S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1312–1333 (2019) УДК 514.754.24
DOI 10.33048/semi.2019.16.091 MSC 53A15 53A15

ОБ АФФИННОМ ИЗМЕРЕНИИ ДУГ КРИВОЙ МОМЕНТОВ

И.В. ПОЛИКАНОВА

Abstract. The arc length, defined in affine space as an invariant of a unimodular transformation group, in the case of moment curve coincides with the result of the measurement process by successively putting off the unit of measure.

Keywords: moment curve, enica, parabola, affine center of arc on enica, affine-equal arcs, affine length of arc.

1. Введение

Кривая моментов (краткости ради будем называть её *эникой*) – линия в n-мерном аффинном пространстве A^n, задаваемая в некоторой аффинной системе координат (сокращённо АСК) параметризацией

$$\vec{r} = (t, t^2, t^3, ..., t^k, 0, 0, ..., 0),\ t \in R,\ k = 1, ..., n. \tag{1}$$

Здесь верхние индексы означают степени. Наивысшая степень k называется степенью эники. При $k = 1, 2, 3$ это прямая, парабола и кубика.

Интерес к этим кривым вызван тем обстоятельством, что они обладают свойством аффинной эквивалентности любых двух дуг [1]. Этот факт, в частности, указывает на невозможность измерения дуги эники путём последовательного откладывания дуг, аффинно-эквивалентных её фиксированной дуге.

В настоящей работе мы покажем, как определить аффинно-равные дуги, посредством которых указанный процесс даёт однозначный результат при выбранной единице измерения на энике.

Заметим, что инварианты аффинной геометрии в A^2, такие как длина дуги и кривизна, положены в основу изучения траекторий рук человека [2]: сегментации движений (определение примитивных блоков движений, из которых состоят сложные движения) и их классификации. При этом особая роль в качестве моторных примитивов принадлежит параболам, представляющим собой эквиаффинные геодезические.

Polikanova, I.V., On the affine measurement of arcs of a moment curve.

Поступила 31 марта 2019 г., опубликована 27 сентября 2019 г.

2. О канонических и полуканонических АСК эники.

Несколько слов об обозначениях и терминологии. Ниже A^n – n-мерное аффинное пространство над векторным действительным пространством n измерений V^n, R – поле действительных чисел.

Упорядоченный набор $n+1$ точек $\{M_i\}_{i=0}^n$ общего положения (не лежащих в одной гиперплоскости) пространства A^n называется *аффинным репером.* Задание аффинного репера равносильно заданию АСК с началом координат M_0 и базисными векторами $\vec{e}_i = \overrightarrow{M_0M_i}$, $i = 1, ..., n$. Назовём её соответствующей данному реперу. АСК с началом O и базисом $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ будем обозначать $\{O; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$. k-мерную плоскость, проходящую через начало координат O в направлении векторного подпространства, натянутого на некоторое подмножество $\vec{e}_{i_1}, ..., \vec{e}_{i_k}$ базисных векторов, будем называть координатной плоскостью (при $k = 1$ – осью) и обозначть $O_{x_{i_1}...x_{i_k}}$. В некоторых случаях нам будет удобно рассматривать её безотносительно существующей в ней "усечённой"АСК $\{O; \vec{e}_{i_1}, ..., \vec{e}_{i_k}\}$ – как обычную плоскость. Такое словоупотребление должно быть понятным из контекста.

В этом пункте мы определим 2 вида АСК, связанных с эникой: полуканоническую и каноническую. В первой – формулы эники принимают наиболее простой вид, во второй – эника параметризована длиной дуги в эквиаффинной геометрии. Докажем существование обоих видов АСК с началом координат в каждой точке линии. Будем рассматривать невырожденные эники, не оговаривая это особо. Невырожденность линии означает, что она не содержится ни в какой гиперплоскости. В [3] показано, что эника (1) невырождена в A^n тогда и только тогда, когда $k = n$, обозначение: γ_n.

АСК, в которых эника задаётся параметризацией

$$\vec{r} = \left(t, t^2, t^3, ..., t^n\right), \quad t \in R, \tag{2}$$

называется *полуканонической.*

АСК, в которой эника задаётся параметризацией

$$\vec{r} = \left(\frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}, ..., \frac{t^n}{n!}\right), \quad t \in R, \tag{3}$$

называется *канонической.*

Замечание 1. Нетрудно видеть, что, если АСК $J_n = \{O; \vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ – полуканоническая, то АСК $I_n = \{O; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, такая, что $\vec{e}_i = i!\vec{a}_i$, $i = 1, ..., n$, – каноническая:

$$t\vec{a}_1 + t^2\vec{a}_2 + ... + t^n\vec{a}_n = t\vec{e}_1 + \frac{t^2}{2!}\vec{e}_2 + ... + \frac{t^n}{n!}\vec{e}_n.$$

Координаты x_i произвольной точки в J_n и координаты y_i той же точки в I_n связаны формулами $y_i = \frac{1}{i!}x_i$, $i = 1, ..., n$. Обе эти АСК назовём *соответствующими* друг другу. Заметим, что в соответствующих АСК все одноимённые координатные оси и координатные плоскости совпадают, кроме того, параметр, задающий энику, имеет один и тот же геометрический смысл – это 1-ая координата точки. Если утверждение справедливо как для канонической, так и для полуканонической АСК, то будем использовать словосочетание "(полу)каноническая АСК".

Проектированием на k-мерную плоскость σ в направлении $(n-k)$-мерной плоскости δ, не параллельной σ, называется отображение $A^n \to \sigma$, сопоставляющее каждой точке $M \in A^n$ точку пересечения плоскости σ с плоскостью, проходящей через точку M параллельно δ.

Замечание 2. Проекция эники γ_n на плоскость $O_{x_1...x_i}$ (полу)канонической АСК вдоль плоскости $O_{x_{i+1}...x_n}$ при $i = 2, \ldots, n-1$ представляет собой энику γ_i степени i, для которой усечённая АСК $I_i = \{O; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_i\}$ является (полу)канонической.

Теорема 1. *Для любой точки эники существует каноническая АСК с началом в этой точке. Именно, таковой является АСК*

$$I_n(t) = \left\{ M(t); \vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), ..., \vec{r}^{\,(n-1)}(t), \vec{r}^{\,(n)}(t) \right\}, \tag{4}$$

где $\vec{r}(t)$ – параметризация эники в некоторой канонической АСК, $M(t)$ – точка, соответствующая параметру t в этой параметризации.

Доказательство. Применим индукцию по размерности n пространства. Заметим, что явное задание эники (3) в канонической АСК имеет вид

$$x_i = \frac{x_1^i}{i!}, \quad i = 2, ..., n. \tag{5}$$

Проверим базис индукции при $n = 2$. Пусть в некоторой канонической АСК парабола задаётся параметризацией $\vec{r} = (t, \frac{t^2}{2})$ или явным уравнением $x_2 = \frac{x_1^2}{2}$. Тогда $\vec{r}\,'(t) = (1; t)$, $\vec{r}\,''(t) = (0; 1)$, и формулы преобразования кординат точки при переходе от данной АСК к $I_2(t)$ имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 &= \bar{x}_1 + t \\ x_2 &= t\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \frac{t^2}{2} \end{cases}.$$

Поэтому в новой АСК парабола задаётся уравнением:

$$t\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \frac{t^2}{2} = \frac{(\bar{x}_1 + t)^2}{2}.$$

Преобразуя его, получаем опять каноническое уравнение: $\bar{x}_2 = \frac{\bar{x}_1^2}{2}$. Таким образом, при $n = 2$ утверждение истинно.

Предположим, что утверждение верно для размерности $n - 1$. Пусть эника γ_n задаётся в некоторой канонической АСК формулами (3) или (5). Учитывая, что

$$r^{(i)} = \left(0; ...; 0; 1; t; \frac{t^2}{2!}; ...; \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\right), \quad i = 1, ..., n \text{ (1 стоит на i-ом месте)}$$

запишем формулы преобразования координат точки при переходе к АСК $I_n(t)$.

$$\begin{cases} x_1 &= \bar{x}_1 + t \\ x_2 &= t\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \frac{t^2}{2!} \\ x_3 &= \frac{t^2}{2}\bar{x}_1 + t\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \frac{t^3}{3!} \\ ..... & ... \quad .... \\ x_{n-1} &= \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\bar{x}_1 + \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}\bar{x}_2 + ... + \bar{x}_{n-1} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ x_n &= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\bar{x}_1 + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\bar{x}_2 + ... + t\bar{x}_{n-1} + \bar{x}_n + \frac{t^n}{n!} \end{cases}. \tag{6}$$

Здесь $(x_1; x_2; ...; x_n)$ – координаты точки в старой (канонической) АСК, $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; ...; \bar{x}_n)$ – координаты той же точки в АСК $I_n(t)$. Заметим, что первые $n-1$ формул имеют тот же вид, что и формулы преобразования координат при переходе от усечённой АСК $I_{n-1} = \{O; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1}\}$ к АСК $I_{n-1}(t) = \left\{ M^*(t); \vec{\rho}\,'(t), \vec{\rho}\,''(t), ..., \vec{\rho}^{\,(n-1)}(t) \right\}$ для эники $\gamma_{n-1} : \vec{\rho} = \left(\frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}, ..., \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)$, $t \in R$, являющейся проекцией эники γ_n на координатную гиперплоскость $O_{x_1 \dots x_{n-1}}$ в направлении вектора e_n (здесь $M^*(t)$ – проекция точки $M(t)$ на $O_{x_1 \dots x_{n-1}}$). Это означает согласно индукционному предположению, что после подстановки в (5) формул (6) можно равносильными преобразованиями первых $n-1$ равенств системы привести её к виду:

$$\bar{x}_i = \frac{\bar{x}_1^i}{i!}, \quad i = 2, ..., n-1. \tag{7}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\bar{x}_1 + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\bar{x}_2 + ... + t\bar{x}_{n-1} + \bar{x}_n + \frac{t^n}{n!} = \frac{(\bar{x}_1 + t)^n}{n!}. \tag{8}$$

Подставляя в левую часть равенства (8) вместо $\bar{x}_1$, ... $\bar{x}_{n-1}$ их выражения из формул (7), получим

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\bar{x}_1}{1!} + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\frac{\bar{x}_1^2}{2!} + ... + \frac{t}{1!}\frac{\bar{x}_1^{n-1}}{(n-1)!} + \bar{x}_n + \frac{t^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\frac{\bar{x}_1^i}{i!} + \bar{x}_n. \tag{9}$$

Разлагая правую часть равенства (8) по биному Ньютона, получим:

$$\frac{(\bar{x}_1 + t)^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i}{n!}t^{n-i}\bar{x}_1^i = \sum_{i=0}^{n}\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\frac{\bar{x}_1^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\frac{\bar{x}_1^i}{i!} + \frac{\bar{x}_1^n}{n!}. \tag{10}$$

Сравнивая крайние правые части равенств (9) и (10), приходим к равенству $\bar{x}_n = \frac{\bar{x}_1^n}{n!}$, которое вместе с формулами (7) представляет каноническое задание эники. Значит АСК $I_n(t)$ – каноническая. $\square$

Следствие 1. *Для всех точек $M(t)$, $t \in R$, эники (3) координатные плоскости $M(t)_{x_i \cdots x_n}$, определяемые последними базисными векторами канонических АСК, начиная с i-ого, при $i > 1$ параллельны.*

Доказательство. По теореме 1 $(n-i+1)$-мерная координатная плоскость $M(t)_{x_i \cdots x_n}$ канонической АСК эники определяется набором линейно независимых векторов

$$\vec{r}^{\,j}(t) = \left(0, ..., 0, 1, t, \frac{t^2}{2!}, ..., \frac{t^{n-j}}{(n-j)!}\right), \; j = i, ..., n, (1 \text{ стоит на } j\text{-ом месте}).$$

Их координаты при любом t удовлетворяют системе уравнений

$$x_k = 0, \; k = 1, ..., i-1,$$

задающих $(n-i+1)$-мерное векторное подпространство. Значит все координатные плоскости $M(t)_{x_i \dots x_n}$, имея одно и то же направляющее векторное подпространство, параллельны между собой. $\square$

Теорема 2. *Существует бесконечное множество канонических АСК с началом в произвольной точке эники. Если $I = \{O; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ и $I' = \{O; \vec{e}^{\,\prime}_1, ..., \vec{e}^{\,\prime}_n\}$ – канонические АСК, то существует действительное число a такое, что $\vec{e}^{\,\prime}_i = a^i\vec{e}_i$, $i = 1, ...n$, причём, параметры t и t' соответственно первой и второй параметризаций связаны соотношением $t = at'$. [4]*

Замечание 3. В следующем пункте мы докажем это утверждение другим способом, нежели в [4], несколько усилив его. Здесь же отметим как следствие, что для всех (полу)канонических АСК эники с началом в некоторой точке O все одноимённые координатные плоскости и оси совпадают. В [4] выясняется геометрический смысл канонической АСК: ось O_{x_1} является касательной к энике в точке O, ось O_{x_n} является прямой асимптотического направления для эники γ_n, ось O_{x_i} является прямой асимптотического направления для проекции эники γ_n, на i-ую соприкасающуюся плоскость в точке O вдоль координатной плоскости $O_{x_{i+1} \dots x_n}$ при $i = 2, \dots, n-1$. Про асимптотическое направление эники смотреть в [5]. Из [6, pr. 6.1] следует что, определённый выше канонический базис совпадает с экви-аффинным базисом, предложенным D. Davis для изучения аффинных кривых.

3. О действиях групп аффинных преобразований

О действии групп на множествах и связанных с ними понятиях смотреть, например, в ([7], п. 1.1.1-1.5.4). Аффинное преобразование пространства A^n будем для краткости называть просто аффинным преобразованием.

Теорема 3. *Группа GA^n аффинных преобразований пространства A^n действует на множестве Γ всех невырожденных эник транзитивно.*

Доказательство. Аффинное преобразование f, определённое формулами

$$\bar{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + b_i, \quad i = 1, ..., n, \tag{11}$$

с ненулевым детерминантом $det(a_{ij})$, отображает знику γ, заданную полуканонической параметризацией (2), в линию $f(\gamma): \ x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t^j + b_i, i = 1, ..., n$. Однако в новой АСК с началом координат $O'(b_1, ..., b_n)$ и базисными векторами $\vec{e}\,'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j$, $i = 1, ..., n$, линия $f(\gamma)$ задаётся параметризацией (2) и, значит, является эникой. Поэтому определено действие группы GA^n на Γ.

Покажем, что оно транзитивно, т.е. для любых двух невырожденных эник существует аффинное преобразование, отображающее одну из них в другую. Действительно, для любых двух эник существуют реперы R и $\widetilde{R}$ такие, что эника γ в репере R и эника $\widetilde{\gamma}$ в репере $\widetilde{R}$ задаются одинаково формулой (2). По теореме о существовании и единственности аффинного преобразования, отображающего репер в репер ([8], с. 312), существует аффинное преобразование f, отображающее репер R в репер $\widetilde{R}$ и сопоставляющее каждой точке пространства с координатами $(x_1, x_2, ..., x_n)$ в репере R точку с теми же координатами в репере $\widetilde{R}$. При этом преобразовании эника γ отобразится в энику $\widetilde{\gamma}$. □

Множество Γ представляет собой однородное пространство относительно действия группы GA^n.

Группой изотропии или *стабилизатором эники* γ называется подгруппа в GA^n

$$G(\gamma) = \{f \in GA^n |\ f(\gamma) = \gamma\}\,.$$

Теорема 4. *Группа изотропии $G(\gamma)$ эники γ представляет собой двухпараметрическое семейство преобразований.*

Доказательство. Пусть эника задана параметризацией (2), аффинное преобразование f из $G(\gamma)$ – формулами (11) с ненулевым детерминантом $det(a_{ij})$. Тогда $f(\gamma)$ задаётся параметризацией:

$$\vec{r} = \Big(a_{1i}t^i + b_1,\ a_{2i}t^i + b_2, ...,\ a_{ni}t^i + b_n\Big)\,.$$

Здесь, как принято, предполагается суммирование одночленов по индексам, встречающимся дважды на разных уровнях: $i = 1, ..., n$, причём, верхние индексы всюду означают степени. Так как $f(\gamma) = \gamma$, то можно перейти к новому параметру p для линии $f(\gamma)$, полагая:

$$a_{ji}t^i + b_j = p^j, \quad j = 1, ..., n.$$

В результате получаем тождества:

$$a_{ji}t^i + b_j = (a_{1i}t^i + b_1)^j, \quad j = 2, ..., n. \tag{12}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной t, в равенстве

$$a_{ni}t^i + b_n = (a_{1i}t^i + b_1)^n,$$

получим:

$$a_{12} = a_{13} = ... = a_{1n} = 0.$$

Обозначим $a_{11} = a$, $b_1 = b$. Тогда равенства (12) примут вид:

$$a_{ji}t^i + b_j = (at + b)^j, \quad j = 2, ..., n.$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}t^i + b_j = \sum_{i=1}^{j} C_j^i b^{j-i} a^i t^i + b^j, \quad j = 2, ..., n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной t, получим:

$$a_{ji} = \begin{cases} C_j^i b^{j-i} a^i & \text{при} \quad i = 1, ..., j \\ 0 & \text{при} \quad i = j+1, ..., n \end{cases},$$

$$b_j = b^j, \qquad j = 1, ..., n.$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулы (11) аффинного преобразования, будем иметь:

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{i} C_i^j b^{i-j} a^j x_j + b^i, \ \ i = 1, ..., n. \tag{13}$$

Данное преобразование отображает энику γ:(2) в себя. Действительно, образом её при преобразовании (13) является линия, задаваемая параметризацией

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{i} C_i^j b^{i-j} a^j t^j + b^i, \ \ i = 1, ..., n.$$

Преобразуя правую часть равенства

$$\sum_{j=1}^{i} C_i^j b^{i-j} a^j t^j + b^i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j b^{i-j} (at)^j = (at+b)^i,$$

получим

$$\bar{x}_i = (at+b)^i, \ \ i = 1, ..., n.$$

Таким образом, явное задание линии $f(\gamma)$ совпадает с явным заданием линии γ, именно: $x_i = x_1^i, \ i = 2, ..., n$.

Итак, группа $G(\gamma)$ – двухпараметрическая, зависящая от параметров a и b. □

Будем говорить, что аффинное преобразование f отображает АСК J в АСК J', если репер, соответствующий первой АСК, оно отображает в репер, соответствующий второй АСК.

Теорема 5. *Группа изотропии $G(\gamma)$ действует просто транзитивно на множестве всех (полу)канонических АСК эники γ.*

Доказательство. Пусть преобразование $f \in G(\gamma)$ отображает (полу)каноническую АСК J эники γ в некоторую АСК J'. Каждой точке с координатами $(x_1, x_2, ..., x_n)$ в J оно сопоставляет точку с теми же координатами в J'. Поэтому линия $f(\gamma) = \gamma$ задаётся в J' теми же формулами (2)(соответственно (3)), т.е. J' – (полу)каноническая АСК для γ. Вывод: $G(\gamma)$ действует на множестве всех (полу)канонических АСК эники γ.

Покажем, что это действие – просто транзитивно, т.е. для любых двух (полу)канонических АСК эники γ существует единственное преобразование $f \in G(\gamma)$, отображающее одну АСК в другую. Действительно, для любых двух (полу)канонических АСК J и J' эники γ существует единственное аффинное преобразование f, отображающее J в J'. Поскольку точке с координатами $(x_1, x_2, ..., x_n)$ в J оно сопоставляет точку с теми же координатами в J', то эника $f(\gamma)$ будет задаваться в J' так же, как и γ – формулами (2)(соответственно (3)). Значит $f(\gamma) = \gamma$ и $f \in G(\gamma)$. □

Следствие 2. *Параметры t и t' параметризаций эники, относящихся к двум (полу)каноническим АСК, связаны соотношением*

$$t = at' + b \tag{14}$$

при некоторых действительных a и b, причём, $a \neq 0$.

Доказательство. Пусть имеются 2 полуканонические АСК J и J' эники γ_n. По теореме 5 существует единственное аффинное преобразование $f_{a,b} \in G(\gamma)$, определяемое формулами (13) и отображающее J в J'. Определитель данного преобразования равен $a^{\frac{n(n+1)}{2}} \neq 0$. Поэтому $a \neq 0$. Но формулы (13) можно трактовать и как формулы преобразования координат точки при переходе от АСК J к АСК J', в которых $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ – координаты точки в АСК J, а $(x_1, ..., x_n)$ – её же координаты в АСК $J\,'$. В силу замечания 1 в полуканонической АСК эника параметризована первой координатой текущей точки. В нашем случае $t' = x_1$, $t = \bar{x}_1$. Поскольку первые координаты точки, как явствует из формул (13), связаны равенством $\bar{x}_1 = ax_1 + b$, то имеем соотношение (14). В соответствующих канонических АСК параметр точки имеет то же самое значение. Поэтому утверждение справедливо и для канонических АСК. □

Выясним геометрический смысл коэффициентов a и b в (14). Пусть полуканоническим АСК $J = \{O; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ и $J\,' = \{O'; \vec{e}\,'_1, ..., \vec{e}\,'_n\}$ эники γ_n соответствуют параметры t и t'. Они связаны соотношением (14), если аффинное преобразование, отображающее J в J', задаётся формулами (13). Поскольку началу координат O' в АСК $J\,'$ соответствует параметр $t' = 0$, то в силу формул (14) в АСК J точке O' соответствует параметр b. Из формул (13) также видно, что вектор $\vec{e}\,'_n$ имеет в АСК J координаты $(0; ...; 0; a^n)$. Следовательно, a есть корень n-ой степени из коэффициента пропорциональности коллинеарных векторов $\vec{e}\,'_n$ и $\vec{e}_n$, именно: $\vec{e}\,'_n = a^n \vec{e}_n$.

Если в формулах (13) положить $b = 0$ (это означает, что обе полуканонические АСК имеют общее начало координат), то формулы примут вид $\bar{x}_i = a^i x_i,\ i = 1, ..., n$, и соответствуют переходу к новому базису по формулам $\vec{e}\,'_i = a^i \vec{e}_i, \quad i = 1, ..., n$. Памятуя о замечании 1, приходим к теореме 2.

Замечание 4. Нетрудно убедиться, что последние векторы во всех канонических АСК вида (4) совпадают и имеют координаты $(0; 0; ...; 0; 1)$. Поэтому параметры t и t', относящиеся к двум таким АСК, связаны соотношением $t = t' + b$.

Доказательство следующей теоремы опирается на лемму.

Лемма 1. *Пусть $f_1|_\gamma$ и $f_2|_\gamma$ – сужения на невырожденную энику γ аффинных преобразований f_1 и f_2. Если $f_1|_\gamma = f_2|_\gamma$, то $f_1 = f_2$. Значит группа $G(\gamma)$ изоморфна группе $G|(\gamma)$ сужений отображений $f_{a,b} \in G(\gamma)$ на γ.*

Доказательство. Пусть M_i – точки невырожденной эники γ в A^n, M_i' – их образы при аффинном преобразовании f_1, $i = 1, ..., n+1$. Ввиду того, $f_1|_\gamma = f_2|_\gamma$, заключаем, что точки M_i' являются образами точек M_i и при преобразовании f_2. Поскольку всякая гиперплоскость пересекает энику не более, чем в n точках ([2], следствие 8), то любые $n+1$ точек эники находятся в общем положении. Поэтому наборы точек $R = \{M_i\}_{i=1}^{n+1}$ и $R' = \{M_i'\}_{i=1}^{n+1}$ задают два аффинных репера в A^n. Причём, оба аффинных преобразования отображают репер R в репер R'. По теореме о единственности аффинного преобразования, отображающего репер в репер, заключаем, что $f_1 = f_2$. □

Теорема 6. *Группа изотропии $G(\gamma)$ изоморфна группе GA^1 аффинных преобразований аффинной прямой A^1.*

Доказательство. Для эники γ определим отображение $\varphi : GA^1 \to G(\gamma)$ условием: аффинному преобразованию $l_{a,b} : \bar{x} = ax + b$, $a \neq 0$, прямой A^1 оно сопоставляет аффинное преобразование $f_{a,b}$, определённое формулами (13) при тех же значениях параметров a и b. Вывод формул (13) осуществлялся, исходя из требования

$$r \circ l_{a,b} = f_{a,b} \circ r\,, \tag{15}$$

где r – параметризация эники в заданной полуканонической АСК. Учитывая, что отображение $r : R \to \gamma$ биекция, а обратное к нему отображение представляет собой проекцию p, сопоставляющую точке эники её первую координату, формулу (15) перепишем в виде $l_{a,b} = p \circ f_{a,b} \circ r$. Отсюда видно, что φ – биекция.

Покажем, что φ – гомоморфизм. Пусть $u_i \in GA^1$, $i = 1, 2$. Согласно формуле (15)

$$r \circ u_i = \varphi(u_i) \circ r, \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$(r \circ u_2) \circ u_1 = (\varphi(u_2) \circ r) \circ u_1 = \varphi(u_2) \circ (r \circ u_1) = \varphi(u_2) \circ (\varphi(u_1) \circ r) = (\varphi(u_2) \circ \varphi(u_1)) \circ r.$$

С другой стороны

$$(r \circ u_2) \circ u_1 = r \circ (u_2 \circ u_1) = \varphi(u_2 \circ u_1) \circ r.$$

Таким образом

$$\varphi(u_2 \circ u_1) \circ r = (\varphi(u_2) \circ \varphi(u_1)) \circ r.$$

Поэтому

$$\varphi(u_2 \circ u_1)|_\gamma = (\varphi(u_2) \circ \varphi(u_1))|_\gamma.$$

Последнее равенство по лемме 1 влечёт

$$\varphi(u_2 \circ u_1) = \varphi(u_2) \circ \varphi(u_1).$$

□

Замечание. В [9] в упражнении на с. 128 обосновывается, что всякая двухпараметрическая группа локально изоморфна либо группе параллельных переносов, либо группе линейных подстановок, задаваемых формулой $\bar{x} = ax + b$.

4. Действие группы GA^n на множестве ориентированных дуг эник

В данном пункте мы дополним результат о существовании аффинного преобразования, отображающего одну дугу эники на другую доказательством единственности такого преобразования для невырожденной эники в A^n.

Дугой линии называем вложение числового отрезка $[a, b]$ в линию. Дуга линии однозначно определяется своими концами. Дуга с концами A и B называется ориентированной, если пара точек A, B упорядочена, т.е. одна из точек, например A, считается первой, а другая (B) – второй, обозначается AB. Можно показать, что всякая непрерывная биекция кривой γ на кривую γ' отображает дугу $AB \subset \gamma$ в некоторую дугу $CD \subset \gamma'$, причём концы первой дуги отображаются в концы второй дуги, а внутренние точки дуги отображаются во внутренние точки её образа. В этом случае запись $f(AB) = CD$ предполагает, что $f(A) = C$ и $f(B) = D$.

Теорема 7. *Группа изотропии $G(\gamma)$ действует на множестве ориентированных дуг эники просто транзитивно.*

Доказательство. Всякое аффинное преобразование $f \in G(\gamma)$ порождает непрерывную биекцию $f|_\gamma$ эники γ на себя. Поэтому образом дуги AB будет некоторая дуга $A'B'$. При этом, если AB ориентирована, то преобразование f индуцирует ориентацию и на дуге $A'B'$ по соответствию точек. Таким образом, определено действие группы $G(\gamma)$ на множестве ориентированных дуг.

Если существует аффинное преобразование f пространства A^n, отображающее одну ориентированную дугу эники γ на другую её дугу, то образ $f(\gamma)$ эники γ при этом преобразовании сам является эникой (теорема 3), имеющей с γ общую дугу. Поскольку эника набором из $n^2 + 1$ своих точек определяется однозначно [10], то $f(\gamma) = \gamma$. Таким образом, все аффинные преобразования пространства, отображающие какую-либо дугу эники в другую её дугу, содержатся в группе изотропии $G(\gamma)$ и задаются формулами (13).

По первым координатам x_0, x_1, $\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_1$, точек M_0, M_1 и $\widetilde{M}_0$, $\widetilde{M}_1$ соответственно, мы однозначно определим параметры a и b аффинного преобразования $f_{a,b} \in G(\gamma)$, отображающего дугу M_0M_1 в дугу $\widetilde{M}_0\widetilde{M}_1$ из системы:

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_0 = ax_0 + b \\ \tilde{x}_1 = ax_1 + b \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & \frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0}{x_1 - x_0} \\ & & \\ b & = & \frac{\tilde{x}_0 x_1 - \tilde{x}_1 x_0}{x_1 - x_0} \end{array} \right. .$$

Существование и единственность преобразования $f \in G(\gamma)$, осуществляющего отображение одной ориентированной дуги на другую и означает простую транзитивность действия группы $G(\gamma)$. □

Следствие 3.

a). Для любой ориентированной дуги AB эники существует единственное аффинное преобразование f, такое что $f(AB) = AB$ – это тождественное преобразование.

b). Для любой ориентированной дуги AB эники существует единственное аффинное преобразование f, такое что $f(AB) = BA$.

Следствие 4. *Всякое нетождественное преобразование $f \in G(\gamma)$ имеет не более одной неподвижной точки на γ.*

Доказательство. Если допустить существование хотя бы двух неподвижных точек $A \in \gamma$ и $B \in \gamma$ у преобразования $f \in G(\gamma)$, то придётся признать, что преобразование f отображает дугу AB в AB, и по следствию 3 является тождественным. □

Замечание 5. Если x_0 неподвижная точка преобразования $l_{a,b} \in GA^1$, то $r(x_0)$ – неподвижная точка преобразования $f_{a,b} \in G(\gamma)$ (здесь r – полуканоническая параметризация эники γ).

Действительно, ввиду (15): $l_{a,b}(x_0) = x_0. \Rightarrow f_{a,b}(r(x_0)) = r(l_{a,b}(x_0)) = r(x_0)$.

Следствие 5. *Для любых двух ориентированных дуг разных эник существует единственное аффинное преобразование, отображающее одну дугу на другую. Иначе, группа GA^n действует на множестве ориентированных дуг эник просто транзитивно.*

Доказательство. Пусть M_0M_1 и $\widetilde{M}_0\widetilde{M}_1$ – две ориентированные дуги на эниках γ и $\widetilde{\gamma}$ соответственно. По теореме 3 существует аффинное преобразование f, отображающее энику γ на энику $\widetilde{\gamma}$. При этом дуга M_0M_1 отобразится в некоторую дугу $M_0'M_1'$ на $\widetilde{\gamma}$. По теореме 7 существует аффинное преобразование g, отображающее дугу $M_0'M_1'$ в дугу $\widetilde{M}_0\widetilde{M}_1$. Тогда композиция $g \circ f$ аффинных преобразований f и g является аффинным преобразованием, отображающим дугу M_0M_1 в дугу $\widetilde{M}_0\widetilde{M}_1$. Если допустить существование двух аффинных преобразований f_1 и f_2, отображающих дугу M_0M_1 в дугу $\widetilde{M}_0\widetilde{M}_1$, то будем иметь нетождественное аффинное преобразование $f_2^{-1} \circ f_1$, отображающее дугу M_0M_1 на себя, а это противоречит следствию 3 а). □

По количеству неподвижных точек в $GA^1 = \{l_{a,b}\}$ можно выделить следующие классы преобразований:

1) имеющих одну неподвижную точку ($a \neq 1$),

2) не имеющих неподвижных точек ($a = 1,\ b \neq 0$),

3) имеющих всю прямую A^1 множеством неподвижных точек ($a = 1,\ b = 0$). Первые называются гомотетиями, вторые – параллельными переносами, последнее – тождественное преобразование. При изоморфизме $\varphi : GA^1 \to G(\gamma)$, определённом в п. 3, гомотетиям соответствуют преобразования, имеющие бесконечные множества неподвижных точек, параллельным переносам соответствуют преобразования,

не имеющие неподвижных точек, но параллельными переносами не являющиеся, тождественному преобразованию соответствует тождественное преобразование. Поэтому изоморфизм φ, хотя и сохраняет структуру группы, но не вполне отражает её особенности. Более адекватен изоморфизм $\hat{\varphi} : GA^1 \to G|(\gamma)$, сопоставляющий аффинному преобразованию $l_{a,b}$ сужение $\hat{f}_{a,b} = f_{a,b}|_\gamma$ преобразования $f_{a,b} \in G(\gamma)$ на γ. На основании следствия 4 и замечания 5 заключаем, что группа $G|(\gamma) = \left\{\hat{f}_{a,b}\right\}$ разбивается на классы преобразований, которые назовём:

1) имеющих одну неподвижную точку ($a \neq 1$)− *растяжениями*,

2) не имеющих неподвижных точек ($a = 1,\ b \neq 0$)−*переносами*,

3) имеющих γ множеством неподвижных точек ($a = 1,\ b = 0$)− *тождественным.*

Растяжение с коэффициентом $a = -1$ назовём *отражением относительно неподвижной точки.*

Итак, аффинное преобразование $\hat{f}_{a,b}$ соответствует преобразованию параметра $l_{a,b}$ и задаётся внутренним уравнением

$$\bar{t} = at + b.$$

Из формул

$$l_{a_2,\, b_2} \circ l_{a_1,\, b_1} = l_{a_2 a_1,\, a_2 b_1 + b_2},$$
$$(l_{a,b})^{-1} = l_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}$$

видно, что группа GA^1 имеет следующие подгруппы:

1) аффинных преобразований 1-ого рода ($a > 0$),

2) параллельных переносов ($a = 1$),

3) состоящую из параллельных переносов и центральных симметрий, называемую унимодулярной ($|a| = 1$.)

4) преобразований, для которых фиксированная точка x_0 – неподвижная.

Им соответствуют аналогичные подгруппы в изоморфных группах $G|(\gamma)$ и $G(\gamma)$.

5. Некоторые инварианты группы GA^n.

С помощью биекции всегда можно перенести структуру с одного множества на другое так, чтобы биекция стала изоморфизмом структур. В частности, любую незамкнутую кривую посредством параметризации можно снабдить структурой евклидовой прямой, определив в ней по соответствию точек отношения "лежать между"для трёх точек и равенство дуг. Однако такое перенесение структуры с одного объекта на другой зависит от биекции и может не коррелировать с геометрией объекта, индуцированной на нём объемлющим пространством. Поэтому наша задача определить инварианты группы $G(\gamma)$, действующей на энике γ, установив их связь с соответствующими инвариантами аффинной прямой. В этом пункте рассматриваются только ориентированные дуги.

Теорема 8. *Для любых двух ориентированных дуг M_1M_2 и M_3M_4 эники величина*

$$\mu(M_1M_2, M_3M_4) = \frac{t_4 - t_3}{t_2 - t_1}, \tag{17}$$

где t_i – параметры точек M_i, $i = 1, 2, 3, 4$ в какой-либо (полу)канонической АСК, не зависит от выбор АСК и является инвариантом группы $G(\gamma)$.

Доказательство. По теореме 4 параметры t_i' точек M_i, $i = 1, 2, 3, 4$, в другой (полу)канонической АСК связаны с первоначальными параметрами этих же точек соотношениями $t_i = at_i' + b$ при некоторых $a \in R$ и $b \in R$, $a \neq 0$. Поэтому

$$\frac{t_4 - t_3}{t_2 - t_1} = \frac{(at_4' + b) - (at_3' + b)}{(at_2' + b) - (at_1' + b)} = \frac{t_4' - t_3'}{t_2' - t_1'}.$$

□

Замечание 6. Следствие 1 позволяет дать простое истолкование инвариантности величины (17). Геометрический смысл величины $\mu(M_1M_2, M_3M_4)$ – это отношение двух коллинеарных направленных отрезков $\overrightarrow{M_3'M_4'} : \overrightarrow{M_1'M_2'}$, концы которых M_1', M_2', M_3', M_4' являются проекциями точек M_1, M_2, M_3, M_4 на ось O_{x_1} вдоль координатной плоскости $O_{x_2 \ldots x_n}$ некоторой (полу)канонической АСК. При переходе к другой (полу)канонической АСК 1-ая ось, направленная по касательной прямой к энике, изменится, а проектирующие гиперплоскости, проходящие через точки M_1, M_2, M_3, M_4 согласно следствию 1 останутся прежними. По теореме Фалеса ([7], п. 2.5.1) отношение двух пар коллинеарных направленных отрезков, высекаемых параллельными гиперплоскостями на двух прямых, одинаково: $\overrightarrow{M_3'M_4'} : \overrightarrow{M_1'M_2'} = \overrightarrow{M_3''M_4''} : \overrightarrow{M_1''M_2''}$. Поэтому уместно, на наш взгляд, назвать величину $a = \mu(M_1M_2, M_3M_4)$ *отношением дуги* M_3M_4 *к* M_1M_2, и оправдано обозначение: $M_3M_4 = a \cdot M_1M_2$ или $a = \frac{M_3M_4}{M_1M_2}$.

Следствие 6. *Отношение двух ориентированных дуг энки является инвариантом группы* GA^n.

Доказательство. Пусть для ориентированных дуг M_3M_4 и M_1M_2 эники γ имеет место: $M_3M_4 = a \cdot M_1M_2$, и $M_3'M_4'$ и $M_1'M_2'$ образы этих дуг при преобразовании $f \in GA^n$. Аффинное преобразование f отображает некоторую (полу)каноническую АСК J эники γ на (полу)каноническую АСК J' эники $f(\gamma)$. При этом точки M_1', M_2', M_3', M_4' имеют в АСК J' те же координаты, что и соответствующие им точки M_1, M_2, M_3, M_4 в АСК J. Поэтому $\mu(M_1'M_2', M_3'M_4') = \mu(M_1M_2, M_3M_4) = a$ или $\frac{M_3'M_4'}{M_1'M_2'} = \frac{M_3M_4}{M_1M_2}$. □

Следствие 7. *Для любой ориентированной дуги* M_0M_1 *эники* γ *и её образа* $\widetilde{M}_0\widetilde{M}_1$ *при преобразовании* $f_{a,b} \in G(\gamma)$ *справедливо*

$$\mu(M_0M_1, \widetilde{M}_0\widetilde{M}_1) = a, \text{ или } \widetilde{M}_0\widetilde{M}_1 = a \cdot M_0M_1.$$

Доказательство. Достаточно сравнить формулы (16) и (17). □

Поэтому параметр a можно назвать *коэффициентом растяжения преобразования* $\hat{f}_{a,b}$. В силу теоремы 8 он не зависит от выбора полуканонической АСК эники.

Теорема 9.

1). $$\mu(AB, CD) = -\mu(BA, CD) = -\mu(AB, DC), \quad \mu(AB, CD) = \mu(BA, DC),$$

$$\mu(AB, AB) = 1\ , \quad \mu(AB, CD) = \frac{1}{\mu(CD, AB)}.$$

$$\mu(PQ, AB) \cdot \mu(AB, CD) = \mu(PQ, CD).$$

$$\mu(PQ, AB) + \mu(PQ, BC) = \mu(PQ, AC).$$

2).

$$\mu(AB, BC) = \frac{1}{\mu(CB, BA)}\ .$$

$$\mu(AC, CB) = \frac{-\mu(AB, BC)}{\mu(AB, BC) + 1}\ , \quad \mu(CA, AB) = \frac{-1}{\mu(AB, BC) + 1}\ .$$

3).

$$\mu(AB, AC) = \mu(AB, BC) + 1\ , \quad \mu(BC, AC) = \frac{1}{\mu(AB, BC)} + 1.$$

Ориентированные дуги M_1M_2 и M_3M_4 назовём *одинаково ориентированными*, если $\mu(M_1M_2, M_3M_4) > 0$ и *противоположно ориентированными* в противном случае (<0). Отношение одинаковой ориентированности дуг эники есть отношение эквивалентности на множестве ориентированных дуг, что вытекает из теоремы 9 п. 1), и разбивает его на 2 непересекающихся класса, называемых *ориентациями эники* γ. В отличие от самой величины $\mu(M_1M_2, M_3M_4)$, неизменной при линейных преобразованиях параметра, знак её является инвариантом более широкого класса преобразований параметра, задаваемых монотонными функциями.

Будем говорить, что *точка* B *лежит между точками* A *и* C *на эники* γ и обозначать $A - B - C$, если $\mu(AB, BC) > 0$.

Замечание 7. *Если $A - B - C$, то дуги AB, BC и AC ориентированы одинаково.*

Доказательство. По теореме 9 п.3). □

Для всяких точек A и B эники γ определено разбиение множества $\gamma \setminus \{A\}$ на 2 подмножества $\{M \in \gamma |\ \mu(AB, AM) > 0\}$ и $\{M \in \gamma |\ \mu(AB, AM) < 0\}$. Первое, с добавленной точкой A, назовём *полуэникой* AB, второе вместе с точкой A – *дополнительной к ней полуэникой.* Точка A – *вершина* обоих полуэник. Полуэника определяется любой своей точкой, отличной от вершины, т.е. если B' – произвольная точка полуэники AB, то полуэники AB и AB' совпадают.

Преобразование $f \in G(\gamma)$ назовём *сохраняющим ориентацию дуг* эники γ, если образ любой дуги при этом преобразовании одинаково ориентирован с исходной дугой, и −*меняющим ориентацию дуг* эники γ, если образ любой дуги при этом преобразовании противоположно ориентирован с исходной дугой.

Теорема 10. *Всякое аффинное преобразование $f_{a,b} \in G(\gamma)$ либо сохраняет ($a > 0$) либо меняет ($a < 0$) ориентацию дуг эники.*

Доказательство. По следствию 7 для любой ориентированной дуги M_0M_1 эники γ и её образа $\widetilde{M}_0\widetilde{M}_1$ при преобразовании $f_{a,b} \in G(\gamma)$ величина $\mu(M_0M_1, \widetilde{M}_0\widetilde{M}_1) = a$ не зависит от дуги, а только от преобразования. □

Замечание 8. Поскольку определитель преобразования (13) равен $\Delta = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$, то аффинное преобразование $f \in G(\gamma)$, меняющее ориентацию дуг совсем не обязано быть 2-ого рода. Например, при $n = 4k$, определитель $\Delta > 0$ и при отрицательных значениях a. Однако при положительных a преобразование всегда 1-ого рода.

Две дуги AB и CD эники назовём *аффинно равными*, если $\mu(AB, CD) = 1$, обозначим $AB = CD$. Из теоремы 9 п.1) следует, что аффинное равенство дуг является отношением эквивалентности.

Определяемые через инвариант $\mu(M_1M_2, M_3M_4)$ отношение "лежать между"для трёх точек и равенство дуг также являются инвариантами группы GA^n.

6. Середина дуги эники.

Преобразование $f \in G(\gamma)$ и соответствующее ему преобразование $\hat{f} \in G|(\gamma)$ назовём *обращающими дугу* M_0M_1, если образом дуги M_0M_1 при этих преобразованиях является дуга M_1M_0.

Очевидно, обращающее дугу преобразование $\hat{f}_{a,b}$ меняет ориентацию дуги, и по теореме 10 соответствует отрицательному значению параметра a. Из п. 4 следует, что оно имеет единственную неподвижную точку.

Серединой ориентированной дуги M_0M_1 *эники* назовём неподвижную точку аффинного преобразования $\hat{f} \in G|(\gamma)$, *обращающего дугу* M_0M_1.

Теорема 11. *Середина ориентированой дуги M_0M_1 эники совпадает с серединой ориентированной дуги M_1M_0. Ей соответствует параметр $\frac{t_0+t_1}{2}$, где t_0, t_1 – параметры точек M_0, M_1 в (полу)канонической АСК.*

Доказательство. Отображение, обращающее дугу M_0M_1, одновременно обращает и дугу M_1M_0, поскольку определяется исключительно концами дуги. Следовательно середины ориентированных дуг M_0M_1 и M_1M_0 совпадают.

Определим параметры преобразования $\hat{f}_{a,b} \in G|(\gamma)$, обращающего дугу M_0M_1, полагая в формулах (16) $\tilde{x}_1 = x_0 = t_0$, $\tilde{x}_0 = x_1 = t_1$. Получим $a = -1$, $b = t_0 + t_1$. Итак, $\hat{f}_{a,b}$ задаётся внутренним уравнением $\bar{t} = -t+(t_0+t_1)$. Параметр середины дуги M_0M_1 найдём из уравнения $t = -t+(t_0+t_1)$, полученного из предыдущего уравнения подстановкой $\bar{t} = t$, задающей неподвижную точку. Находим $t = \frac{t_0+t_1}{2}$. □

В силу этого утверждения можно говорить о *середине неориентированной дуги* M_0M_1. Середина дуги не совпадает с центром компакта, определённого через меры Лебега для множеств с внутренними точками в ([7], п. 2.7.5, с. 82).

Следствие 8. *Если O – середина дуги M_0M_1 эники, то $M_0 - O - M_1$ и $M_0O = OM_1$. И, наоборот, если для точек O, M_0, M_1 эники спаведливо $M_0O = OM_1$, то O – середина дуги M_0M_1.*

Доказательство. Если O – середина дуги M_0M_1, то

$$\mu(M_0O, OM_1) = \frac{t_1 - \frac{t_0+t_1}{2}}{\frac{t_0+t_1}{2} - t_0} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad M_0 - O - M_1 \quad \text{и} \quad M_0O = OM_1.$$

Пусть теперь O – точка эники такая, что $M_0O = OM_1$, a – соответствующий ей параметр. Тогда

$$\mu(M_0O, OM_1) = \frac{t_1 - a}{a - t_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{t_0 + t_1}{2}.$$

Такой же параметр соответствует и середине дуги M_0M_1. Так как середина дуги единственна, то O – середина дуги M_0M_1. □

Плоскости, параллельные координатным плоскостям $O_{x_i \ldots x_n}$ (полу)канонической АСК эники или совпадающие с ними, при $i > 1$ будем называть *асимптотическими* (смотреть следствие 1).

Следствие 9. *Середина дуги AB эники совпадает с точкой пересечения эники с асимптотической гиперплоскостью, проходящей через середину прямолинейного отрезка $[AB]$.*

Доказательство. Пусть зафиксирована (полу)каноническая АСК эники. Поскольку параметры t_A, t_B, t_C точек A, B и середины C дуги AB эники совпадают с координатами проекций A', B', C' этих точек на ось O_{x_1} вдоль координатной гиперплоскости $O_{x_2 \ldots x_n}$, то вследствие соотношения $t_C = \frac{t_A+t_B}{2}$ точка C' является серединой прямолинейного отрезка $[A'B']$. По теореме Фалеса проектирующая асимтотическая гиперплоскость, проходящая через точки C и C', пересекает отрезок $[AB]$, заключённый между параллельными ей проектирующими гиперплоскостями, в его середине. □

Симметрией в A^n относительно k-мерной плоскости σ вдоль $(n-k)$-мерной плоскости δ, не параллельной σ (пересечение соответствующих векторных подпространств в V^n состоит из $\vec{0}$) называется отображение $A^n \to A^n$, сопоставляющее каждой точке M точку M^*, такую, что $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M'M^*}$, где M' – проекция точки M на σ вдоль δ ([7], п. 2.4.9.6).

В дальнейшем нашем исследовании особую роль будет играть симметрия относительно координатной плоскости, проходящей через все оси с чётными номерами, вдоль координатной плоскости, проходящей через все оси с нечётными номерами, (полу)канонической АСК эники γ. Координатные плоскости, задающие такую симметрию, однозначно определяются точкой $O \in \gamma$, являющейся началом координат (полу)канонической АСК (смотреть замечание 3). Будем обозначать её s_O.

Ниже используется обозначение $\lfloor y \rfloor$ для округления действительного числа y до целого снизу.

Следствие 10.

1). Для всех дуг эники, имеющих общую середину O, аффинные преобразования, их обращающие, суть одно – симметрия $s_{(O)}$.

2). Концы этих дуг симметричны и имеют в полуканонической АСК с началом координат O противоположные значения параметров t и $-t$. И, наоборот, дуги, соединяющие симметричные точки, имеют своей серединой точку O.

3). Середины отрезков, соединяющих симметричные точки, лежат на полуэнике степени $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ с вершиной в начале координат.

Доказательство. Пусть t_0 и t_1 параметры концов дуги M_0M_1 эники в полуканонической АСК с началом координат O в середине этой дуги. Поскольку началу координат в полуканонической АСК соответствует параметр 0, а параметр середины дуги по теореме 11 равен $\frac{t_0+t_1}{2}$, то $t_0 + t_1 = 0$, откуда имеем соотношение $t_1 = -t_0$. Как видно из доказательства теоремы 11, преобразование $f_{a,b} \in G(\gamma)$, обращающее дугу M_0M_1, соответствует параметрам $a = -1$ и $b = 0$. Тогда формулы (13) принимают вид:

$$\bar{x}_i = (-1)^i x_i, \; i = 1, ..., n. \tag{18}$$

Они задают симметрию относительно координатной плоскости, проходящей через все оси с чётными номерами, вдоль координатной плоскости, проходящей через все оси с нечётными номерами, и не зависят от координат точек M_0, M_1. Тем самым доказали, что для всех дуг эники с общей серединой O обращающие их аффинные преобразования суть одна и та же симметрия (18), причём концы этих дуг соответствуют противоположным значениям параметра. Наоборот, если дуга M_0M_1 эники соединяет симметричные точки, то из формул (18) следует, что им соответствуют противоположные значения параметров, поэтому середине дуги M_0M_1 по теореме 11 соответствует нулевое значение параметра. Значит, O – середина дуги M_0M_1.

Середины отрезков, соединяющих симметричные точки эники, имеют координаты $x_i = 0$ при нечётных i, и $x_i = t^i$ при чётных i. Поэтому в усечённой АСК $O_{x_2x_4}...$ координатной плоскости, проходящей через все оси с чётными номерами, множество середин означенных отрезков задаётся параметризацией $\vec{r} = (t^2; t^4; t^6; ...)$. Замена параметра $u = t^2$, $u \geq 0$, показывает, что это есть полуэника степни $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ с вершиной в начале координат. □

Обозначим через SA^n унимодулярную группу аффинных преобразований (определитель которых по абсолютной величине равен 1). Обозначим:

$$S(\gamma) = \{f_{a,b} \in G(\gamma) |\, |a| = 1\}.$$

Теорема 12.

$$S(\gamma) = G(\gamma) \cap SA^n.$$

Образующими группы $S(\gamma)$ являются симметрии $\{s(O) |\, O \in \gamma\}$.

Доказательство. Определитель преобразования $f_{a,b} \in G(\gamma)$, задаваемого в полуканонической АСК эники γ формулами (13), равен $a^{\frac{n(n+1)}{2}}$, не зависит от выбора полуканонической АСК и равен 1 по абсолютной величине тогда и только тогда, когда $|a| = 1$. Отсюда вытекает первое предложение теоремы.

Далее: $S(\gamma) = \{f_{-1,b} \in G(\gamma)|\ b \in R\} \cup \{f_{1,b} \in G(\gamma)|\ b \in R\}$. Покажем, что всякое преобразование $f_{-1,b} \in G(\gamma)$ является симметрией $s_{(O)}$ с неподвижной точкой O на γ, соответствующей параметру $\frac{b}{2}$ в той же АСК.

Параметр t_0 неподвижной точки O преобразования $\hat{f} = f_{-1,b}|\gamma$, определяемого формулами $\bar{t} = -t+b$, находится из равенства $t_0 = -t_0+b$. Поэтому $t_0 = \frac{b}{2}$. Убедимся, что $f_{-1,b} = s_{(O)}$. Перейдём к новой полуканонической АСК с началом координат в точке O. По теореме 5 формулы преобразования параметра таковы: $t = t'+\frac{b}{2}$. В новой АСК преобразование $\hat{f}$ задаётся формулами $\bar{t}\,'+\frac{b}{2} = -(t'+\frac{b}{2})+b$ или $\bar{t}\,' = -t'$ (здесь t' и $\bar{t}\,'$ координаты точки и её образа в новой АСК). Ему соответствует симметрия $s_{(O)}$, задаваемая формулами (18).

Благодаря изоморфизму $\varphi : GA^1 \to G(\gamma)$, определенному в п. 3, предпоследняя формула в п. 4 может быть переписана в виде

$$f_{a_2,\, b_2} \circ f_{a_1,\, b_1} = f_{a_2a_1,\, a_2b_1+b_2}.$$

Поэтому всякое преобразование $f_{1,b}$ при любом $c \in R$ представимо в виде композиции двух симметрий $f_{-1,\, c+b} \circ f_{-1,\, c}$ (не перестановочных между собой). $\square$

Теорема 13. *Середина дуги эники отображается при аффинном преобразовании в середину её образа, т. е. середина дуги является инвариантом группы GA^n.*

Доказательство. Действительно, пусть аффинное преобразование f отображает ориентированную дугу M_0M_1 эники γ на дугу $\widetilde{M}_0\widetilde{M}_1$ эники $f(\gamma)$, а середину C этой дуги в точку $\widetilde{C}$. Пусть g – аффинное преобразование такое, что $g(M_0M_1) = M_1M_0$. Тогда $g(C) = C$, и аффинное преобразование $f \circ g \circ f^{-1}$ отображает дугу $\widetilde{M}_0\widetilde{M}_1$ в дугу $\widetilde{M}_1\widetilde{M}_0$, причём, $f \circ g \circ f^{-1}(\widetilde{C}) = f \circ g(C) = f(C) = \widetilde{C}$. Значит, точка $\widetilde{C}$ – середина дуги $\widetilde{M}_0\widetilde{M}_1$. $\square$

7. Аффинно-равные дуги эники.

В этом пункте представим эквивалентные трактовки аффинного равенства ориентированных дуг и определим равенство неориентированных дуг.

Теорема 14. *Две ориентированные дуги M_1M_2 и M_3M_4 эники аффинно-равны тогда и только тогда, когда выполнено любое из эквивалентных утверждений:*

1) Параметры t_i точек M_i, $i = 1, 2, 3, 4$, в любой (полу)канонической АСК связаны соотношением $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$.

2) Середины дуг M_1M_4 и M_2M_3 совпадают.

3) Существует перенос $\hat{f}_{1,b} \in G|(\gamma)$, отображающий дугу M_1M_2 на M_3M_4.

4) Существует отражение $\hat{f}_{-1,c} \in G|(\gamma)$, отображающее дугу M_1M_2 на M_4M_3.

5) Существует симметрия $s_{(O)} \in G(\gamma)$, отображающая дугу M_1M_2 на M_4M_3.

Доказательство.

$$1).\ M_1M_2 = M_3M_4 \;\Leftrightarrow\; \mu(M_1M_2, M_3M_4) = \frac{t_4 - t_3}{t_2 - t_1} = 1 \;\Leftrightarrow\; t_2 - t_1 = t_4 - t_3.$$

2). $t_2 - t_1 = t_4 - t_3.\ \Leftrightarrow\ \frac{t_2+t_3}{2} = \frac{t_1+t_4}{2}$. Последнее равенство означает совпадение середин дуг M_2M_3 и M_1M_4.

3). Пусть $M_1M_2 = M_3M_4$. Тогда выполнено условие 1). Перенос $\hat{f}_{1,b}$ при $b = t_3-t_1$, задаваемый в той же АСК формулами $\bar{t} = t + (t_3 - t_1)$, отображает дугу M_1M_2 на M_3M_4. Действительно, $\bar{t}_1 = t_1 + (t_3 - t_1) = t_3$ и $\bar{t}_2 = t_2 + (t_3 - t_1) = t_3 + (t_2 - t_1) = t_3 + (t_4 - t_3) = t_4$. Значит точка M_1 отобразилась в M_3, а M_2 в M_4, дуга M_1M_2 на M_3M_4.

Наоборот, пусть $\hat{f}_{1,b} \in G|(\gamma)$ отображает дугу M_1M_2 на M_3M_4. Тогда $\bar{t}_1 = t_1+b = t_3$ и $\bar{t}_2 = t_2 + b = t_4$. Выражая из двух равенств b и приравнивая оба значения, получим

$t_3 - t_1 = t_4 - t_2$. Это равносильно равенству $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, означающему равенство дуг $M_1M_2 = M_3M_4$.

4) Если $M_1M_2 = M_3M_4$, то отражение $\hat{f}_{-1,c} \in G|(\gamma)$ при $c = t_1 + t_4$ (относительно общей середины дуг, соответствующей параметру $\frac{t_2+t_3}{2} = \frac{t_1+t_4}{2}$) будет требуемым. Оно задаётся формулами $\bar{t} = -t + (t_1 + t_4)$. Поэтому $\bar{t}_1 = -t_1 + (t_1 + t_4) = t_4$. $\bar{t}_2 = -t_2 + (t_1 + t_4) = -t_2 + (t_2 + t_3) = t_3$. Значит точка M_1 отобразилась в M_4, а M_2 в M_3, дуга M_1M_2 на M_4M_3.

Наоборот, пусть $\hat{f}_{-1,c} \in G|(\gamma)$ отображает M_1M_2 на M_4M_3. Тогда $\bar{t}_1 = -t_1 + c = t_4$ и $\bar{t}_2 = -t_2 + c = t_3$. Выражая из двух равенств c и приравнивая оба значения, получим $t_3 + t_2 = t_4 + t_1$. Это равносильно равенству $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, означающему равенство дуг $M_1M_2 = M_3M_4$.

5) Утверждение вытекает из изоморфизма групп $G|(\gamma)$ и $G(\gamma)$ и предыдущего предложения. □

Следствие 11.

$$a) M_1M_2 = M_3M_4 \Leftrightarrow M_2M_1 = M_4M_3.$$
$$b) M_1M_2 = M_3M_4 \Leftrightarrow M_1M_3 = M_2M_4.$$

Доказательство.

$$a) M_1M_2 = M_3M_4 \Leftrightarrow t_2 - t_1 = t_4 - t_3 \Leftrightarrow t_1 - t_2 = t_3 - t_4 \Leftrightarrow M_2M_1 = M_4M_3.$$

$$b) M_1M_2 = M_3M_4 \Leftrightarrow t_2 - t_1 = t_4 - t_3 \Leftrightarrow t_4 - t_2 = t_3 - t_1 \Leftrightarrow M_2M_4 = M_1M_3. \quad \square$$

Следствие 12. *Для дуг эники сраведливо: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ $\Rightarrow$ $AC = A'C'$.*

Доказательство. Пусть t_A, t_B, t_C, $t_{A'}$, $t_{B'}$, $t_{C'}$ – параметры точек A, B, C, A', B', C'. По теореме 14 имеем: $t_B - t_A = t_{B'} - t_{A'}$ и $t_C - t_B = t_{C'} - t_{B'}$. Складывая эти 2 равенства почленно, получим: $t_C - t_A = t_{C'} - t_{A'}$. Значит $AC = A'C'$. □

Следствие 13. *От всякой точки эники можно отложить дугу, равную данной, единственным способом. Точнее: для любой дуги AB эники γ и произвольной точки $C \in \gamma$ найдётся единственная точка $D \in \gamma$ такая, что $AB = CD$.*

До сих пор мы имели дело с ориентированными дугами. Теперь же будем использовать и неориентированные дуги. Для их различения неориентированную дугу, соответствующую ориентированной дуге AB, будем обозначать $\tilde{AB}$.

Неориентированные дуги $M_1\tilde{M}_2$ и $M_3\tilde{M}_4$ эники назовём *аффинно-равными* и будем обозначать $M_1\tilde{M}_2 = M_3\tilde{M}_4$, если они аффинно равны, будучи одинаково ориентированными. В силу следствия 11 не имеет значения выбранная на них ориентация.

$$M_1\tilde{M}_2 = M_3\tilde{M}_4 \Leftrightarrow (M_1M_2 = M_3M_4) \vee (M_1M_2 = M_4M_3).$$

Аффинное равенство неориентированных дуг также является эквивалентностью.

Следствие 14. *Две неориентированные дуги $M_1\tilde{M}_2$ и $M_3\tilde{M}_4$ аффинно-равны тогда и только тогда, когда выполнено любое из эквивалентных утверждений:*

1) параметры t_i точек M_i, $i = 1, 2, 3, 4$, в любой (полу)канонической АСК связаны соотношением $|\, t_2 - t_1| = |\, t_4 - t_3|$.

2) $|\,\mu(M_1M_2, M_3M_4)| = 1$.

3) Существует симметрия $s_{(O)}$ такая, что $s_{(O)}(M_1\tilde{M}_2) = M_3\tilde{M}_4$.

4) Существует унимодулярное аффинное преобразование $f \in S(\gamma)$ такое, что $f(M_1\tilde{M}_2) = M_3\tilde{M}_4$.

Следствие 15. *Для любой неориентированной дуги $\tilde{AB}$ эники γ и любой её точки C существуют две точки D_1 и D_2 на γ, принадлежащие дополнительным полуэникам с вершиной C, такие, что $\tilde{AB} = C\tilde{D}_1 = C\tilde{D}_2$. Причём, $D_1 - C - D_2$.*

Если по заданной дуге $\tilde{AB}$ эники γ на полуэнике с вешиной C определяется точка D такая, что $\tilde{AB} = \tilde{CD}$, то будем говорить об "*откладывании дуги* $\tilde{AB}$ *от точки* C *на данной полуэнике*".

Теорема 15. *Если для троек точек эники сраведливы отношения* $A - B - C$ *и* $A' - B' - C'$ *и* $\tilde{AB} = \tilde{A'B'}$, $\tilde{BC} = \tilde{B'C'}$, *то* $\tilde{AC} = \tilde{A'C'}$.

Доказательство. Случай 1: дуги AC и $A'C'$ ориентированы одинаково. Учитывая условия $A-B-C$ и $A'-B'-C'$, на основании замечания 7 заключаем, что одинаково ориентированы тройки дуг AB, BC, AC и $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$. Так как одинаковая ориентированность дуг является отношением эквивалентности, то все дуги AB, BC, AC, $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$ ориентированы одинаково. Поэтому равенства $\tilde{AB} = \tilde{A'B'}$, $\tilde{BC} = \tilde{B'C'}$ влекут равенства $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. По следствию 12 $AC = A'C'$. Значит и $\tilde{AC} = \tilde{A'C'}$.

Случай 2: дуги AC и $C'A'$ ориентированы одинаково. Проводя аналогичные рассуждения, убеждаемся, что одинаково ориентированы дуги AB, BC, AC, $C'B'$, $B'A'$, $C'A'$. Поэтому равенства $\tilde{AB} = \tilde{A'B'}$, $\tilde{BC} = \tilde{B'C'}$ неориентированных дуг влекут равенства ориентированных дуг: $AB = B'A'$, $BC = C'B'$. Пусть t_A, t_B, t_C, $t_{A'}$, $t_{B'}$, $t_{C'}$ – параметры точек A, B, C, A' B', C' в некоторой (полу)канонической АСК. По теореме 14 п. 1) имеем: $t_B - t_A = t_{A'} - t_{B'}$ и $t_C - t_B = t_{B'} - t_{C'}$. Складывая эти 2 равенства почленно, получим: $t_C - t_A = t_{A'} - t_{C'}$. Значит $AC = C'A'$ и $\tilde{AC} = \tilde{A'C'}$. □

Теорема 16. *Для эники имеет место аксиома Архимеда в формулировке:*

Для любых двух дуг $\tilde{AB}$ *и* $\tilde{PQ}$ *эники* γ *найдётся на* γ *конечное множество точек* A_1, A_2, ...,A_n, *таких, что*

1) $A - A_1 - A_2$, $A_1 - A_2 - A_3$, ..., $A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$,

2) $\tilde{AA_1} = \tilde{A_1A_2} = ... = \tilde{A_{n-1}A_n} = \tilde{PQ}$,

3) либо $B = A_n$ *либо* $A_{n-1} - B - A_n$.

Доказательство. Будем исходить из принципа Архимеда, справедливого для множества R действительных чисел и утверждающего, что для любых чисел $x \in R$, $y \in R$, $y > 0$, существует единственное целое число n такое, что $(n-1)y \leq x < ny$.

По следствию 15 можно откладывать на полуэнике AB от её вершины последовательно дуги, равные $\tilde{PQ}$, именно: построить последовательность точек A_1, A_2, ..., A_n... таких, что выполнены условия 1) и 2). Не ограничивая общности можно считать, что дуги PQ и AA_1 ориентированы одинаково. Тогда из 1) и 2) следует равенство ориентированных дуг $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}A_n = ... = PQ$. Зададим (полу)каноническую АСК с началом координат в точке A, так, чтобы точке B соответствовал положительный параметр x. Пусть точки A_1, A_2, ...,A_n, P, Q соответствуют параметрам t_1, t_2,..., t_n, t_P, t_Q. Обозначим $t_Q - t_P = y$. Поскольку ориентированные дуги AB и PQ ориентированы одинаково, то $y > 0$. По теореме 14 п.1) имеем: $t_1 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = ... = t_n - t_{n-1} = .. = y. \Rightarrow t_1 = y, t_2 = 2y, t_3 = 3y, ..., t_n = ny$. Применяя принцип Архимеда, заключаем, что существует целое число n такое, что $(n-1)y \leq x < ny$. Так как $x > 0$ и $y > 0$, то $n \geq 1$. Таким образом, параметры точек A_{n-1}, B, A_n связаны соотношением $t_{n-1} \leq x < t_n$. Поэтому либо $B = A_{n-1}$ либо $A_{n-1} - B - A_n$, что равносильно условию 3), если в первом варианте $n-1$ обозначить за новое целое число m. □

Аналогично, в силу биективного соответствия между множеством R действительных чисел и точками эники можно перенести на энику аксиомы Дедекинда и Кантора, заменяя слово "отрезок"на слово "дуга"(неориентированная). Мы не делаем этого потому, что доказательство теоремы о единственности меры отрезка, на которую делается ссылка при обосновании теоремы 20, не использует их.

Теорема 17. *Любая эника (в частности, эника степени 1 в A^1, совпадающая с A^1) служит моделью прямой в абсолютной геометрии в аксиоматике Гильберта. ([11], с. 306-312)*

Доказательство. Точки, отрезки, лучи – соответственно точки, неориентированные дуги и полуэники. Отношение "лежать между"для точек эники удовлетворяет аксиомам порядка $II_1 - II_3$ в аксиоматике Гильберта абсолютной геометрии, что следует из теоремы 9 п. 3). Отношение равенства дуг удовлетворяет аксиомам конгруэнтности III_1, III_3, что вытекает из следствия 15, теоремы 15, а эквивалентность равенства (III_2) из следствия 14 п.2) и теоремы 9 п.1). Аксиомы непрерывности следуют из теоремы 16 и последующего замечания. □

8. Длина дуги эники.

В этом пункте будем рассматривать исключительно неориентированные дуги, и обозначать их будем без тильды. Множество неориентируемых дуг эники γ обозначим через $Arc\gamma$.

Определим измерение дуг эники так, как это сделано для отрезков в ([11], с. 86). Будем говорить, что задано *измерение дуг эники* γ, если определено отображение $l : Arc\gamma \to R$, удовлетворяющее аксиомам:

1) $l(AB) > 0$ для всех $AB \in Arc\gamma$,
2) если $AB = A'B'$, то $l(AB) = l(A'B')$,
3) если $A - B - C$, то $l(AB) + l(BC) = l(AC)$,
4) существует дуга PQ (*единичная*) такая, что $l(PQ) = 1$.

Как будет показано ниже, существует множество функций $l : Arc\gamma \to R$, удовлетворяющих *аксиомам меры*, зависящих от выбора дуги PQ в качестве единицы измерения. *Мерой* или *длиной дуги AB относительно выбранной единицы измерения* PQ называется значение отображения l на дуге AB.

Теорема 18. *Для любой дуги PQ эники γ существует отображение $l : Arc\gamma \to R$, удовлетворяющее аксиомам меры.*

Доказательство. Зафиксируем на энике γ произвольную дугу PQ. Положим

$$l(AB) = |\mu(PQ, AB)|. \tag{19}$$

1-ая аксиома меры, очевидно, выполнена, 4-ая выполнена в силу теоремы 9 п.1). 2-ая аксиома выполняется по теореме 9 п.1) и следствию 14 п.2). Действительно, так как $AB = A'B'$, то $|\mu(AB, A'B')| = 1$. Тогда $|\mu(PQ, A'B')| = |\mu(PQ, AB) \cdot \mu(AB, A'B')| = |\mu(PQ, AB)| \cdot |\mu(AB, A'B')| = |\mu(PQ, AB)| \cdot 1 = |\mu(PQ, AB)|. \Rightarrow \quad l(AB) = l(A'B')$. Проверим выполнение аксиомы 3. Если $A - B - C$, то ориентированные дуги AB, BC, AC ориентированы одинаково. Поэтому величины $\mu(PQ, AB)$, $\mu(PQ, BC)$, $\mu(PQ, AC)$ одного знака. Поэтому последнее равенство в п.1) теоремы 9 влечёт равенство

$$|\mu(PQ, AB)| + |\mu(PQ, BC)| = |\mu(PQ, AC)|,$$

приводящее к результату: $l(AB) + l(BC) = l(AC)$. Теорема доказана. □

Следствие 16. *Определённая таким образом длина дуги эники γ совпадает с длиной проекции этой дуги вдоль асимптотической гиперплоскости на любую пересекающую эту гиперплоскость прямую m, если в качестве единицы измерения на прямой взять проекцию единичной дуги на эту прямую.*

Доказательство. Утверждение вытекает из замечания 1, теоремы Фалеса и того факта, что прямая m сама является эникой степени 1, для которой измерение длин отрезков определено той же формулой. □

Следствие 17. *Если $l : Arc\gamma \to R$ и $l_1 : Arc\gamma \to R$ – две меры на энике, относящиеся к двум единицам измерения PQ и P_1Q_1, таким, что $P_1Q_1 = a \cdot PQ$, $a > 0$, то для любой дуги AB эники*
$$l_1(AB) = \frac{1}{a} \cdot l(AB).$$

Доказательство. По теореме 9 п.1) имеем
$$l_1(AB) = |\mu(P_1Q_1, AB)| = |\mu(P_1Q_1, PQ) \cdot \mu(PQ, AB)| = |\mu(P_1Q_1, PQ)| \cdot |\mu(PQ, AB)| =$$
$$= \frac{1}{a} \cdot |\mu(PQ, AB)| = \frac{1}{a} \cdot l(AB).$$
□

Теорема 19. *Для любого действительного числа $a > 0$ при заданной единичной дуге на энике существует дуга длины a.*

Доказательство. Пусть на энике γ задана единица измерения PQ. Для заданного действительного числа $a > 0$ пусть $P'Q'$ – образ ориентированной дуги PQ при преобразовании $f_{a,0} \in G(\gamma)$. По следствию 7 $\mu(PQ, P'Q') = a$. Значит, $l(P'Q') = a$. □

Другой подход к определению длин дуг эники восходит к конструированию отображения $g : Arc\gamma \to R$ так, как это делается в ([11], с. 372) при измерении длин отрезков прямой. Для этого используем два построения: 1) откладывание дуги PQ от заданной точки (следствие 15), 2) деление дуги пополам (следствие 9). Значение $g(AB)$ определим в виде двоичной дроби следующим образом. На полуэнике AB будем откладывать последовательно от вершины A дуги, равные PQ так, что выполнены условия 1), 2) теоремы 16, а, значит, выполнено и условие 3). Если для некоторого натурального n справедливо $A_n = B$, то полагаем $g(AB) = n$. Если $A_n - B - A_{n+1}$, то считаем, что $g(AB)$ содержит n целых, а дробную часть определим последующим делением дуги A_nA_{n+1} пополам, полагая $g(AB) = n,1$ (или $n + \frac{1}{2}$), если B – середина дуги A_nA_{n+1}. В противном случае возникают 2 варианта: 1) $B \in A_nO_1$, где O_1 – середина дуги A_nA_{n+1}, 2) $B \in O_1A_{n+1}$. В первом случае после запятой ставим ноль, во втором – единицу, и переходим к делению пополам той из двух дуг A_nO_1, O_1A_{n+1}, которая содержит точку B, и т.д. В результате получаем некоторое действительное число a, возможно, выражаемое бесконечным двоичным разложением.

Поскольку эника является моделью прямой в абсолютной геометрии, то для неё при заданной единице измерения существует и притом единственное отображение, удовлетворяющее аксиомам меры ([11], с. 375, 376). Тем самым доказана

Теорема 20. *При любом выборе единичной дуги PQ на энике значение меры $l(AB)$, определённой формулой (19), совпадает с измерением $g(AB)$ посредством последовательного откладывания отрезка PQ или (и) его частей.*

Возникает вопрос: можно ли каким-либо образом перенести единицу измерения с одной эники на все остальные, чтобы можно было как-то сравнивать длины их дуг?

Теорема 21. *Унимодулярная аффинная группа SA^n действует транзитивно на множестве эник.*

Доказательство. Пусть произвольные эники γ_1 и γ_2 заданы формулами (3) в некоторых канонических АСК I_1 и I_2 соответственно. Тогда аффинное преобразование f, отображающее АСК I_1 в АСК I_2, отображает энику γ_1 в энику γ_2. Если его определитель $\delta_f = 1$, то $f \in SA^n$ – искомое преобразование. Иначе рассмотрим аффинное преобразование g, отображающее АСК $I_2 = \{O; \vec{e_1}, ..., \vec{e_n}\}$ в АСК $I_2' = \{O; \vec{e}\,'_1, ..., \vec{e}\,'_n\}$ такую, что $\vec{e}\,'_i = a^i \vec{e}_i$, $a > 0$. Принимая во внимание теорему 2, заключаем, что АСК I_2' при любом a также каноническая для эники γ_2. Поэтому $g(\gamma_2) = \gamma_2$. Значит, $g \in G(\gamma_2)$

и g задаётся в I_2 формулами (13) при некоторых a и b, т.е. $g = f_{a,b}$. Определитель преобразования g равен $\delta_g = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Тогда определитель композиции $g \circ f$ равен

$$\delta_{g\circ f} = \delta_f \delta_g = \delta_f \cdot a^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Полагая $|\delta_{g\circ f}| = 1$, подберём такое a, при котором отображение $g \circ f \in SA^n$. Остаётся заметить, что $(g \circ f)(\gamma_1) = \gamma_2$. $\square$

Следствие 18. *Образы произвольной дуги PQ эники γ при всех унимодулярных аффинных преобразованиях, отображающих γ на энику γ', суть аффинно равные дуги на γ'.*

Доказательство. Пусть P_1Q_1 и P_2Q_2 – образы дуги PQ эники γ при унимодулярных аффинных преобразованиях f_1, f_2, отображающих энику γ на энику γ'. Так как унимодулярные аффинные преобразования образуют группу SA^n, то $f_2 \circ f_1^{-1} \in SA^n$ и $f_2 \circ f_1^{-1}(\gamma') = \gamma'$. Значит, $f_2 \circ f_1^{-1} \in S(\gamma')$. По следствию 14 п. 4) $P_1Q_1 = P_2Q_2$. $\square$

Замечание 9. В [9, с. 382] сообщается, что унимодулярная группа SA^2 действует транзитивно над параболами в A^2, причём, парабола сохраняется при преобразованиях однопараметрической подгруппы, переводящих один канонический репер (называемый в [9] репером Френе) в другой. Аналогичный факт отмечается и для кубик в A^3 [9, с. 389].

Итак, при выбранной единице меры PQ на фиксированной невырожденной энике γ можно посредством унимодулярного аффинного преобразования перенести её на всякую другую невырожденную энику, и результат не будет зависеть от выбора унимодулярного аффинного преобразования, отображающего одну энику на другую. Напрашивается определение *аффинно равных фигур* в A^n как фигур, эквивалентных относительно группы унимодулярных аффинных преобразований SA^n. Определённое таким способом "аффинное равенство фигур" является инвариантом группы GA^n. Действительно, если P и Q аффинно равные фигуры, т.е. $Q = f(P)$ при некотором преобразовании $f \in SA^n$, и $P' = g(P)$, $Q' = g(Q)$ – их образы при аффинном преобразовании $g \in GA^n$, то $Q' = (g \circ f \circ g^{-1})(P')$, причём $g \circ f \circ g^{-1} \in SA^n$, что означает аффинное равенство фигур P' и Q'. В пользу такого определения говорит и тот известный факт, что группа SA^n сохраняет объёмы [12].

9. Заключение.

Если проследить реальный процесс измерения отрезка на прямой, то обнаружим, что из двух операций (откладывания отрезка, равного данному, от данной точки и деления отрезка пополам), не выходя за пределы A^1, можно выполнить построением только первую. Именно, скольжением единичного направленного отрезка OP заданной АСК по прямой до тех пор, пока дубль точки O не достигнет точки C, от которой отрезок должен быть отложен. Математически это означает существование гомотопии $F(t,\lambda) : R \times [0,1] \to R$ в классе параллельных переносов, связывающей тождественное преобразование $l_{1,0}$ и параллельный перенос $l_{1,c}$ (c – координата точки C). Гомотопией, удовлетворяющей этим требованиям, является линейная деформация

$$F(t,\lambda) = (1-\lambda)l_{1,0} + \lambda l_{1,c} = (1-\lambda)t + \lambda(t+c) = t + \lambda c = l_{1,\lambda c}.$$

При каждом фиксированном $\lambda \in [0,1]$ гомотопия $l_{1,\lambda c}$ отображает отрезок OP в равный ему отрезок на прямой. Вопрос об измерении отрезка на прямой с помощью одной этой операции для меня остаётся открытым.

Отметим, что для эники также существует гомотопия $F(t,\lambda) : A^n \times [0,1] \to A^n$ в классе унимодулярных аффинных преобразований, связывающая тождественное преобразование $f_{1,0}$ и $f_{1,c}$. Именно, $F(t,\lambda) = f_{1,\lambda c}$. Поэтому дуга эники также может "скользить"по энике, оставаясь всё время аффинно равной исходной. Однако это обстоятельство в отличие от прямой не предоставляет нам реального способа откладывния дуги от заданной точки эники, не выходя за пределы эники.

Обсудим теперь соотношение меры дуги эники, определённой выше, с её аффинной длиной, принятой в эквиаффинной геометрии (с унимодулярной группой преобразований). Аффинная длина в A^n вводится как инвариант унимодулярной группы аффинных преобразований [6], [12]. Для дуги, заданной произвольной гладкой параметизацией $\vec{r} = \vec{r}(t),\ \ t \in [t_1, t_2],$ *аффинная длина дуги* определяется через интеграл

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left[\vec{r}\,', \vec{r}\,'', ..., \vec{r}\,^{(n)}\right]^{\frac{2}{n(n+1)}} dt, \ \ \text{где}$$

$\left[\vec{r}\,', \vec{r}\,'', ..., \vec{r}\,^{(n)}\right]$ – определитель, составленный из координат векторов $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$,...,$\vec{r}\,^{(n)}$. В случае вырожденной кривой аффинная длина её равна 0.

Говорят, что линия $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in I$, где I – числовой промежуток, *параметризована аффинной длиной дуги* s, если $\left[\vec{r}\,'(s), \vec{r}\,''(s), ..., \vec{r}\,^{(n)}(s)\right] = 1$ при всех $s \in I$ [6].

Каноническая параметризация невырожденной эники как раз и является параметризацией посредством аффинной длины дуги. Это означает, что длина дуги AB эники равна $|s_B - s_A|$, где s_A, s_B – параметры точек A и B. Заметим, что она совпадает со значением меры $l(AB)$ при выборе единичной дуги PQ с концами, отвечающими параметрам 0 и 1.

References

[1] I.V. Polikanova, *On curves with affine-equivalent arcs*, MAR-2015: «Mathematics for Altai Region»: a collection of papers of the All-Russian Conference on Mathematics, Barnaul, 2015, 34–38.

[2] T. Flash, A.A. Handzel, *Affine differential geometry analysis of human arm movements*, Biological cybernetics, **96**:6 (2007), 577–601. Zbl 1122.92003

[3] I.V. Polikanova, *Intersections of Polinomial Curves with Planes*, Izvestiya of Altai State University Journal, **4**(96) (2017), 141–145.

[4] I.V. Polikanova, *The canonical basis of enika*, MAR:«Mathematics for Altai Region»: a collection of papers of the All-Russian Conference on Mathematics with international participation, Barnaul, 2018, 40–44.

[5] I.V. Polikanova, *Asymptotic direction of enika*, Collection of scientific articles of the international conference «Lomonosov readings in Altai: Fundamental problems of science and education», Barnaul, 2017, 317–320.

[6] D. Davis, *Generic affine differential geometry of curves in R^n*, Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A, Math., **136**:6 (2006), 1195–1205. Zbl 1126.53006

[7] M. Berger, *Geometry*, Moscow: Mir, 1984. Zbl 0598.51017

[8] L.S. Atanasian, V.T. Bazilev, *Geometry* (in 2 parts), P. 1, Moscow: Knorus, 2015.

[9] J. Favar, *Course of local differential geometry*, Moscow: Librokom, 2010.

[10] I.V. Polikanova, *Enika definiteness by a finite set of points*, MAR: «Mathematics for Altai Region»: a collection of papers of the All-Russian Conference on Mathematics, Barnaul, 2017, 37–40.

[11] L.S. Atanasian, V.T. Bazilev, *Geometry* (in 2 parts), P. 2, Moscow: Knorus, 2015.

[12] J.N. Clelland, E. Estrada, M. May, J. Miller, S. Peneyra, M. Schmidt, *A tail of two arc lengths: metric notions for curves in surfaces in equiaffine space*, Proceedings of the American Mathematical Society, **142**:7 (2014), 2543–2558. Zbl 1297.53012

Irina Viktorovna Polikanova
Altai State Pedagogical University,
6(1), Soviet str.,
Barnaul, 656002, Russia
E-mail address: anirix1@yandex.ru