

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1437–1448 (2019)

УДК 517.957

DOI 10.33048/semi.2019.16.099

MSC 35K51

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕНОРМАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОПИСЫВАЮЩИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭПИДЕМИЙ

Э.Р. АНДРИЯНОВА

ABSTRACT. In this paper we study the existence of nonnegative renormalized solutions for a class of nonlinear parabolic systems. Such systems describes the spread of epidemic disease from affected to unaffected individuals by contact infection.

Keywords: nonlinear parabolic systems, renormalized solutions.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была рассмотрена система

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - d_1 \Delta u_1 - \operatorname{div}((k_1 u_1 + \delta_{1,2} u_2 + \delta_{1,3} u_3) \nabla u_1 + \\ \delta'_{1,2} u_1 \nabla u_2 + \delta'_{1,3} u_1 \nabla u_3) = -\sigma(u_1, u_2, u_3) - \mu_1 u_1, \\ \partial_t u_2 - d_2 \Delta u_2 - \operatorname{div}((\delta_{2,1} u_1 + k_2 u_2 + \delta_{2,3} u_3) \nabla u_2 + \\ \delta'_{2,1} u_2 \nabla u_1 + \delta'_{2,3} u_2 \nabla u_3) = \sigma(u_1, u_2, u_3) - \rho u_2 - \mu_2 u_2, \\ \partial_t u_3 - d_3 \Delta u_3 - \operatorname{div}((\delta_{3,1} u_1 + \delta_{3,2} u_2 + k_3 u_3) \nabla u_3 + \\ \delta'_{3,1} u_3 \nabla u_1 + \delta'_{3,2} u_3 \nabla u_2) = \rho u_2 - \mu_3 u_3. \end{cases}$$

Эта система и близкие к ней рассматривались многими авторами [2], [3] в качестве модели распространения эпидемии болезни в популяции организмов. Здесь u_1 описывает плотность еще не зараженных организмов, u_2 - плотность инфицированных и u_3 плотность выздоровевших организмов (т.е. приобретших иммунитет к болезни).

ANDRIYANOVA, E.R., EXISTENCE OF RENORMALIZED SOLUTIONS FOR NONLINEAR PARABOLIC SYSTEMS DESCRIBING THE SPREAD OF EPIDEMICS.

© 2019 Андриянова Э.Р.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-01-00428).

Поступила 21 июня 2019 г., опубликована 17 октября 2019 г.

В [1] доказано существование слабого решения смешанной задачи для этой системы с условиями "непротекания" на границе.

В работе [4] была неудачная попытка построения ренормализованных решений приведенной выше системы. Уже само определение ренормализованного решения в этой работе некорректно. Например, слагаемые вида $S''(u_1)u_1 \nabla u_1 \nabla u_2$, входящие в формулу (1.2) этого определения, вообще говоря, не являются распределениями, и сама формула лишена смысла.

В настоящей работе построены ренормализованные решения для систем уравнений при выполнении ряда жестких ограничений. В частности, коэффициенты $\delta'_{i,j}$ выбраны равными нулю.

Пусть $D^T = (0, T) \times \Omega$, Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^n . В настоящей работе рассматривается система уравнений

$$(1) \quad \partial_t u_i - \operatorname{div}(Q(u) \nabla u_i) = l_i(t, x, u), \quad i = 1, 2, 3, \quad (t, x) \in D^T,$$

где

$$\begin{aligned} l_1 &= -\sigma(u) - \mu_1 u_1 + f_1(t, x), \\ l_2 &= \sigma(u) - \rho u_2 - \mu_2 u_2 + f_2(t, x), \\ l_3 &= \rho u_2 - \mu_3 u_3 + f_3(t, x), \end{aligned}$$

и функция $Q(u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет неравенству

$$(2) \quad 1 \leq Q(u) \leq C.$$

Здесь $\mu_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, обозначает уровень смертности в классе не зараженных организмов, инфицированных и выздоровевших организмов соответственно, $1/\rho > 0$ - продолжительность болезни или продолжительность латентного периода болезни. Функцию заболеваемости, σ , обеспечивающую переход организмов из класса еще не зараженных организмов в класс инфицированных, запишем в виде

$$\sigma(u) = \frac{\sigma_1 u_1 u_2}{u_1 + u_2 + u_3}, \quad \sigma_1 > 0.$$

Обозначим $v_1 = u_1$, $v_2 = u_1 + u_2$, $v_3 = u_1 + u_2 + u_3$. Тогда система (1) примет вид

$$(3) \quad \partial_t v_i - \operatorname{div}(Q(u) \nabla v_i) = \tilde{l}_i(t, x, u), \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1 &= l_1, \quad \tilde{l}_2 = -\mu_1 u_1 - (\rho + \mu_2) u_2 + f_1 + f_2, \\ \tilde{l}_3 &= -\mu_1 u_1 - \mu_2 u_2 - \mu_3 u_3 + f_1 + f_2 + f_3. \end{aligned}$$

При $u_i \geq 0$ очевидно неравенство

$$(4) \quad \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3 \leq C v_3.$$

Аналогично,

$$\mu_1 u_1 = \mu_1 v_1, \quad \mu_1 u_1 + (\rho + \mu_2) u_2 \leq C v_2$$

Будем предполагать

$$(5) \quad f_i \in L_1(D^T), \quad f_i \leq 0.$$

По нашему мнению, использование двух взаимосвязанных векторов u, v в одной системе (3) не должно привести к затруднениям при чтении работы.

Обзор работ, посвященных ренормализованным решениям параболических уравнений, можно найти в [5]. Обзор работ, посвященных исследованию моделей распространения эпидемии болезней, имеется в [1].

2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Введем следующие обозначения

$$\langle f(t) \rangle = \int_{\Omega} f(t, x) dx, \quad [f] = \int_{D^T} f(t, x) dx dt, \quad f(\varphi) = (f, \varphi)_{\Omega}.$$

В последнем равенстве записано значение обобщенной функции f на элементе φ .

Будем рассматривать систему (1) с краевыми условиями

$$(6) \quad \nabla u_i \cdot N = 0,$$

и начальными функциями

$$(7) \quad u_i(0, x) = u_{0i}(x) \geq 0, \quad u_{0,i}(x) \in L_1(\Omega).$$

Все постоянные в работе неотрицательны.

Пространство $W_2^1(\Omega)$ определяется как пополнение пространства $C^1(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} = \|\varphi\|_{2,\Omega} + \|\nabla\varphi\|_{2,\Omega}.$$

Пространство $W_2^{0,1}(D^T)$ определяется как пополнение пространства $C^1(\bar{D}^T)$ по норме

$$\|\varphi\|_{W_2^{0,1}(D^T)} = \|\varphi\|_{2,D^T} + \|\nabla\varphi\|_{2,D^T}.$$

Через $Lip_0(Q)$ обозначим пространство липшицевых функций с компактным носителем, лежащим в Q .

Определим функцию

$$T_k(v) = \begin{cases} k & \text{при } v > k, \\ v & \text{при } |v| \leq k, \\ -k & \text{при } v < -k. \end{cases}$$

Определение 1. Ренормализованным решением задачи (1), (6), (7) называется тройка (u_1, u_2, u_3) измеримых в D^T функций, удовлетворяющих условиям:

$$(8) \quad \begin{aligned} &u_1, u_2, u_3 \geq 0 \text{ при } (t, x) \in D^T; \\ &u_i \in L_{\infty}((0, T); L_1(\Omega)); \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} &T_k(v_i) \in W_2^{0,1}(D^T) \text{ при всех } k \geq 0; \\ &k^{-1}[Q(u)|\nabla T_k(v_i)|^2] \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

При всех $\xi(r) \in Lip_0(\mathbb{R})$ и $\varphi \in C^1(\bar{D}^T)$, $\varphi(T) = 0$ выполнено равенство

$$(10) \quad [\varphi_t \int_{v_{0i}}^{v_i} \xi(r) dr + \tilde{l}_i(t, x, u) \varphi \xi(v_i)] = [Q(u) \nabla v_i \cdot \nabla(\varphi \xi(v_i))], \quad i = 1, 2, 3.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2), (5). Тогда существует ренормализованное решение задачи (1), (6), (7).

3. СЛАБОЕ РЕШЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ.

Выберем последовательность $f_i^m \in C^1(\overline{D^T})$ так, чтобы $f_i^m \leq 0$, $f_i^m \rightarrow f_i$ в $L_1(D^T)$ при $m \rightarrow \infty$. Рассмотрим задачу

$$(11) \quad \partial_t u_i^m - \operatorname{div}(Q(u^m) \nabla u_i^m) = l_i^m(t, x, T_m(u^m)),$$

$$(12) \quad \nabla u_i^m \cdot N = 0,$$

$$(13) \quad u_i^m(0, x) = u_{0i}^m(x) = T_m(u_{0i}), \quad i = 1, 2, 3,$$

где функции l_i^m получены из l_i заменой f_i на f_i^m .

Определение 2. Слабым решением задачи (11)-(13) называется тройка (u_1^m, u_2^m, u_3^m) такая, что $u_1^m, u_2^m, u_3^m \geq 0$ при $(t, x) \in D^T$, $u_i^m \in W_2^{0,1}(D^T)$ и выполнены равенства

$$(14) \quad [(u_{0i}^m - u_i^m)\varphi_t + Q(u^m) \nabla u_i^m \cdot \nabla \varphi] = [l_i^m(t, x, T_m(u^m))\varphi], \quad i = 1, 2, 3,$$

при любой функции $\varphi \in C^1(\overline{D^T})$, $\varphi(T) = 0$.

Теорема 2. При описанных выше предположениях, слабое решение задачи (11)-(13) существует.

Доказательство теоремы 2 проводится так же, как в работе [1], с несущественными изменениями, поэтому здесь не приводится.

4. ПОСТРОЕНИЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ.

Из (14) следует, что $(u_i^m)_t \in X' + L_1(D^T)$, где $X' = (W_2^{0,1}(D^T))'$ – сопряженное пространство.

Лемма 1. Пусть $u \in L_1(D^T)$, $u_0 \in L_1(\Omega)$, $w \in X' + L_1(D^T)$ и

$$\int_{D^T} \varphi_t(u - u_0) dx dt + (w, \varphi)_{D^T} = 0,$$

при всех $\varphi \in C_0^1((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(15) \quad -(u_t, \xi(u)\varphi)_{D^T} = \int_{D^T} \varphi_t \int_{u_0}^u \xi(r) dr dx dt,$$

при всех ограниченных $\xi(r)$, монотонных и липшицевых по r , таких, что $\xi(u) \in W_2^{0,1}(D^T)$ и $\varphi \in C_0^\infty((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$ (либо $\xi \in \operatorname{Lip}_0(\mathbb{R})$).

Доказательство леммы можно найти в работе [6], лемма 4.1. Более ранние версии этой леммы "об интегрировании по частям" можно найти в работах [7], [8]. Пользуясь леммой, устанавливаем, что тройка (u_1^m, u_2^m, u_3^m) является ренормализованным решением задачи (11)-(13):

$$(16) \quad [\varphi_t \int_{v_{0i}^m}^{v_i^m} \xi(r) dr + \tilde{l}_i^m(t, x, T_m(u^m))\varphi \xi(v_i^m)] = [Q(u^m) \nabla v_i^m \cdot \nabla (\varphi \xi(v_i^m))].$$

При этом класс пробных функций, описанный в лемме 1, фактически шире, чем в Определении 1, поскольку любая функция $\varphi \in C^1(\overline{D^T})$, $\varphi(T) = 0$ является пределом последовательности функций $\varphi_k \in C_0^\infty((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$ (по соответствующей норме).

4.1. **Доказательство теоремы 1.** Для доказательства теоремы покажем, что предел решений аппроксимационной задачи (11)-(13) является ренормализованным решением задачи (1), (6), (7). А именно, покажем, что предельный переход в (16) приводит к (10) и для предельной тройки функций (u_1, u_2, u_3) выполнено (8) и (9). Разделим доказательство на четыре шага.

В первом шаге установим вспомогательные оценки для функций u_1^m, u_2^m, u_3^m , которые будут использоваться в последующих этапах доказательства.

Во втором шаге докажем сходимость $u_i^m \rightarrow u_i$ почти всюду в D^T , необходимую для предельного перехода в (16), а также соотношение (8).

В третьем шаге покажем предельный переход в правой части уравнения (16), то есть

$$[Q(u^m)\nabla v_i^m \cdot \nabla(\varphi\xi(v_i^m))] \rightarrow [Q(u)\nabla v_i \cdot \nabla(\varphi\xi(v_i))] \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Наконец, в последнем шаге завершим доказательство теоремы предельным переходом в (16).

Шаг 1. Установим следующие оценки для решения задачи (11)-(13):

$$(17) \quad [Q(u^m)|\nabla T_k(v_i^m)|^2] \leq kw(k);$$

$$(18) \quad -[\tilde{l}_i^m(t, x, T_m(u_m))T_k(v_i^m)] \leq kw(k);$$

$$(19) \quad \|T_k(v_i^m)\|_{W_2^{0,1}(D^T)} \leq C_1(k)w(k);$$

$$(20) \quad \langle B_k(v_i^m(t)) \rangle \leq kw(k), \quad \forall t \in (0, T), \quad i = 1, 2, 3,$$

где $B_k(r) = \int_0^r T_k(s)ds$ и $w(k)$ будет обозначать произвольную неотрицательную функцию с нулевым пределом $\lim_{k \rightarrow \infty} w(k) = 0$.

Отметим, что (19) есть следствие (17), (20) и (2). Действительно, $B_k(r) = r^2/2$ при $|r| < k$, поэтому

$$(21) \quad T_k(v_i^m) \in C([0, T]; L_2(\Omega)) \text{ и } \langle T_k(v_i^m(\tau))^2 \rangle \leq kw(k).$$

Заметим также, что

$$(22) \quad [\chi(|v_i^m| \geq k) \leq k^{-2}[(T_k(v_i^m))^2] \leq Tk^{-1}w(k).$$

Для доказательства оценок (17), (18) и (20) подставим в (16) $\varphi = \alpha(t)$ и $\xi(r) = T_k(r)$. Получим

$$(23) \quad [\alpha' \int_{v_{0i}^m}^{v_i^m} T_k(r)dr + \alpha \tilde{l}_i^m(t, x, T_m(u_m))T_k(v_i^m)] = [Q(u^m)\nabla v_i^m \cdot \nabla(\alpha T_k(v_i^m))].$$

Из этой формулы, в частности, следует, что функция $\langle B_k(v_i^m(t)) \rangle$ абсолютно непрерывна по $t \in (0, T)$. Подставляя в (23) $\alpha = \alpha_h = \chi(h < t < \tau - h)_h$ (индекс h обозначает осреднение Стеклова), после предельного перехода $h \rightarrow 0$ будем иметь

$$(24) \quad \langle B_k(v_i^m(\tau)) - B_k(v_{0i}^m) \rangle + [\chi(t < \tau)Q(u^m)\nabla v_i^m \cdot \nabla T_k(v_i^m) = \\ = [\chi(t < \tau)T_k(v_i^m)\tilde{l}_i^m(t, x, T_m(u_m))].$$

Из (13) очевидно неравенство $\langle B_k(v_{0i}^m) \rangle \leq \langle B_k(v_{0i}) \rangle$. Действительно, пусть, например, $i = 2$ (случаи $i = 1, 3$ аналогичны). Имеем

$$v_{02}^m = u_{01}^m + u_{02}^m \leq u_{01} + u_{02} = v_{02}.$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(s)/k = 0$ при всех $s \in \mathbb{R}$, то по теореме Лебега

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \langle B_k(v_{0i}^m) \rangle k^{-1} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \langle B_k(v_{0i}) \rangle k^{-1} = 0.$$

Следовательно, $\langle B_k(v_{0i}^m) \rangle \leq kw(k)$.

Поскольку $\tilde{l}_i^m \leq 0$ и $Q(u^m) \geq 1$, то из (24) следует (17), (18) и (20).

Шаг 2. Установим следующие соотношения:

$$(25) \quad v_i^m \rightarrow v_i \text{ п.в. в } D^T, \quad m \rightarrow \infty$$

$$(26) \quad v_i \in L_\infty((0, T); L_1(\Omega))$$

Положим

$$\eta(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r > 1, \\ 1 - r & \text{при } 0 \leq r \leq 1, \\ 1 & \text{при } r < 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \eta_k(r) &= \eta(|r|/k - 1), \quad \eta_k(r) = 0 \text{ при } |r| > 2k, \\ \beta_k(r) &= \int_0^T \eta_k(s) ds, \quad \beta_k(T_{2k}(r)) = \beta_k(r), \\ \beta_k(r) &= r \text{ при } |r| \leq k; \quad |\beta_k(r)| \leq |r|. \end{aligned}$$

Приведем здесь лемму из работы [8] в упрощенной формулировке. Пусть $B(r) = F'(r)r - F(r)$, где функция F , $F(0) = 0$, имеет непрерывную поизводную $F'(r)$, $F'(0) = 0$. В лемме использовано обозначение $f(\tau)|_t^{t+h} = f(t+h) - f(t)$.

Лемма 2. Пусть последовательность z^m ограничена в $L_1((0, T); W_1^1(\Omega))$, z^m сходится к z слабо в $L_2(D^T)$ и

$$(27) \quad \langle B(z^m(t)) \rangle \leq C, \quad t \in (0, T),$$

$$(28) \quad [\chi(t < T - h) F'(z^m(\tau))|_t^{t+h} z^m(\tau)|_t^{t+h}] \leq ch,$$

при $0 < h < \mu_0$, $m > 1/h$.

Тогда найдется последовательность z^{m_s} такая, что $z^{m_s} \rightarrow z$ в $L_1(D^T)$ при $s \rightarrow \infty$.

Замечание. В работе [8], лемма 1.9, последовательность z^m ограничена в $L_r((0, T); W_1^r(\Omega))$, $r > 1$. Фактически, проведенное доказательство пригодно и при $r = 1$. Это уже отмечалось в работе [9].

Для того, чтобы воспользоваться данной леммой докажем неравенства (27), (28) при $z^m = T_{2q}(v_i^m)$, $F'(r) = \beta_q(r)$.

Неравенство (27) легко вытекает из (21) и свойств функции β_q :

$$\begin{aligned} \langle B(z^m(t)) \rangle &= \langle \beta_q(T_{2q}(v_i^m)) T_{2q}(v_i^m) \rangle - \int_{\Omega} \int_0^{T_{2q}(v_i^m)} \beta_q(s) ds dx \\ &\leq 2 \langle T_{2q}(v_i^m(t))^2 \rangle \leq c(q). \end{aligned}$$

Для доказательства (28), запишем (16) при $\xi(r) = \eta_q(r)$:

$$(29) \quad \begin{aligned} [\varphi_t(\beta_q(v_i^m) - \beta_q(v_{0i}^m)) + \tilde{l}_i^m(t, x, T_m(u^m)) \varphi \eta_q(v_i^m)] &= \\ &= [Q(u^m) \nabla v_i^m \cdot \nabla (\varphi \eta_q(v_i^m))]. \end{aligned}$$

Подставляя в (29) $\varphi = \alpha(t)\gamma(x)$, $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, устанавливаем абсолютную непрерывность функции $\langle \beta_q(v_i^m(t))\gamma \rangle$ по $t \in (0, T)$. Выбирая последовательность $\alpha_s \rightarrow \chi(t < \tau < t + h)$ при $s \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} \langle \beta_q(v_i^m(\tau)) \rangle_t^{t+h} \gamma &= \int_t^{t+h} \langle (\beta_q(v_i^m(\tau)))'_t \gamma \rangle d\tau = \int_t^{t+h} \langle \tilde{l}_i^m(\tau, x, T_m(u^m)) \gamma \eta_q(v_i^m) \rangle d\tau - \\ (30) \quad &- \int_t^{t+h} \langle Q(u^m) \nabla v_i^m \cdot (\eta_q(v_i^m) \nabla \gamma + \gamma \nabla \eta_q(v_i^m)) \rangle d\tau = \\ &= h \langle A_h^m \gamma \rangle - h \langle B_h^m \cdot \nabla \gamma \rangle - h \langle C_h^m \gamma \rangle, \end{aligned}$$

где нижний индекс h обозначает осреднение Стеклова функций A^m, B^m, C^m . Подставим в (30) $\gamma = T_{2q}(v_i^m(\tau))|_t^{t+h}$. После интегрирования по $t \in (0, T - h)$ получим

$$\begin{aligned} (31) \quad \int_0^{T-h} \langle \beta_q(v_i^m) \rangle_t^{t+h} T_{2q}(v_i^m)|_t^{t+h} dt &= h \int_0^{T-h} \langle (A_h^m - C_h^m) T_{2q}(v_i^m) \rangle_t^{t+h} - \\ &- B_h^m \cdot \nabla T_{2q}(v_i^m)|_t^{t+h} dt \leq ch. \end{aligned}$$

Последнее неравенство в (31) устанавливается ниже. Имеем $|T_{2q}(r)| \leq 2q$ и с помощью (17) выводим неравенства

$$\int_0^{T-h} \langle C_h^m \rangle d\tau \leq \|C^m\| = \|Q(u^m) \nabla v_i^m \cdot \nabla \eta_q(v_i^m)\| \leq C.$$

Далее, в силу (2),

$$|B^m| = |Q(u^m) \eta_q(v_i^m) \nabla v_i^m| \leq C |\chi(v_i^m \leq 2q) \nabla v_i^m|.$$

Поэтому из (17) имеем

$$\int_0^{T-h} \langle |B_h^m(t) \cdot \nabla T_{2q}(v_i^m(t+h))| \rangle dt \leq C \|B^m\|_{L_2(D^T)} \|\nabla T_{2q}(v_i^m)\|_{L_2(D^T)} \leq c_1(q).$$

Оценивая аналогичным образом другие слагаемые, устанавливаем (31).

Таким образом, условия леммы выполнены, и мы можем применить лемму 2 к последовательности $z^m = T_{2q}(v_i^m)$, $F'(r) = \beta_q(r)$. Тогда $T_{2q}(v_i^m)$ почти всюду в D^T сходится при $m \rightarrow \infty$ к некоторой функции \bar{v}_i^q по некоторой подпоследовательности. Более того, подпоследовательность можно выбрать так, что эта сходимость будет при любом натуральном q . Тогда функции v_i^m сходятся почти всюду по этой подпоследовательности. Действительно, обозначим через $R(v_i^m)$ множество тех точек из D^T , в которых подпоследовательность v_i^m расходится. Покажем, что мера множества $R(v_i^m)$ равна нулю. Пользуясь (22), выберем число k так, чтобы $[\chi(|v_i^m| \geq k - 1)] \leq \varepsilon$ при всех m , и пусть $2q > k + 1$. По теореме Егорова найдется множество E , $\text{meas} E < \varepsilon$, такое, что на множестве $D^T \setminus E$ сходимость

$$T_{2q}(v_i^m) \rightarrow \bar{v}_i^q$$

равномерная при $m \rightarrow \infty$. Тогда найдется число m_0 такое, что

$$(32) \quad |T_{2q}(v_i^m) - \bar{v}_i^q| < \varepsilon, \quad (t, x) \in D^T \setminus E,$$

при всех $m > m_0$. Пусть $(t, x) \in R(v_i^m) \setminus E$. Покажем, что $\bar{v}_i^q(t, x) \geq k$. Пусть, напротив, $\bar{v}_i^q(t, x) < k$. Тогда из (32) имеем $|T_{2q}(v_i^m(t, x))| < k + \varepsilon < 2q$, и

тогда $T_{2q}(v_i^m(t, x)) = v_i^m(t, x) \rightarrow \bar{v}_i^q(t, x)$. Это противоречит выбору точки (t, x) . Поэтому из (32) находим, что $|T_{2q}(v_i^m(t, x))| > k - \varepsilon > k - 1$, $|v_i^m(t, x)| > k - 1$. В силу выбора $[\chi(|v_i^m| \geq k - 1)] \leq \varepsilon$, имеем $\text{meas}R(v_i^m) \setminus E < \varepsilon$. Отсюда следует, что множество $\bar{R}(v_i^m)$ имеет меру нуль.

Итак, найдется подпоследовательность такая, что $v_i^{m_s} \rightarrow v_i$ при $s \rightarrow \infty$, почти всюду в D^T . Очевидно также, что $u_i^{m_s} \rightarrow u_i$ почти всюду в D^T .

Чтобы установить (26), выберем в (29) $\varphi = \alpha_s(t) \rightarrow \chi(0 < t < \tau)$. Получим

$$\begin{aligned} & \langle \beta_q(v_i^m(\tau)) \rangle + [Q(u^m) \nabla v_i^m \cdot \nabla(\eta_q(v_i^m)) \chi(t < \tau)] \leq \\ & \leq [\tilde{l}_i^m(t, x, T_m(u^m)) \eta_q(v_i^m)] + \langle \beta_q(v_{0i}^m) \rangle \leq \langle \beta_q(v_{0i}^m) \rangle, \end{aligned}$$

где использовано неравенство $\tilde{l}_i^m \leq 0$. Поскольку

$$\nabla \eta_q(v_i^m) = -q^{-1} \nabla v_i^m \chi(q \leq v_i^m \leq 2q),$$

то применяя (17) устанавливаем соотношение

$$\langle \beta_q(v_i^m(\tau)) \rangle \leq \langle \beta_q(v_{0i}^m) \rangle + w(q).$$

Предельный переход $q \rightarrow \infty$ приводит к неравенству

$$\langle v_i^m(\tau) \rangle \leq \langle v_{0i}^m \rangle \leq c,$$

из которого следует (26).

Шаг 3. Отметим, что из (17) следует, что последовательность $Q(u^m) |\nabla T_k(v_i^m)|$ ограничена в $L_2(D^T)$ и из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность

$$Q(u^m) \nabla T_k(v_i^m) \rightarrow \Theta_k \text{ в } (L_2(D^T))^n.$$

Докажем равенство

$$(33) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [\alpha(t) Q(u^m) |\nabla T_k(v_i^m)|^2] = [\alpha(t) \Theta_k \cdot \nabla T_k(v_i)],$$

при любой неотрицательной функции $\alpha(t) \in C_0^\infty(-1, T)$, $\alpha(t) \in [0, 1]$.

Положим

$$\epsilon(\varphi, q, m) = [\varphi Q(u^m) \nabla v_i^m \cdot \nabla \eta_q(v_i^m)] = -[\varphi Q(u^m) |\nabla v_i^m|^2 \chi(q < v_i^m < 2q)] q^{-1}.$$

Тогда, в силу (17),

$$|\epsilon(\varphi, q, m)| \leq w(q) \|\varphi\|_\infty,$$

где $w(q) \rightarrow 0$ равномерно по m . Перепишем (29) в виде

$$\begin{aligned} & [\varphi_t(\beta_q(v_i^m) - \beta_q(v_{0i}^m)) + \tilde{l}_i(t, x, T_m(u^m)) \varphi \eta_q(v_i^m)] = \\ & = [Q(u^m) \nabla v_i^m (\chi(v_i^m < k) + \chi(k \leq v_i^m \leq 2q) \eta_q(v_i^m)) \cdot \nabla \varphi] + \epsilon(\varphi, q, m). \end{aligned}$$

Предельный переход $m \rightarrow \infty$ приводит к соотношению

$$(34) \quad \begin{aligned} & [\varphi_t(\beta_q(v_i) - \beta_q(v_{0i})) + \tilde{l}_i(t, x, u) \varphi \eta_q(v_i)] = \\ & = [\Theta_k \cdot \nabla \varphi + \eta_q(v_i) \chi(k \leq v_i) \Theta_{2q} \cdot \nabla \varphi] + \epsilon(\varphi, q). \end{aligned}$$

Покажем, что сюда можно подставить $\varphi = \alpha(t) T_k(v_i)$. Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3. Пусть $\beta(r)$ – непрерывная, неубывающая, нечетная функция и измеримые функции $v : D^T \rightarrow \mathbb{R}$, $v_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что $\beta(v) \in L_1(D^T)$, $\beta(v_0) \in L_1(\Omega)$. Пусть $z \in X' + L_1(D^T)$, $k = 0, 1$, и выполнено неравенство

$$(35) \quad (-1)^k [\varphi_t(\beta(v) - \beta(v_0))] \geq (z, \varphi)_{D^T} - c \|\varphi\|_\infty$$

при всех неотрицательных $\varphi \in C_0^1((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(36) \quad (-1)^k [\varphi_t \int_{v_0}^v h(r) d\beta(r)] \geq (z, h(v)\varphi)_{D^T} - c \|h(v)\varphi\|_\infty$$

при всех неотрицательных $\varphi \in C_0^1((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$ и неотрицательных ограниченных, неубывающих и липшицевых функциях $h(r)$ таких, что $h(u) \in W_2^{0,1}(D^T)$.

Доказательство дано в Приложении. По сути это вариант леммы об интегрировании по частям, установленной в [6] в случае условия Дирихле $v|_{\partial\Omega} = 0$. Пользуясь леммой при $h(v) = T_k(v_i)$ устанавливаем соотношения

$$\begin{aligned} & [\alpha_t \int_{v_{0,i}}^{v_i} T_k(r) \eta_q(r) dr + \alpha \tilde{l}_i(t, x, u) T_k(v_i) \eta_q(v_i)] = \\ & = [\eta_q(v_i) \Theta_k \cdot \nabla T_k(v_i) \alpha + \eta_q(v_i) \chi(k \leq v_i) \Theta_{2q} \cdot \nabla T_k(v_i) \alpha] + c(q) \|\alpha T_k(v_i)\|_\infty, \end{aligned}$$

где $|c(q)| \leq w(q)$. Поскольку $\chi(k \leq v_i) \nabla T_k(v_i) = 0$, то предельный переход $q \rightarrow \infty$ в последнем выражении приводит к равенству

$$[\alpha_t \int_{v_{0,i}}^{v_i} T_k(r) dr + \alpha \tilde{l}_i(t, x, u) T_k(v_i)] = [\Theta_k \cdot \nabla T_k(v_i) \alpha].$$

С другой стороны предельный переход в (16) (при $\varphi = \alpha$ и $\xi(r) = T_k(r)$) приводит к соотношению

$$[\alpha_t \int_{v_{0,i}}^{v_i} T_k(r) dr + \alpha \tilde{l}_i(t, x, u) T_k(v_i)] = \lim_{m \rightarrow \infty} [\alpha(t) Q(u^m) |\nabla T_k(v_i^m)|^2].$$

Сравнивая последние два равенства, устанавливаем (33).

Теперь с помощью соотношения (33) установим сильную сходимость

$$(37) \quad Q(u^m) \nabla T_k(v_i^m) \rightarrow Q(u) \nabla T_k(v_i) \text{ в } L_2(D^T).$$

Напомним известный факт: если $w^m \rightarrow w$ слабо в гильбертовом пространстве H и $\lim_{m \rightarrow \infty} \|w^m\|_H = \|w\|_H$, то $w^m \rightarrow w$ сильно.

В силу (19) последовательность $[\nabla T_k(v_i^m)]$ ограничена в $L^2(D^T)$ и из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность

$$w^m = \nabla T_k(v_i^m) \rightharpoonup w \text{ в } (L_2(D^T))^n, \quad m \rightarrow \infty.$$

Сходимость почти всюду $T_k(v_i^m) \rightarrow T_k(v_i)$ влечет равенство $w = \nabla T_k(v_i)$. Из сходимости $Q(u^m) \rightarrow Q(u)$ почти всюду следует также равенство $\Theta_k = Q(u) T_k(v_i)$. Очевидно, для $\varphi \in W_2^{0,1}(D^T)$ справедлив предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [(\alpha(t) Q(u^m))^{\frac{1}{2}} w^m \cdot \nabla \varphi] = [(\alpha(t) Q(u))^{\frac{1}{2}} w \cdot \nabla \varphi].$$

Слабая сходимость $(\alpha(t) Q(u^m))^{\frac{1}{2}} w^m \rightharpoonup (\alpha(t) Q(u))^{\frac{1}{2}} w$ вместе со сходимостью норм

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(\alpha(t) Q(u^m))^{\frac{1}{2}} w^m\|_{2, D^T} = \|(\alpha(t) Q(u))^{\frac{1}{2}} w\|_{2, D^T},$$

вытекающей из (33), влечет сильную сходимость. Легко устанавливается также сильная сходимость $\alpha(t) Q(u^m) w^m \rightarrow \alpha(t) Q(u) w$ в $(L_2(D^T))^n$. Отсюда, в силу

произвольности $\alpha(t) \geq 0$, следует (37). Это позволяет совершить предельный переход в правой части (16) при $m \rightarrow \infty$

$$(38) \quad [Q(u^m)\nabla v_i^m \cdot \nabla(\varphi\xi(v_i^m))] \rightarrow [Q(u)\nabla v_i \cdot \nabla(\varphi\xi(v_i))].$$

Шаг 4. Предельным переходом в (16) покажем, что тройка функций (u_1, u_2, u_3) является ренормализованным решением задачи (1), (6), (7).

Пользуясь (4), по теореме Лебега об ограниченной сходимости имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\chi(v_i^m \leq q)\tilde{l}_i^m(t, x, T_m(u^m))T_k(v_i^m)] = [\chi(v_i \leq q)\tilde{l}_i(t, x, u)T_k(v_i)].$$

Действительно, наличие множителя $\chi(v_i^m \leq q)$, в силу неотрицательности функций v_i^m , обеспечивает на множестве интегрирования $\{\chi(v_i^m \leq q) \neq 0\}$ равномерные оценки $|v_i^m| \leq q$.

Далее, в силу (18),

$$0 \leq -[\tilde{l}_i^m T_k(v_i^m)\chi(v_i^m > q)] \leq -\frac{k}{q}[\tilde{l}_i^m T_q(v_i^m)\chi(v_i^m > q)] \leq kw(q) \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty.$$

Соединяя последние соотношения, нетрудно вывести

$$(39) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [\tilde{l}_i^m(t, x, T_m(u^m))T_k(v_i^m)] = [\tilde{l}_i(t, x, u)T_k(v_i)]$$

Поскольку $\xi(r) = \xi(r)\chi(|r| \leq k)$ при достаточно больших k , то

$$(40) \quad [\tilde{l}_i^m(t, x, T_m(u^m))\varphi\xi(v_i^m)] = [\tilde{l}_i^m(t, x, T_m(u^m))\varphi\xi(v_i^m)\chi(|v_i^m| \leq k)] \rightarrow [\tilde{l}_i(t, x, u)\varphi\xi(v_i)], \quad m \rightarrow \infty.$$

Очевидно также, что

$$(41) \quad [\varphi_t \int_{v_{0i}^m}^{v_i^m} \xi(r)dr] \rightarrow [\varphi_t \int_{v_{0i}}^{v_i} \xi(r)dr], \quad m \rightarrow \infty.$$

Итак, из (38), (40), (41) следует, что предельный переход в (16) приводит к соотношению (10). Соотношение (9) является следствием (17) и (33). Таким образом, тройка (u_1, u_2, u_3) является ренормализованным решением задачи (1), (6), (7).

5. ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 3. Поскольку $|\int_{v_0}^v h(r)d\beta(r)| \leq \|h\|_\infty |\beta(v) - \beta(v_0)|$,

то $\int_{v_0}^v h(r)d\beta(r) \in L_1(D^T)$ и интегралы в (36) определены.

Отметим, что достаточно доказать одно из неравенств леммы, так как если v удовлетворяет первому ($k = 0$) неравенству в (35), то $-v$ удовлетворяет второму ($k = 1$), благодаря нечетности функции β .

Если справедливо первое из неравенств (35), то оно справедливо также и для неотрицательных функций $\varphi \in Y$, где

$$Y = \{\psi(t, x) \in L_\infty(D^T) : \psi(t, x) = \int_t^T \xi(s, x)ds | \nabla \xi \in X, \text{ suppr } \xi \text{ ограничен}\}$$

– это легко установить соответствующим предельным переходом, выбирая равномерно ограниченную последовательность функций $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, с градиентами, сходящимися слабо к $\nabla\zeta \in X$ относительно функционалов из X' и такую, что интегралы $\int_t^T \varphi_k(s, x) ds$ сходятся п.в. к $\psi(t, x) = \int_t^T z(s, x) ds$.

Так как $h(s) \geq 0$ не убывает и непрерывна по s , очевидно, что

$$\int_r^s h(\tau) d\beta(\tau) \leq h(s)(\beta(s) - \beta(r))$$

при всех $r, s \in \mathbb{R}$. Следовательно, при всех $t > 0$

$$(42) \quad \int_{v(t-\mu)}^{v(t)} h(r) d\beta(r) \leq h(v(t))(\beta(v(t)) - \beta(v(t-\mu))),$$

где полагаем $v(t) = v_0$ при $t < 0$. Пусть $\varphi \in C_0^1((-\infty, T) \times \mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$ и $\nabla h(v) \in X$, тогда функция $\zeta = h(v)\varphi$ такова, что $\nabla\zeta \in X$. Отметим, что при любом малом $\mu > 0$ функция $\zeta_\mu(t, x) = 1/\mu \int_t^{t+\mu} \zeta(s, x) ds$, $\zeta_\mu(T, x) = 0$ лежит в пространстве Y . Поэтому ζ_μ можно подставить в (35). Согласно (42), запишем цепочку соотношений

$$(43) \quad \begin{aligned} & -c\|\zeta_\mu\|_\infty + (z, \zeta_\mu)_{D^T} \leq [(\zeta_\mu)_t(\beta(v) - \beta(v_0))] = \\ & = \int_{D_{-\infty}^T} \frac{1}{\mu} (\zeta(t+\mu) - \zeta(t))(\beta(v(t)) - \beta(v_0)) dx dt = \\ & = \int_{D_{-\infty}^T} \frac{1}{\mu} \zeta(t)(\beta(v(t-\mu)) - \beta(v(t))) dx dt = \\ & = \int_{D_{-\infty}^T} \frac{\varphi(t)}{\mu} h(v(t))(\beta(v(t-\mu)) - \beta(v(t))) dx dt \leq \\ & \leq \int_{D_{-\infty}^T} \frac{\varphi(t)}{\mu} \int_{v(t)}^{v(t-\mu)} h(r) d\beta(r) dx dt = \left[\frac{\varphi(t+\mu) - \varphi(t)}{\mu} \int_{v_0}^{v(t)} h(r) d\beta(r) \right]. \end{aligned}$$

Так как при $\mu \rightarrow 0$

$$[\zeta_\mu, f] = [\zeta, f_{-\mu}] \rightarrow [\zeta, f], \forall f \in L_1(D^T),$$

$(\varphi(t+\mu) - \varphi(t))/\mu \rightarrow \varphi_t(t)$ в $L_\infty(D^T)$ и градиенты $\nabla\zeta_\mu \rightarrow \nabla\zeta = \nabla(h(v)\varphi)$ сходятся в X , то после предельного перехода в (43) получим (36).

Автор хотела бы выразить искреннюю благодарность профессору Ф.Х. Мукинову за плодотворные обсуждения и многочисленные полезные замечания.

REFERENCES

- [1] M. Bendahmane, M. Langlais, *A reaction-diffusion system with cross-diffusion modeling the spread of an epidemic disease*, Journal of Evolution Equations, **10**:4 (2010), 883–904. Zbl 1239.35065
- [2] M. Bendahmane, M. Langlais, M. Saad, *On some anisotropic reaction-diffusion systems with L^1 -data modeling the propagation of an epidemic disease*, Nonlinear Analysis, **54**:4 (2003), 617–636. Zbl 1029.35114
- [3] M. Mimura, K. Kawasaki, *Spatial Segregation in Competitive Interaction-Diffusion Equations*, J. Math. Biology, **9** (1980), 49–64. Zbl 0425.92010
- [4] L. Shangeranesh, K. Balachandran, *Renormalized and entropy solutions of nonlinear parabolic system*, Electronic Journal of Differential Equations, **2013** (2013), Paper 268. Zbl 1288.35290
- [5] F. Kh. Mukminov, *Suschestvovanie renormalizovannogo resheniya anizotropnoi parabolicheskoi zadachi dlya uravneniya s diffuznoi meroi*, Tr. Mat. Inst. Steklova, **306** (2019) (to appear).
- [6] F. Kh. Mukminov, *Uniqueness of the renormalized solution of an elliptic-parabolic problem in anisotropic Sobolev-Orlicz spaces*, Sb. Math., **208**:8 (2017), 1187–1206. Zbl 1386.35187
- [7] J. Carrillo, P. Wittbold, *Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems*, J. Differential Equations, **156**:1 (1999), 93–121. Zbl 0932.35129
- [8] H. W. Alt, S. Luckhaus, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*, Math. Z., **183** (1983), 311–341. Zbl 0497.35049
- [9] J. Kačur, *On a solution of degenerate elliptic-parabolic systems in Orlicz-Sobolev spaces. I*, Math. Z., **203** (1990), 153–171. Zbl 0659.35045

ELINA ANDRIYANOVA
INSTITUTE OF MATHEMATICS WITH COMPUTING CENTRE,
112, CHERNYSHEVSKY STR.,
UFA, 450008, RUSSIA
E-mail address: elina.andriyanov@gmail.com