S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1385–1392 (2019) УДК 519.17
DOI 10.33048/semi.2019.16.096 MSC 05C25

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ Q-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГРАФАХ Γ С СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫМИ ГРАФАМИ Γ_2 И Γ_3

И.Н. БЕЛОУСОВ, А.А. МАХНЕВ, М.С. НИРОВА

Abstract. Let Γ be a distance-regular graph of diameter 3 with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3. Then Γ has intersection array $\{t(c_2+1)+a_3, tc_2, a_3+1; 1, c_2, t(c_2+1)\}$ (Nirova M.S.) If Γ is Q-polynomial then either $a_3 = 0, t = 1$ and Γ is Taylor graph or $(c_2+1) = a_3(a_3+1)/(t^2 - a_3 - 1)$. We found 4 infinite series feasible intersection arrays in this situation.

Keywords: distance-regular graph, Q-polynomial graph.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{2, 3, ..., d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В

Belousov, I.N., Makhnev, A.A., Nirova, M.S., On Q-polynomial distance-regular graphs Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3.

© 2019 Белоусов И.Н., Махнев А.А., Нирова М.С.

Поступила 17 июля 2019 г., опубликована 7 октября 2019 г.

дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x,y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ [1].

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e-кодом, если минимальное расстояний между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $|C| \le k_d/\sum_{i=0}^{e} p^d_{id}+1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности.

Пусть для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Такие графы изучались в [2].

Предложение 1. *Пусть Γ является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра 3. Если графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны, то Γ имеет массив пересечений $\{t(c_2+1)+a_3, tc_2, a_3+1; 1, c_2, t(c_2+1)\}$, $a_2=(t-1)(c_2+1)$, $a_1=a_3+t-1$, $k_2=kt$, $k_3=k(a_3+1)/(c_2+1)$, $p^1_{33}=a_3(a_3+1)/(c_2+1)=\mu(\Gamma_3)$ и граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{t(c_2+1)}(t(c_2+1)+a_3,t)$.*

Положим $a=a_3$. Скажем, что Γ — граф типа (1), если c_2+1 делит a, — граф типа (2), если c_2+1 делит $a+1$, — граф типа (3), если c_2+1 не делит a и не делит $a+1$. Приведем список графов из [1].

1. $\{19,12,5;1,4,15\}$, граф типа (2) не существует по [3].

2. $\{35,24,8;1,6,28\}$, граф типа (1), Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(5,7)$, $\bar\Gamma_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(5,14)$, граф не существует по [4].

3. $\{39,30,4;1,5,36\}$, граф типа (3), Γ_3 – граф с параметрами (300,26,4,2), $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (300,65,10,15).

4. $\{44,30,5;1,3,40\}$, граф типа (1), Γ_3 – граф с параметрами (540,55,10,5), $\bar\Gamma_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(11,8)$.

5. $\{44,30,9;1,5,36\}$, граф типа (3), Γ_3 – граф с параметрами (375,66,9,12), $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (375,110,25,35) Граф не существует по [5].

6. $\{44,35,3;1,5,42\}$, граф типа (3), Γ_3 – граф с параметрами (375,22,5,1) не существует, $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (375,66,9,12).

7. $\{44,36,5;1,9,40\}$, граф типа (3), Γ_3 – граф с параметрами (243,22,1,2), $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (243,66,9,21).

8. $\{48,35,9;1,7,40\}$, граф типа (1), Γ_3 – псевдо $GQ(6,6)$, $\bar\Gamma_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(6,16)$.

9. $\{49,36,5;1,4,45\}$, граф типа (2), Γ_3 – граф с параметрами (540,49,8,4), $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (540,98,16,18).

10. $\{49,36,8;1,6,42\}$, граф типа (1), Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(7,7)$, $\bar\Gamma_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(7,14)$.

11. $\{54,40,7;1,5,48\}$, граф типа (1), Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(9,6)$, $\bar\Gamma_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(9,12)$.

12. $\{55,36,11;1,4,45\}$, граф типа (1), Γ_3 – псевдогеометрический граф для $pG_2(11,10)$, $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (672,176,40,48).

13. $\{56,36,9;1,3,48\}$, граф типа (1), Γ_3 – псевдогеометрический граф для $pG_2(14,8)$, $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (855,182,37,39).

14. $\{63,48,10;1,8,54\}$, граф типа (1), Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(7,9)$, $\bar\Gamma_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(7,18)$.

15. $\{65,44,11;1,4,55\}$, граф типа (1), Γ_3 – псевдогеометрический граф для $pG_2(13,10)$, $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (924,208,42,48).

16. $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, граф типа (3), Q-полиномиальный, Γ_3 – граф с параметрами (392,46,0,6), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (392,115,18,40).

17. $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$, граф типа (3), Q-полиномиальный, Γ_3 – граф с параметрами (630,111,12,21), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (630,185,40,60).

18. $\{74, 55, 9; 1, 5, 66\}$, граф типа (3), Γ_3 – граф с параметрами (1000,111,14,12), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (1000,185,30,35).

19. $\{74, 63, 5; 1, 9, 70\}$, граф типа (3), Γ_3 – граф с параметрами (630,37,4,2), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (630,111,12,21).

20. $\{77, 60, 13; 1, 12, 65\}$, граф типа (2), Q-полиномиальный, Γ_3 – граф с параметрами (540,77,4,12), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (540,154,28,50), граф не существует по [3].

21. $\{80, 63, 11; 1, 9, 70\}$, граф типа (1), Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(8, 10)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(8, 20)$.

22. $\{87, 66, 16; 1, 11, 72\}$, граф типа (3), Q-полиномиальный, Γ_3 – граф с параметрами (726,116,10,20), $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(8, 20)$.

23. $\{90, 78, 7; 1, 13, 84\}$, граф типа (3), Γ_3 – граф с параметрами (676,45,2,3), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (676,135,14,30).

24. $\{99, 80, 12; 1, 10, 88\}$, граф типа (1), Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(9, 11)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(9, 22)$.

25. $\{119, 96, 18; 1, 16, 102\}$, граф типа (1), Q-полиномиальный, граф Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(7, 17)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(7, 34)$, граф не существует по [4].

26. $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$, граф типа (3), Q-полиномиальный, Γ_3 – граф с параметрами (800,85,0,10), $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами (800,204,28,60).

В [6] доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$ и $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ не существуют.

С помощью [7] получен следующий результат.

Предложение 2. *Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$ является Q-полиномиальным тогда и только тогда, когда $(t^2 - a - 1)c_2 = (a^2 - t^2 + 2a + 1)$ и либо $a = 0, t = 1$ и Γ – граф Тэйлора без треугольников (дополнение $2 \times (c_2 + 2)$-решётки), либо $(c_2 + 1) = a_3(a_3 + 1)/(t^2 - a_3 - 1)$.*

Теорема 1. *Для примитивного Q-полиномиального дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$ выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Γ – граф типа (I), $a = w(c_2 + 1)$ и $t^2 = wc_2(w + 1) + (w + 1)^2$, либо*

(i) $w + 1 = s^2$, $t^2 = s^2((s^2 - 1)c_2 + s^2)$, $(s^2 - 1)c_2 + s^2$ является квадратом некоторого целого числа u, $c_2 = (u^2 - s^2)/(s^2 - 1)$, $t = su$, $a = u^2 - 1$ и Γ имеет массив пересечений

$$\{\frac{(s^2 + su - 1)(u^2 - 1)}{s^2 - 1}, \frac{(u^2 - s^2)su}{s^2 - 1}, u^2; 1, \frac{u^2 - s^2}{s^2 - 1}, su^3 - su/s^2 - 1\},$$

либо

(ii) $c_2 = s(w + 1)$, $t^2 = (w + 1)^2(ws + 1)$, $ws + 1$ является квадратом некоторого целого числа u, $c_2 = (w+1)(u^2-1)/w$, $t = (w+1)u$, $a = u^2w+u^2-1$

и Γ *имеет массив пересечений*

$$\{\frac{(u^2w+u^2-1)(uw+u+w)}{w}, \frac{(u^2-1)u(w+1)^2}{w}, u^2(w+1); 1, \frac{(w+1)(u^2-1)}{w},$$
$$\frac{(u^2w+u^2-1)u(w+1)}{w}\};$$

(2) Γ – *граф типа* (II), $a+1=w(c_2+1)$ *и* $t^2=w(w(c_2+1)+c_2)$, *либо*

(i) $w=s^2$, $t^2=s^2(s^2(c_2+1)+c_2)$, $(s^2(c_2+1)+c_2$ *является квадратом некоторого целого числа* u, $c_2=(u^2-s^2)/(s^2+1)$, $t=su$, $a=(u^2s^2-1)/(s^2+1)$ *и* Γ *имеет массив пересечений*

$$\{\frac{u^3s+u^2s^2+us-1}{s^2+1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2+1}, \frac{(u^2+1)s^2}{s^2+1}; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2+1}, \frac{(u^2+1)su}{s^2+1}\},$$

либо

(ii) $c_2=sw$, $t^2=w^2(sw+1+s)$, $sw+1+s$ *является квадратом некоторого целого числа* u, $c_2=(u^2-1)w/(w+1)$, $t=uw$, $a=(u^2w^2-1)/(w+1)$ *и* Γ *имеет массив пересечений*

$$\{\frac{u^3w^2+u^2w^2+uw-1}{w+1}, \frac{(u^2-1)uw^2}{w+1}, \frac{(u^2w+1)w}{w+1}; 1, \frac{(u^2-1)w}{w+1}, \frac{(u^2w+1)uw}{w+1)}\};$$

(3) Γ – *граф типа* (III).

1. Доказательство предложения 2

Рассмотрим произвольный дистанционно регулярный граф Γ диаметра d с собственными значениями $\theta_0>\theta_1>\cdots>\theta_d$ и второй матрицей собственных значений $Q=(Q_{ij})_{i,j=0}^d$. По [7, теорема 3.3] граф Γ является Q-полиномиальным тогда и только тогда, когда $Q_{0j}\neq Q_{2j}$, $Q_{0j}\neq Q_{3j}$ и выполняется равенство

$$\begin{aligned} c_3\left(Q_{2j}-Q_{3j}-\frac{(Q_{1j}-Q_{2j})^2}{Q_{0j}-Q_{3,j}}\right)+b_2\left(Q_{2j}-Q_{2j}-\frac{(Q_{1j}-Q_{3j})^2}{Q_{0j}-Q_{2j}}\right)& \\ =(b_0-\theta_j)(Q_{1j}-Q_{3j})-(\theta_j+1)(Q_{0j}-Q_{2j})& \end{aligned} \tag{1}$$

для некоторого $j\in\{1,2,3\}$

Пусть дистанционно регулярный граф Γ имеет массив пересечений $\{t(c_2+1)+a, tc_2, a+1; 1, c_2, t(c_2+1)\}$, где $a=a_3$. Выясним в каком случае он является Q-полиномиальным.

Собственные значения графа Γ следующие:

$\theta_0=c_2t+a+t$, $\theta_1=a+t$, $\theta_2=-1$, $\theta_3=-c_2-1$.

Матрица Q графа Γ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{(c_2t+a+c_2+t+1)(c_2t+a+t+1)(c_2t+a+t)}{(a+c_2+t+1)(a+t+1)(c_2+1)} \\ 1 & \frac{(c_2t+a+c_2+t+1)(c_2t+a+t+1)(a+t)}{(a+c_2+t+1)(a+t+1)(c_2+1)} \\ 1 & -\frac{(c_2t+a+c_2+t+1)(c_2t+a+t+1)}{(a+c_2+t+1)(a+t+1)(c_2+1)} \\ 1 & -\frac{(c_2t+a+c_2+t+1)(c_2t+a+t+1)}{(a+c_2+t+1)(a+t+1)} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rr}
\dfrac{(c_2t+a+c_2+t+1)(c_2t+a+t)(a+1)}{(a+t+1)(c_2+1)} & \dfrac{(c_2t+a+t+1)(c_2t+a+t)t}{(a+c_2+t+1)(c_2+1)} \\
-\dfrac{(c_2t+a+c_2+t+1)(a+1)}{(a+t+1)(c_2+1)} & -\dfrac{(c_2t+a+t+1)t}{a+c_2+t+1} \\
-\dfrac{(c_2t+a+c_2+t+1)(a+1)}{(a+t+1)(c_2+1)} & \dfrac{(c_2t+a+t+1)(a+c_2+1)}{(a+c_2+t+1)(c_2+1)} \\
\dfrac{(c_2t+a+c_2+t+1)t}{(a+t+1)} & -\dfrac{(c_2t+a+t+1)t}{(a+c_2+t+1)}
\end{array}\right)$$

Решим уравнение (1) для всех $j \in \{1,2,3\}$.

Пусть $j=1$. Тогда левая часть уравнения (1) равна
$(c_2^4t^3 - a^2c_2^2t^2 + 2ac_2^3t^2 + c_2^4t^2 - 2ac_2^2t^3 + 3c_2^3t^3 - c_2^2t^4 - 2a^3c_2t - a^2c_2^2t - 6a^2c_2t^2 + 4c_2^3t^2 - 6ac_2t^3 + c_2^2t^3 - 2c_2t^4 - a^4 - 3a^3c_2 - 3a^2c_2^2 - ac_2^3 - 4a^3t - 11a^2c_2t - 4ac_2^2t - 6a^2t^2 - 13ac_2t^2 + 2c_2^2t^2 - 4at^3 - 5c_2t^3 - t^4 - 4a^3 - 9a^2c_2 - 6ac_2^2 - c_2^3 - 12a^2t - 16ac_2t - 3c_2^2t - 12at^2 - 7c_2t^2 - 4t^3 - 6a^2 - 9ac_2 - 3c_2^2 - 12at - 7c_2t - 6t^2 - 4a - 3c_2 - 4t - 1)/((a+c_2+t+1)(a+t+1)(c_2+1))$,
а правая
$(c_2^2t - a^2 - 2at - t^2 - 2a - 2t - 1)(c_2t+a+c_2+t+1)(c_2t+a+t+1)/((a+c_2+t+1)(a+t+1)(c_2+1))$.

Решая уравнение(1) относительно c_2 имеем следующие решения
$c_2 = (a^2 - t^2 + 2a + 1)/(t^2 - a - 1)$, $c_2 = -2(a+t+1)/(t+1)$ или $c_2 = 0$.

Поэтому Γ является Q-полиномиальным относительно идемпотента E_1 только в случае $(t^2 - a - 1)c_2 = (a^2 - t^2 + 2a + 1)$.

Пусть $j=2$. Тогда левая часть уравнения 1 равна
$-(c_2t+a+c_2+t+1)(c_2t+a+t+1)(c_2t+t+1)/((a+t+1)(c_2+1))$,
а правая
$-(c_2t+a+c_2+t+1)(c_2t+a+t+1)^2/((a+t+1)(c_2+1))$.

Решая уравнение (1) относительно c_2 имеем следующие решения
$c_2 = -(a+t+1)/(t+1)$ или $c_2 = -(a+t+1)/t$.

Поэтому Γ не является Q-полиномиальным относительно идемпотента E_2.

Пусть $j=3$. Тогда левая часть уравнения (1) равна
$(c_2t+a+c_2+t+1)(c_2t+a+t+1)(t-1)/(a+c_2+t+1)$,
а правая
$(c_2t+a+c_2+t+1)(c_2t+a+t+1)c_2(t-1)/((a+c_2+t+1)(c_2+1))$.

Решая уравнение (1) относительно t имеем следующие решения
$t = -(a+c_2+1)/(c_2+1)$, $t = -(a+1)/(c_2+1)$, $t = 1$.

Поэтому Γ может являться Q-полиномиальным относительно идемпотента E_3 только в случае $t=1$. Но при $t=1$ имеем $Q_{03} = Q_{23}$ и Γ не является Q-полиномиальным относительно идемпотента E_3.

Предложение 2 доказано.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть Γ — Q-полиномиальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t(c_2+1)+a, tc_2, a+1; 1, c_2, t(c_2+1)\}$ с $t \neq 1$. Тогда $t^2-a-1 \neq 0$ и $c_2 = (a^2-t^2+2a+1)/(t^2-a-1)$. Далее, $c_2+1 = \dfrac{a^2-t^2+2a+1}{t^2-a-1}+1 = \dfrac{a(a+1)}{t^2-a-1}$ и c_2+1 делит $a(a+1)$.

Пусть Γ – граф типа (I). Тогда $a = w(c_2+1)$ и $t^2 = wc_2(w+1)+(w+1)^2$. Имеем два случая

(Ii) $w+1$ — квадрат целого числа,

(Iii) $w+1$ не является квадратом целого числа.

Случай (Ii). Пусть $w+1 = s^2$. Тогда $t^2 = (s^2-1)c_2s^2+s^4 = s^2((s^2-1)c_2+s^2)$ и $(s^2-1)c_2+s^2$ является квадратом некоторого целого числа u. Далее, $c_2 = (u^2-s^2)/(s^2-1)$, $t = su$, $a = u^2-1$ и массив пересечений графа Γ имеет вид

$$\{\frac{(s^2+su-1)(u^2-1)}{s^2-1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2-1}, u^2; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2-1}, su^3-su/s^2-1\}.$$

Случай (Iii). Имеем, $t^2 = (w+1)^2(wc_2/(w+1)+1)$ и $w+1$ делит c_2. Пусть $c_2 = s(w+1)$. Тогда $t^2 = (w+1)^2(ws+1)$ и $ws+1$ является квадратом некоторого целого числа u. Далее, $c_2 = (w+1)(u^2-1)/w$, $t = (w+1)u$, $a = u^2w+u^2-1$ и массив пересечений графа Γ имеет вид

$$\{\frac{(u^2w+u^2-1)(uw+u+w)}{w}, \frac{(u^2-1)u(w+1)^2}{w}, u^2(w+1); 1, \frac{(w+1)(u^2-1)}{w},$$
$$\frac{u^2-s^2}{s^2+1}, \frac{(u^2+1)su}{s^2+1}\}.$$

Пусть Γ – граф типа (II). Тогда $a+1 = w(c_2+1)$ и $t^2 = w(w(c_2+1)+c_2)$. Имеем два случая

(IIi) w — квадрат целого числа,

(IIii) w не является квадратом целого числа.

Случай (IIi). Пусть $w = s^2$. Тогда $t^2 = s^2(s^2(c_2+1)+c_2)$ и $(s^2(c_2+1)+c_2$ является квадратом некоторого целого числа u. Далее, $c_2 = (u^2-s^2)/(s^2+1)$, $t = su$, $a = (u^2s^2-1)/(s^2+1)$ и массив пересечений графа Γ имеет вид

$$\{\frac{u^3s+u^2s^2+us-1}{s^2+1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2+1}, \frac{(u^2+1)s^2}{s^2+1}; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2+1}, \frac{(u^2+1)su}{s^2+1}\}.$$

Случай (IIii). Имеем, $t^2 = w^2(c_2+1+c_2/w)$ и w делит c_2. Пусть $c_2 = sw$. Тогда $t^2 = w^2(sw+1+s)$ и $sw+1+s$ является квадратом некоторого целого числа u. Далее, $c_2 = (u^2-1)w/(w+1)$, $t = uw$, $a = (u^2w^2-1)/(w+1)$ и массив пересечений графа Γ имеет вид

$$\{\frac{u^3w^2+u^2w^2+uw-1}{w+1}, \frac{(u^2-1)uw^2}{w+1}, \frac{(u^2w+1)w}{w+1}; 1, \frac{(u^2-1)w}{w+1}, \frac{(u^2w+1)uw}{w+1)}\}.$$

Теорема 1 доказана.

3. Графы типа (I) и (II)

Граф Γ типа (Ii) имеет массив пересечений

$$\{\frac{(s^2+su-1)(u^2-1)}{s^2-1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2-1}, u^2; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2-1}, su^3-su/s^2-1\},$$

s^2-1 делит u^2-s^2.

В этом случае кратность собственного значения θ_{i-1} совпадает с $k_i = |\Gamma_i(a)|$.

Перечислим наименьшие возможные параметры массивов пересечений в этом случае:

$\{55, 32, 16; 1, 4, 40\}$ $(s = 2, u = 4)$,

$\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ $(s = 2, u = 5)$,

$\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ $(s = 2, u = 7)$,

$\{399, 320, 64; 1, 20, 336\}$ $(s = 2, u = 8)$.

Лемма 1. *В серии $u = s^2$ графов нет.*

Доказательство. Если $u = s^2$, то граф имеет массив пересечений $\{(s^3 + s^2 - 1)(s^2 + 1), s^5, s^4; 1, s^2, s^3(s^2 + 1)\}$.

Но по [5, теорема 4] имеем $c_2 - 1 \geq \dfrac{\alpha(a_1 + 1) - k}{\binom{\alpha}{2}}$, где $\alpha = \left\lceil \dfrac{k}{a_1 + 1} \right\rceil$, и $s \leq 1$, противоречие. □

Граф Γ типа (Iii) имеет массив пересечений

$$\{\frac{(u^2w + u^2 - 1)(uw + u + w)}{w}, \frac{(u^2 - 1)u(w + 1)^2}{w}, u^2(w + 1); 1, \frac{(w + 1)(u^2 - 1)}{w},$$

$$\frac{(u^2w + u^2 - 1)u(w + 1)}{w}\},\ w \text{ делит } u^2 - 1.$$

При $w = 1$ получим массив пересечений $\{(2u^2 - 1)(2u + 1), 4(u^2 - 1)u, 2u^2; 1, 2(u^2 - 1), 2(2u^2 - 1)u\}$ и по теореме 3 из [4] граф с таким массивом пересечений не существует.

При $w = 2, u = 3$ получим массив пересечений $\{143, 108, 27; 1, 12, 117\}$.

Массив пересечений графа Γ типа (IIi) имеет вид

$$\{\frac{u^3s + u^2s^2 + us - 1}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 - s^2)su}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 + 1)s^2}{s^2 + 1}; 1, \frac{u^2 - s^2}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 + 1)su}{s^2 + 1}\},$$

$s^2 + 1$ делит $u^2 - s^2$.

При $s = 1$ получим массив $\{(u^3 + u^2 + u - 1)/2, (u^2 - 1)u/2, (u^2 + 1)/2; 1, (u^2 - 1)/2, (u^2 + 1)u/2)\}$. Перечислим наименьшие возможные параметры массивов пересечений в этом случае: $\{19, 12, 5; 1, 4, 15\}$ (граф не существует по [3]), $\{77, 60, 13; 1, 12, 65\}$ $(u = 5)$.

При $s = 2$ получим массив $\{(2u^3 + 4u^2 + 2u - 1)/5, (u^2 - 4)2u/5, 4(u^2 + 1)/5; 1, (u^2 - 4)/5, (u^2 + 1)2u/5\}$. В случае $u = 7$ возникает массив пересечений $\{179, 126, 40; 1, 9, 140\}$.

Массив пересечений графа Γ типа (IIIi) имеет вид

$$\{\frac{u^3w^2 + u^2w^2 + uw - 1}{w + 1}, \frac{(u^2 - 1)uw^2}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)w}{w + 1}; 1, \frac{(u^2 - 1)w}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)uw}{w + 1)}\},$$

$w + 1$ делит $u^2 - 1$.

В этом случае интересные серии возникают при:

(a) $w = s - 3$, $w - 2 = u$,
(b) $w = s + 1$, $w = u$,
(c) $w = 4s + 3$, $(w - 1)/2 = u$,
(d) $w = 4s - 5$, $(w + 3)/2 = u$,
(e) $s = 4w$, $2w + 1 = u$,
(f) $s = 4w + 8$, $2w + 3 = u$.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989. Zbl 0747.05073

[2] M.S. Nirova, *On distance-regular graphs* Γ *with strongly regular graphs* Γ_2 *and* Γ_3, Sib. electron. math. reports, **15** (2018), 175–185.

[3] K. Coolsaet, A. Jurishich, *Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs*, J. Comb. Theory, Series A, **115**:6 (2008), 1086–1095. Zbl 1182.05132

[4] A. Jurishich, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr., **65**:1–2 (2012), 29–47. Zbl 1245.05036

[5] J.H. Koolen, J. Park, *Shilla distance-regular graphs*, Europ. J. Comb., **31**:8 (2010), 2064–2073. Zbl 1221.05117

[6] A.A. Makhnev, M.M. Isakova, M.S. Nirova, *Distance-regular graphs with intersection arrays* $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$ *and* $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ *do not exist*, Sib. electron. math. reports , **16** (2019), 1254–1259.

[7] P. Terwilliger, *A new unequality for distance-regular graphs*, Discrete Math., **137**:1–3 (1995), 319–332. Zbl 0814.05074

Ivan Nikolaevich Belousov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16, S.Kovalevskaya str.,
Yekaterinburg, 620990, Russia
E-mail address: i_belousov@mail.ru

Aleksandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16, S.Kovalevskaya str.,
Yekaterinburg, 620990, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Marina Sefovna Nirova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
175, Chernyshevsky str.,
Nalchik, 360004, Russia
E-mail address: nirova_m@mail.ru