} . Согласно лемме 1.1 при почти всех $t \in (0, 1)$

$$\int_{\tilde{U}_t} |\nabla u|^{p-1} dl = \int_{U_t} |\nabla u|^{p-1} dl \equiv \text{const} = C_p. \tag{12}$$

Обозначим через Σ семейство кривых в G^* соединяющих "стороны" E_0 и E_1 , а следовательно, и разделяющих "стороны" F_0 и F_1 . Рассмотрим лишцевую кривую $\sigma \in \Sigma$, соединяющую в G^* точку $a \in E_0$ с точкой $b \in E_1$. Пусть U_t - линия уровня экстремальной функции u , удовлетворяющая равенству (12) и пересекающая разрез γ в точке d . Будем считать точку d двойной: $d_0 \in E_0$ и $d_1 \in E_1$. Соединяя дугами разреза γ точку d_0 с точкой a и точку b с точкой d_1 , мы получим ориентированный замкнутый контур S , при этом возможно, что

контур содержит дуги, проходимые дважды в противоположных направлениях.

Ранее было показано, что векторное поле $\mathbf{V} = |\nabla u|^{p-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ является безвихревым. Учитывая, что поле \mathbf{V} ортогонально разрезу γ , получаем

$$C_p = \int_{\tilde{U}_t} |\nabla u|^{p-1} dl = \int_{\tilde{U}_t} (\mathbf{V}, \tau) dl = \int_{\sigma} (\mathbf{V}, \tau) dl \leq \int_{\sigma} |\nabla u|^{p-1} dl.$$

Это означает, что метрика $\rho = \frac{|\nabla u|^{p-1}}{C_p}$ является допустимой для семейства кривых, разделяющих "стороны" F_0 и F_1 . При этом

$$\text{mod}_{p'}(\Sigma) \leq \iint_G \rho^{p'} dx dy = C_p^{1-p'}.$$

Учитывая равенство (7), получаем

$$\text{cap}_p(F_0, F_1, G^*) = \text{mod}_{p'}(\Sigma)^{1/1-p'} \geq C_p.$$

Таким образом $\text{cap}_p(F_0, F_1, G^*) = C_p$. Согласно свойству 1 §3 существует p -экстремальное отображение Φ области G^* на прямоугольник P_0 со сторонами длины 1 и C_p .

Рассмотрим концентрическое кольцо, определяемое в полярных координатах (ρ, φ) условием $K_{r,R} = \{r < \rho < R\}$. Значение p -ёмкости и явный вид экстремальной функции для кольца $K_{r,R}$ известны [2, 3]. Для любого $\lambda \in (0, \infty)$ существуют такие значения r и R , что $\text{cap}_p(K_{r,R}) = \lambda$.

Фиксируем такое кольцо, что $\text{cap}_p(K_{r,R}) = \text{cap}_p(G) = C_p$. Проведя в кольце разрез I вдоль луча $\varphi = 0$, мы получим четырехсторонник $K_{r,R}^*$ со "сторонами" F_0^*, F_1^* , являющимися граничными окружностями, и E_0^*, E_1^* , являющимися различными "сторонами" разреза I .

Поскольку $\text{cap}_p(F_0^*, F_1^*, K_{r,R}^*) = C_p$, то существует p -экстремальный гомеоморфизм $\Psi : K_{r,R}^* \rightarrow P_0$. Следовательно, гомеоморфизм $L = \Psi^{-1} \circ \Phi$ отображает область G^* на кольцо с разрезом $K_{r,R}^*$ и принадлежит классу $H_p(G^*, K_{r,R}^*)$.

Линия уровня U_t функции u отличается от линии уровня \tilde{U}_t экстремальной функции \tilde{u} одной точкой $\xi_t \in \gamma$. При отображении L линии уровня \tilde{U}_t соответствует окружность C_ρ ($\rho = \rho(t)$) с выколотой точкой η_t . Полагая $L(\xi_t) = \eta_t$, мы получим гомеоморфизм $\tilde{L} : G \rightarrow K_{r,R}$. Будем говорить, что такой гомеоморфизм \tilde{L} принадлежит классу $H_p(G, K_{r,R})$.

Теорема 5.1. При всех $1 < p < \infty$ для любых ограниченных двусвязных областей $G_1, G_2 \subset R^2$ с жордановыми границами, имеющих одинаковую p -ёмкость, существует гомеоморфизм $W : G_1 \rightarrow G_2$ класса $H_p(G_1, G_2)$.

Доказательство. Поскольку области G_1 и G_2 имеют одинаковую p -ёмкость, то существуют отображения $\tilde{L}_i : G_i \rightarrow K_{r,R}$ класса $H_p(G_i, K_{r,R})$. Отображения $L_i : G_i^* \rightarrow K_{r,R}^*$ имеют вид $L_i = \Psi_i^{-1} \circ \Phi_i$, где $\Psi_2 = \Psi_1$. Искомое отображение представимо в виде $W = \tilde{L}_2^{-1} \circ \tilde{L}_1$, при этом $W|_{G_1^*} = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$. ■

Замечание. Начальным моментом при определении различных обобщений класса конформных отображений обычно является модификация условий

Коши-Римана, которая порой имеет довольно искусственный характер. В рассматриваемой в работе ситуации изначально целью было не нахождение аналога конформных отображений, а изучение свойств нелинейной ёмкости в областях $G \subset R^2$. Класс p -экстремальных отображений и система уравнений (8) появляются естественным образом как следствие ёмкостных соотношений в плоском четырехстороннике. Поэтому и анизотропия свойств координатных функций при $p \neq 2$ является объективным следствием такого подхода. При изучении отображений рассматриваемого класса часто используется свойство экстремальности координатных функций и следствия, вытекающие из этого свойства.

Отметим, что попытка определения аналога p -экстремальных отображений в евклидовых пространствах R^n при $n > 2$, как и в случае конформных отображений, приводит к узкому классу простейших преобразований пространства R^n [12].

Остается еще множество различных вопросов, касающихся p -экстремальных отображений и требующих отдельного изучения.

REFERENCES

- [1] A.S. Romanov, *Capacity relations in a flat quadrilateral*, Siberian Math. J., **49**:4 (2008), 709–717. Zbl 1164.30368
- [2] V.M. Gold'shtein, Yu.G. Reshetnyak, *Quasiconformal mappings and Sobolev spaces*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1990. MR1136035
- [3] V.G. Maz'ya, *Prostranstva S.L. Soboleva*, Leningrad: Izd.-vo Leningr. un-ta, 1985. MR0807364
- [4] L.C. Evans, R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Boca Raton: CRC Press, 1992. Zbl 0804.28001
- [5] T. Iwaniec, J.J. Manfredi, *Regularity p -harmonic functions on the plane*, Rev. Mat. Iberoamericana, **5**:1–2 (1989), 1–19. Zbl 0805.31003
- [6] J.J. Manfredi, *p -harmonic functions in the plane*, Proceedings of the AMS, **103**:2 (1988), 473–479. Zbl 0658.35041
- [7] B. Bojarski, P. Hajlasz, P. Strzelecki, *Sard's theorem for mappings in Holder and Sobolev spaces*, Manuscripta math., **118**:3 (2005), 383–397. Zbl 1098.46024
- [8] W.P. Ziemer, *Extremal length and conformal capacity*, Trans. Amer. Math. Soc., **126**:3 (1967), 460–473. Zbl 0177.34002
- [9] V.A. Shlyk, *The capacity of a condenser and the modulus of a family of separating surfaces*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **185** (1990), 168–182 (in Russian). Zbl 0734.31008
- [10] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta math., **98**:3–4 (1957), 171–219.
- [11] W.P. Ziemer, *Extremal length and p -capacity*, Michigan Math. J., **16**:1 (1969), 43–51. Zbl 0172.38701
- [12] A.S. Romanov, *A remark on the properties of nonlinear capacity in R^3* , Siberian Math. J., **53**:4 (2012), 732–738. Zbl 1287.31004

ROMANOV ALEXANDR SERGEEVICH,
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, КОПТУГА АВЕ.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 2, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: asrom@math.nsc.ru