S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–157 (2019) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2019.16.007 MSC 35M10+35R30

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

С.Н. СИДОРОВ

Abstract. In this paper, inverse problems are posed and studied to determine the factors of the right-hand sides of a mixed parabolic-hyperbolic type with a degenerate parabolic part, depending on time. On the basis of the theory of integral equations, the corresponding uniqueness theorems and the existence of solutions of inverse problems were proved, and explicit formulas for the solution were obtained.

Keywords: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, initial-boundary value problem, inverse problems, uniqueness, existence, series, small denominators, integral equations.

1. Постановка задач

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = F(x,t), \tag{1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - bt^n u, \\ u_{xx} - u_{tt} - bu, \end{cases} \qquad F(x,t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x,t) \,|\, 0 < x < l,\, -\alpha < t < \beta\},$$

где n, l, α, β – заданные положительные действительные числа, b – заданное любое действительное число, $f_i(x)$, $i = 1, 2,$ – известные функции и поставим следующие задачи.

Sidorov, S.N., Inverse problems for a mixed parabolic-hyperbolic equation with a degenerate parabolic part.

Поступила 30 ноября 2018 г., опубликована 31 января 2019 г.

Задача 1. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{5}$$

где $F(x,t)$ – заданная достаточно гладкая функция, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. *Найти функции $u(x,t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям* (2) – (5) *и*

$$g_1(t) \in C[0,\beta]; \tag{6}$$

$$u(x_0,t) = h_1(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 \le t \le \beta, \tag{7}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ – заданные функции, x_0 – заданная точка из интервала $(0,l)$.

Задача 3. *Найти функции $u(x,t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (2) – (5) *и*

$$g_2(t) \in C[-\alpha,0], \tag{8}$$

$$u(x_0,t) = h_2(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \le t \le 0, \tag{9}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_1(t)$, $h_2(t)$ – известные функции.

Задача 4. *Найти функции $u(x,t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (2) – (9)*, здесь $f_i(x)$, $h_i(t)$, $i = 1,2$, – заданные функции.*

В задачах 2 – 4 условия (7) и (9) являются дополнительными для определения функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$.

К одним из первых исследований задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой – гиперболическое уравнение, можно отнести работу И.М. Гельфанда [1]. Он рассматривает пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой, при этом в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии. Я.С. Уфлянд [2, 3] задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда на участке полубесконечной линии пренебрегается потерями, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки, свел к решению уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. Эта задача для более общего уравнения была изучена в работе Т.Д. Джураева [4] и его учеников.

О.А. Ладыженская и Л. Ступялис [5, 6] в многомерном пространстве рассмотрели начально-граничные краевые задачи на сопряжения для параболо-гиперболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле.

Обратные задачи возникают во многих областях науки: электродинамике, акустике, квантовой теории рассеяния, геофизике (обратные задачи электроразведки, сейсмики, теории потенциала), астрономии и других областях естествознания. Это связано с тем, что значения параметров модели могут быть получены из наблюдаемых данных, а свойства среды на практике часто бывают неизвестны.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных, т.е. для параболических, гиперболических и эллиптических уравнений, изучены достаточно полно (см. работы [7 – 13] и приведенную там обширную библиографию).

В работах Прилепко А.И. и его учеников [14 – 16] рассмотрены обратные задачи по поиску неизвестной правой части для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных.

В работах Соловьева В.В. [17, 18] для уравнения параболического типа рассмотрены обратные задачи определения правой части $F(x,t) = h(x,t)f(t) + g(x,t)$, где неизвестной является функция $f(t)$.

В работе Костина А.Б. [19] для параболического уравнения исследована обратная задача восстановления источника – правой части $F(x,t) = h(x,t)f(x)$, где неизвестной является функция $f(x)$.

Кожановым А.И. и Сафиулловой Р.Р. [20, 21] изучены обратные задачи нахождения вместе с решением параболического уравнения также неизвестного внешнего воздействия (правой части).

В то же время практически отсутствовали исследования обратных задач для уравнений смешанного типа. Первые исследования в этом направлении велись в работе Megrabov A.G. [22], где ставились обратные задачи для модельного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа (для уравнения Лаврентьева-Бицадзе) в полосе по поиску неизвестного коэффициента уравнения и неизвестного коэффициента в граничном условии второго рода. Методом преобразования Фурье эти задачи сводятся к обратной спектральной задаче типа Штурма-Лиувилля. В работах Джамалова С.З. [23, 24] изучаются обратные задачи по отысканию правой части общего уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа, где методами априорных оценок и последовательных приближений получены теоремы об однозначной разрешимости обобщенного решения.

Задачи 1 – 4 впервые поставлены и изучены в работах [25, с. 228–238], [26] для уравнения (1) при $n = 0$. Начально-граничные задачи для однородного уравнения (1), т.е. когда $F_i(x,t) \equiv 0$, $i = 1, 2$, изучены в работах [27 – 30] с локальными и нелокальными условиями. Задача 1 для уравнения (1) исследована в работе [31]. В работах [32 – 34] были изучены обратные задачи для уравнения (1) при $n = 0$ по отысканию функций $u(x,t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$.

Поставленные здесь задачи были исследованы в работе [35] для уравнения с вырождающейся гиперболической частью, т.е. для уравнения

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u = f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases} \tag{$*$}$$

где $m > 0$, $b \geq 0$ – заданные действительные числа.

Данная работа является продолжением работ [31, 35]. Здесь в отличие от уравнения $(*)$ задачи 1 – 4 изучаются для уравнения (1) с вырождающейся параболической частью, что имеет свои особенности в структуре малых знаменателей, возникающих при построении решения этих задач посредством рядов по системе собственных функций соответствующей спектральной задачи.

В статье приведены краткие сведения по исследованию задачи 1, ранее изученной в работе [31]. На основании этой задачи методом интегральных уравнений получены теоремы единственности и существования решений обратных задач 2 – 4, при этом решения задач построены в явном виде.

2. Результаты по прямой начально-граничной задаче 1

Решение задачи (2) – (5) определяется рядом [31]

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\mu_k x,\quad \mu_k=\frac{\pi k}{l}, \tag{10}$$

где

$$T_k(t)=\begin{cases}\dfrac{\omega_k(\alpha)}{\Delta_k(\alpha)}e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)}+ \\ \qquad +f_{1k}\displaystyle\int_0^t g_1(s)e^{-\lambda_k^2(t^{n+1}/(n+1)-s^{n+1}/(n+1))}\,ds, & t>0,\\ \dfrac{\omega_k(\alpha)}{\Delta_k(\alpha)}\cos\lambda_k t+\omega_k(-t), & t<0,\end{cases} \tag{11}$$

при условии, что при всех $k\in\mathbb{N}$ выражение

$$\Delta_k(\alpha)=\cos\lambda_k\alpha\neq 0, \tag{12}$$

здесь

$$f_{ik}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f_i(x)\sin\mu_k x\,dx,\quad i=1,2,\quad \lambda_k^2=b+\mu_k^2,$$

$$\omega_k(-t)=\frac{f_{1k}g_1(0)}{\lambda_k}\sin\lambda_k t-\frac{f_{2k}}{\lambda_k}\int_t^0 g_2(s)\sin\left[\lambda_k(t-s)\right]\,ds.$$

Отметим, что в дальнейшем будем считать, что $b\geq 0$, так как если $b<0$, то начиная с некоторого номера k_0 при всех $k>k_0$ выражение $b+\mu_k^2$ принимает только положительные значения, т.е. знак коэффициента b не влияет на полученные результаты.

Представим выражение $\Delta_k(\alpha)$ в виде

$$\Delta_k(\alpha)=\cos\pi k\widetilde{\alpha}\widetilde{\lambda}_k,$$

здесь $\widetilde{\alpha}=\alpha/l$, $\widetilde{\lambda}_k=\sqrt{1+(b\,l/\pi k)^2}$. Уравнение $\Delta_k(\alpha)=0$ имеет счетное множество нулей относительно $\widetilde{\alpha}$, которые определяются по формуле

$$\widetilde{\alpha}=\frac{1}{2k\widetilde{\lambda}_k}+\frac{m}{k\widetilde{\lambda}_k},\quad k,\,m\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

Поскольку выражение $\Delta_k(\alpha)$ при указанных значениях (13) параметра $\widetilde{\alpha}$ может обратиться в нуль, то необходимо установить оценки об отделенности от нуля $\Delta_k(\alpha)$ с соответствующей асимптотикой.

Далее рассмотрим в отдельности случаи, когда $b=0$ и $b>0$.

2.1. Существование решения задачи для уравнения (1) *при* $b=0$. В этом случае справедливы следующие утверждения, доказательства которых приведено в статьях [31, 36].

Лемма 2.1. *Если $\widetilde{\alpha} = p/t$ является произвольным рациональным числом, где $p,\ t \in \mathbb{N}$ и $t \neq 2r$ при некотором $r = \overline{1, t-1}$, то существует постоянная C_0, такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\Delta_k(\alpha)| \geq C_0 > 0.$$

Лемма 2.2. *Пусть $\widetilde{\alpha}$ – иррациональное алгебраическое число степени $m \geq 2$. Тогда существует положительная постоянная C_0, зависящая от α и l, такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки:*

$$|\Delta_k(\alpha)| > \frac{C_0}{k} \ \text{ при } m = 2,$$

$$|\Delta_k(\alpha)| > \frac{C_0}{k^{1+\varepsilon}} \ \text{ при } m > 2, \ \varepsilon > 0.$$

Пусть функции $f_i(x)$, $g_i(t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям (A):

$$f_i(x) \in C^2[0, l], \quad f_i(0) = f_i(l) = f_i''(0) = f_i''(l) = 0,$$

$$g_1(t) \in C[0, \beta], \quad g_2(t) \in C[-\alpha, 0].$$

Тогда основании лемм 2.1 и 2.2 аналогично [31] устанавливается справедливость следующих утверждений.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия леммы* 2.1 *и* (A), *то существует единственное решение задачи* 1, *которое определяется рядом* (10), *коэффициенты которого определяются формулой* (11).

Теорема 2.2. *Если выполнены условия леммы* 2.2, (A) *и кроме того* $f_i(x) \in C^{3+\nu}[0, l]$, $\varepsilon < \nu < 1$, *то существует единственное решение задачи* 1, *которое определяется рядом* (10), *коэффициенты которого определяются формулой* (11).

2.2. Существование решения задачи для уравнения (1) *при* $b > 0$. В этом случае в [31] установлены следующие оценки об отделенности от нуля малых знаменателей.

Лемма 2.3. *Если $\widetilde{\alpha} = p/t$ является произвольным рациональным числом, где $p/t \notin \mathbb{N}$, $(p, t) = 1$, и $t \neq 2r + 2$ или $t \neq 2r$ при некотором $r = \overline{1, t-1}$, то существуют положительные постоянные C_0 и k_0, $(k_0 \in \mathbb{N})$, такие, что при всех $k > k_0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_k(\alpha)| \geq C_0 > 0. \tag{14}$$

Лемма 2.4. *Если $\widetilde{\alpha} = p/t$ является произвольным рациональным числом, где $p/t \notin \mathbb{N}$, $(p, t) = 1$, и $(r + 1)/t = 1/2$ или $r/t = 1/2$ при некотором $1 \leq r \leq t - 1$, то существуют положительные постоянные C_0 и k_0, $(k_0 \in \mathbb{N})$, такие, что при всех $k > k_0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_k(\alpha)| \geq \frac{C_0}{k} > 0. \tag{15}$$

На основании этих лемм устанавливается справедливость следующих утверждений.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия леммы* 2.3 *и* (A). *Тогда, если* $\Delta_k(\alpha) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (2) – (5), *которое определяется рядом* (10), *коэффициенты которого определяются по формулам* (11).

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия леммы* 2.4, (A) *и кроме того* $f_i(x) \in C^3[0, l]$. *Тогда, если* $\Delta_k(\alpha) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное* *решение задачи* (2) – (5), *которое определяется рядом* (10), *коэффициенты которого определяются по формулам* (11).

3. Исследование обратной задачи 2

Потребуем, чтобы функция (10) удовлетворяла условию (7). Тогда имеем

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\omega_k(\alpha)}{\Delta_k(\alpha)}e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)}+f_{1k}\int\limits_0^t g_1(s)e^{-\lambda_k^2(t^{n+1}/(n+1)-s^{n+1}/(n+1))}\,ds\right]$$
$$\times\sin\mu_k x_0=h_1(t),\quad 0\le t\le\beta,$$

или

$$g_1(0)\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{1k}e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)}\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k\Delta_k(\alpha)}\sin\mu_k x_0$$
$$-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{2k}e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)}}{\lambda_k\Delta_k(\alpha)}g_{2k}^{(s)}(\alpha)\sin\mu_k x_0$$
$$+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}f_{1k}\int\limits_0^t g_1(s)e^{-\lambda_k^2(t^{n+1}/(n+1)-s^{n+1}/(n+1))}\,ds\,\sin\mu_k x_0=h_1(t),$$

где

$$g_{2k}^{(s)}(\alpha)=\int\limits_{-\alpha}^{0}g_2(s)\sin\left[\lambda_k(t+\alpha)\right]\,ds. \tag{16}$$

В силу равномерной сходимости ряда (10) на $\overline{D}$ поменяем местами операции интегрирования и суммирования. Тогда получим для искомой функции $g_1(t)$ нагруженное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int\limits_0^t g_1(s)K_1(s,t)\,ds=\widetilde{h}_1(t),\quad 0\le t\le\beta, \tag{17}$$

с ядром

$$K_1(s,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{1k}e^{-\lambda_k^2(t^{n+1}/(n+1)-s^{n+1}/(n+1))}\sin\mu_k x_0, \tag{18}$$

и правой частью

$$\widetilde{h}_1(t)=h_1(t)-g_1(0)H_1(t)+H_2(t), \tag{19}$$

здесь

$$H_1(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{1k}e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)}\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k\Delta_k(\alpha)}\sin\mu_k x_0, \tag{20}$$

$$H_2(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{2k}e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)}}{\lambda_k\Delta_k(\alpha)}g_{2k}^{(s)}(\alpha)\sin\mu_k x_0. \tag{21}$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1 *или* 2.3. *Если функции* $f_i(x)$, $i=1,2$, *удовлетворяют условиям* (*A*) *и кроме того* $f_i(x)\in C^3[0,l]$, *то ряды* (18), (20), (21) *и их производные по* t *на замкнутом множестве* $0\le s\le t\le\beta$ *сходятся равномерно.*

Доказательство. Ряд (18) и его производная по t при $0 \leq s \leq t \leq \beta$ мажорируются соответственно рядами

$$M_1 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |f_{1k}| \quad \text{и} \quad M_2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} k^2 |f_{1k}|, \tag{22}$$

где M_i – здесь и далее положительные постоянные.

При выполнении условий леммы 2.3 ряды (20), (21) и их производные первого порядка на замкнутом множестве $0 \leq s \leq t \leq \beta$ мажорируются соответственно рядами

$$M_3 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} k|f_{1k}|, \quad M_4 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} k|f_{2k}|. \tag{23}$$

Тогда при выполнении условий леммы 3.1 ряды (22) и (23) сходятся. Поэтому ряды (18), (20), (21) и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по t один раз при $0 \leq s \leq t \leq \beta$, сходятся равномерно.

Отметим, что, если выполнены условия леммы 2.1, то в рядах (22) и (23) суммирование начинается с $k = 1$. ■

Аналогично устанавливается справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия леммы* 2.2 *или* 2.4*. Если функции* $f_i(x)$*,* $i = 1, 2$*, удовлетворяют условиям теоремы* 2.2*, то ряды* (18)*,* (20)*,* (21) *и их производные по* t *на замкнутом множестве* $0 \leq s \leq t \leq \beta$ *сходятся равномерно.*

Дифференцируя уравнение (17) по t, имеем

$$K_1(t,t)g_1(t) + \int_0^t g_1(s) \frac{\partial K_1(s,t)}{\partial t}\, ds = \widetilde{h}_1'(t). \tag{24}$$

Положив в (18) $s = t$, будем иметь

$$K_1(t,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{1k} \sin \mu_k x_0 = f_1(x_0). \tag{25}$$

Как видим, что правая часть равенства (25) представляет собой разложение в ряд функции $f_1(x)$ по системе $\left\{\sqrt{2/l}\sin \mu_k x\right\}_{k\geq 1}$ в точке $x = x_0$. Если $f_1(x_0) \neq 0$, то уравнение (24) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Как известно [37, с. 437], такое уравнение имеет единственное решение в классе функций $C[0,\beta]$, если предварительно найдем значение $g_1(0)$, которое входит в правую часть уравнения (24). Из уравнения (24) имеем

$$f_1(x_0)g_1(0) = h_1'(0) - g_1(0)H_1'(0) + H_2'(0).$$

Так как $H_1'(0) = H_2'(0) = 0$, отсюда найдем

$$g_1(0) = \frac{h_1'(0)}{f_1(x_0)} \tag{26}$$

при условии

$$f_1(x_0) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{1k} \sin \mu_k x_0 \neq 0.$$

После нахождения значения $g_1(0)$ по формуле (26) уравнение (24) является классическим уравнением Вольтерра второго рода, решение которого легко строится методом последовательных приближений.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия леммы* 3.1 *или* 3.2, $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$, $h_1(t) \in C^1[0,\beta]$, $f_1(x_0) \neq 0$. *Тогда интегральное уравнение* (24) *имеет единственное решение* $g_1(t) \in C[0,\beta]$, *следовательно, задача* 2 *имеет единственное решение.*

Теперь покажем, что условие $f_1(x_0) \neq 0$ является существенным для однозначной разрешимости задачи 2. Действительно, существует функция $f_1(x) = \sin\mu_m x = \sin\pi m\widetilde{x}$, где m – некоторое фиксированное натуральное число, $\widetilde{x} = x/l$, такая, что $f_1(x_0) = \sin\pi m\widetilde{x}_0 = 0$. Для такой функции при любой функции $g_1(t) \in C[0,\beta]$ и $h_1(t) \equiv 0$ существует ненулевое решение задачи 2

$$u_{1m}(x,t) = T_{1m}(t)\sin\mu_m x, \tag{27}$$

где

$$T_{1m}(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)} e^{-\lambda_m^2 t^{n+1}/(n+1)} + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t g_1(s) e^{-\lambda_m^2 (t^{n+1}/(n+1) - s^{n+1}/(n+1))}\, ds, & t > 0, \\ \dfrac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)} \cos\lambda_m t - \omega_{1m}(-t), & t < 0, \end{cases}$$

$$\omega_{1m}(-t) = -\frac{g_1(0)}{\lambda_m}\sin\lambda_m t + \frac{f_{2m}}{\lambda_m}\int_t^0 g_2(s)\sin\left[\lambda_m(t-s)\right] ds.$$

В самом деле, построенная функция (27) удовлетворяет условиям (2) – (7) (где $h_1(t) \equiv 0$). Данная функция удовлетворяет классу (2) так как

$$\lim_{t\to 0+0} u_{1m}(x,t) = \frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)}\sin\mu_m x = \lim_{t\to 0-0} u_{1m}(x,t) =$$

$$= \lim_{t\to 0-0}\left[\frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)}\cos\lambda_m t + \omega_{1m}(-t)\right]\sin\mu_m x = \frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)}\sin\mu_m x;$$

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{\partial u_{1m}(x,t)}{\partial t} = \lim_{t\to 0+0}\Big[-\frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)}\lambda_m^2 t^n e^{-\lambda_m^2 t^{n+1}/(n+1)} + g_1(t)\Big]\sin\mu_m x =$$

$$= g_1(0)\sin\mu_m x =$$

$$= \lim_{t\to 0-0}\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t} = \lim_{t\to 0-0}\Big[-\frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)}\sin\lambda_m t + g_1(0)\cos\lambda_m t\Big]\sin\mu_m x =$$

$$= g_1(0)\sin\lambda_m x.$$

Условия (4) и (5) также выполняются, так как

$$u_{1m}(x,-\alpha) = \Big[\frac{\omega_{1m}(\alpha)}{\cos\lambda_m\alpha}\cos\lambda_m\alpha - \omega_{1m}(\alpha)\Big]\sin\mu_m x = 0,$$

$$u_{1m}(x_0,t) = T_{1m}(t)\sin\mu_m x_0 = 0.$$

Из построения функции (27) следует, что $u_{1m}(x,t)$ на множестве $D_- \cup D_+$ является решением уравнения (1).

Теперь выясним для каких точек $\widetilde{x}_0$ из $(0,1)$ имеет место равенство

$$\sin \pi m\widetilde{x}_0 = 0 \iff \widetilde{x}_0 = \frac{k}{m}, \;\; k,m\in\mathbb{N}, \;\; k<m.$$

Следовательно, когда $\widetilde{x}_0$ принимает рациональные значения условие $f_1(x_0)\neq 0$ будет нарушено.

4. Исследование обратной задачи 3

Аналогично п. 3, полагая в формуле (10) $x = x_0$ с учетом условия (9), получим интегральное уравнение типа первого рода

$$-\int\limits_t^0 g_2(s)K_2(s,t)\,ds - \int\limits_{-\alpha}^0 g_2(s)K_3(s,t)\,ds = \widetilde{h}_2(t), \quad -\alpha\le t\le 0, \tag{28}$$

здесь

$$K_2(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{2k}}{\lambda_k}\sin\left[\lambda_k(t-s)\right]\sin\mu_k x_0, \quad -\alpha\le t\le s\le 0, \tag{29}$$

$$K_3(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{2k}}{\lambda_k\Delta_k(\alpha)}\cos\lambda_k t\,\sin\lambda_k(s+\alpha)\,\sin\mu_k x_0, \tag{30}$$

$$\widetilde{h}_2(t) = h_2(t) - g_1(0)H_3(t), \quad -\alpha\le t\le 0, \tag{31}$$

$$H_3(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{1k}}{\lambda_k}\left[\frac{\cos\lambda_k t\,\sin\lambda_k\alpha}{\Delta_k(\alpha)} + \sin\lambda_k t\right]\sin\mu_k x_0. \tag{32}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1 *или* 2.3*. Если функции* $f_i(x)$, $i=1,2$, *удовлетворяют условиям* (A), *то ряды* (29), (30) *и* (32) *и их производные первого и второго порядков по* t *на замкнутом множестве* $-\alpha\le t\le s\le 0$ *сходятся равномерно.*

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия леммы* 2.2 *или* 2.4*. Если функции* $f_i(x)$, $i=1,2$, *удовлетворяют условиям теоремы* 2.2*, то ряды* (29), (30) *и* (32) *и их производные по* t *на замкнутом множестве* $-\alpha\le t\le s\le 0$ *сходятся равномерно.*

Обе части уравнения (28) продифференцируем по t два раза. Тогда получим

$$g_2(t)\frac{\partial K_2(s,t)}{\partial t}\Big|_{s=t} - \int\limits_t^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}\,ds - \int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\,ds = \widetilde{h}_2''(t). \tag{33}$$

На основании (29) вычислим

$$\frac{\partial K_2(s,t)}{\partial t}\Big|_{s=t} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{2k}\sin\mu_k x_0 = f_2(x_0). \tag{34}$$

Если теперь потребуем, что $f_2(x_0) \neq 0$, то из (33) и (34) получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$g_2(t) - \lambda \int\limits_{-\alpha}^{0} g_2(s) H(s,t)\, dt = \lambda(t), \tag{35}$$

где

$$H(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}, & -\alpha \leq s \leq t, \\ \dfrac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}, & t \leq s \leq 0, \end{cases} \tag{36}$$

$$\lambda = \frac{1}{f_2(x_0)}, \quad \lambda(t) = \frac{\widetilde{h}_2''(t)}{f_2(x_0)}.$$

Ядро $H(s,t)$ интегрального уравнения (35), определенное формулой (36), непрерывно на замкнутом квадрате $-\alpha \leq s, t \leq 0$. Если $h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0]$, то правая часть $\lambda(t)$ также непрерывна на $[-\alpha, 0]$. Следовательно, уравнение (35) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, к которому применима известная теория Фредгольма [37, с. 434]. Выделим случаи, когда уравнение (35) имеет единственное решение. Методом последовательных приближений можно доказать однозначную разрешимость данного уравнения в классе непрерывных на $[-\alpha, 0]$ функций при

$$|\lambda| < \frac{1}{M\alpha}, \quad M = \max_{-\alpha \leq s,\, t \leq 0} |H(s,t)|.$$

Из теории Фредгольма также следует, что, если λ не является характеристическим числом ядра $H(s,t)$, то интегральное уравнение (35) имеет единственное непрерывное на $[-\alpha, 0]$ решение.

Таким образом, нами доказаны следующая

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия леммы* 4.1 *или* 4.2, $g_1(t) \in C[-\alpha, 0]$, $h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0]$, $f_2(x_0) \neq 0$. *Тогда при выполнении одного из следующих условий: а)* $|f_2(x_0)| > M\alpha$, *где* $M = \max\limits_{-\alpha \leq s, t \leq 0} |H(s,t)|$; *б) число* $f_2^{-1}(x_0)$ *не является характеристическим числом ядра* $H(s,t)$ *существует единственное решение задачи* 3. *При этом функция* $g_2(t)$ *определяется как решение интегрального уравнения* (35), *после чего функция* $u(x,t)$ *определяется по формуле* (10).

Отметим также, что условие $f_2(x_0) \neq 0$ является существенным для однозначной разрешимости задачи 3. Действительно, существует функция $f_2(x) = \sin \mu_m x = \sin \pi m \widetilde{x}$, где m – некоторое фиксированное натуральное число, $\widetilde{x} = x/l$, такая, что $f_2(x_0) = \sin \pi n \widetilde{x}_0 = 0$. Тогда для такой функции при любой функции $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$ и $h_2(t) \equiv 0$ строится ненулевое решение задачи 3:

$$u_{2m}(x,t) = T_{2m}(t) \sin \mu_m x, \tag{37}$$

где

$$T_{2m}(t)=\begin{cases}\dfrac{\omega_{2m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)}e^{-\lambda_m^2 t^{n+1}/(n+1)}+\\ \qquad +f_{1m}\displaystyle\int_0^t g_1(s)e^{-\lambda_{2m}^2(t^{n+1}/(n+1)-s^{n+1}/(n+1))}\,ds, & t>0,\\ \dfrac{\omega_m(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)}\cos\lambda_m t-\omega_{1m}(-t), & t<0,\end{cases}$$

$$\omega_{2m}(-t)=-\frac{g_1(0)f_{1m}}{\lambda_m}\sin\lambda_m t+\frac{1}{\lambda_m}\int_t^0 g_2(s)\sin\left[\lambda_m(t-s)\right]\,ds.$$

Аналогично функции (27) доказывается, что построенная функция (37) удовлетворяет условиям задачи 3 при $h_2(t)=0$ и любой функции $g_2(t)\in C[-\alpha,0]$.

5. Исследование обратной задачи 4

Требуя, чтобы функция (10) удовлетворяла условиям (7) и (9), получим систему интегральных уравнений с нагруженными слагаемыми

$$\int_0^t g_1(s)K_1(s,t)\,ds-\int_{-\alpha}^0 g_2(s)\widetilde{K}_1(s,t)\,ds=h_1(t)-g_1(0)H_1(t)=\widetilde{\widetilde{h}}_1(t), \tag{38}$$

$$-\int_t^0 g_2(s)K_2(s,t)\,dt-\int_{-\alpha}^0 g_2(s)K_3(s,t)\,ds=h_2(t)-g_1(0)H_3(t)=\widetilde{h}_2(t), \tag{39}$$

где $K_1(s,t)$, $H_1(t)$, $K_2(s,t)$, $K_3(s,t)$ и $H_3(t)$ определяются соответственно формулами (18), (20), (29), (30) и (32),

$$\widetilde{K}_1(s,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{f_{2k}e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)}}{\lambda_k\Delta_k(\alpha)}\sin\left[\lambda_k(s+\alpha)\right]\sin\mu_k x_0. \tag{40}$$

Следуя пп. 3 и 4 продифференцируем уравнение (38) один раз, а уравнение (39) два раза. В результате имеем

$$g_1(t)f_1(x_0)-\int_0^t g_1(s)\frac{\partial K_1(s,t)}{\partial t}\,ds-\int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial\widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\,ds=\widetilde{\widetilde{h}}{}_1'(t), \tag{41}$$

$$g_2(t)f_2(x_0)-\int_t^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}\,ds-\int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}\,ds=\widetilde{h}_2''(t). \tag{42}$$

Полагая в равенстве (41) $t=0$, получим

$$g_1(0)f_1(x_0)-\int_{-\alpha}^0 g_2(s)\frac{\partial\widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}\,ds=h_1'(0)-g_1(0)H_1'(0), \tag{43}$$

Предварительно из формул (40) и (20) вычислим

$$\frac{\partial \widetilde{K}_1(s,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{\lambda_k t^n f_{2k} e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)}}{\Delta_k(\alpha)}\right]\Big|_{t=0} \sin\left[\lambda_k(s+\alpha)\right]\sin\mu_k x_0 = 0,$$

$$H_1'(0) = -\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_k t^n f_{1k} e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)}\sin\lambda_k\alpha}{\Delta_k(\alpha)}\right]\Big|_{t=0}\sin\mu_k x_0 = 0.$$

Тогда из уравнения (43) найдем

$$g_1(0) = \frac{h_1'(0)}{f_1(x_0)}$$

при условии $f_1(x_0) \neq 0$ и подставим в правую часть уравнения (42). Тогда, если $f_2(x_0) \neq 0$, то из (42) получаем интегральное уравнение

$$g_2(t) - \lambda\int_{-\alpha}^{0} g_2(s)H(s,t)\,dt = \widetilde{\lambda}(t), \tag{44}$$

где

$$H(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2}, & -\alpha \le s \le t, \\ \dfrac{\partial^2 K_3(s,t)}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 K_2(s,t)}{\partial t^2}, & t \le s \le 0, \end{cases} \tag{45}$$

$$\lambda = \frac{1}{f_2(x_0)}, \quad \widetilde{\lambda}(t) = \frac{f_1(x_0)h_2''(t) - h_1'(0)H_3''(t)}{f_1(x_0)f_2(x_0)}.$$

Уравнение (45) при $f_1(x_0) \neq 0$ и $f_2(x_0) \neq 0$ представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, к которому применима теория Фредгольма [37, с. 434].

После нахождения функции $g_2(s)$ из уравнения (44) можно найти функцию $g_1(s)$ из (41) как решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью.

Таким образом, приходим к следующему утверждению по задаче 4.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия леммы* 3.1 *или* 3.2*,* $h_1(t) \in C^1[0,\beta]$*,* $h_2(t) \in C^2[-\alpha,0]$*,* $f_1(x_0) \neq 0$*,* $f_2(x_0) \neq 0$*, выполнено одно из условий а) или б) теоремы* 4.1. *Тогда система интегральных уравнений* (41) *и* (42) *имеет единственное решение* $g_1(t) \in C[0,\beta]$ *и* $g_2(t) \in C[-\alpha,0]$*, после этого функция* $u(x,t)$ *находится по формуле* (10).

Пусть $f_1(x_0) = 0$, а $f_2(x_0) \neq 0$. Тогда существует функция $f_1(x) = \sin\mu_m x = \sin\pi m\widetilde{x}$, где m – некоторое фиксированное натуральное число, $\widetilde{x} = x/l$, такая, что $f_1(x_0) = \sin\pi m x_0 = 0$. Тогда для функции $f_1(x) = \sin\mu_m x$ и любых $g_1(t) \in C[0,\beta]$, $g_2(t) \in C[-\alpha,0]$ существует ненулевое решение задачи 4 при $h_1(t) \equiv 0$, $h_2(t) \equiv 0$, которое определяется формулой (27).

Пусть $f_2(x_0) = 0$, а $f_1(x_0) \neq 0$. Тогда существует функция $f_2(x) = \sin\mu_n x = \sin\pi n\widetilde{x}$, где n – некоторое фиксированное натуральное число, такая, что $f_2(x_0) = \sin\pi n\widetilde{x}_0 = 0$. Тогда для функции $f_2(x) = \sin\mu_n x$ и любых $g_1(t) \in C[0,\beta]$, $g_2(t) \in C[-\alpha,0]$ существует ненулевое решение задачи 4 при $h_1(t) \equiv 0$, $h_2(t) \equiv 0$, которое определяется формулой (37).

Пусть, существуют функции $f_1(x) = f_2(x) = \sin\mu_m x$, где m – некоторое фиксированное натуральное число, такие, что $f_1(x_0) = f_2(x_0) = \sin\mu_m x_0 = 0$.

Тогда для функций $f_1(x) = f_2(x) = \sin \mu_m x$ и любых $g_1(t) \in C[0, \beta]$, $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$ существует ненулевое решение задачи 4 при $h_1(t) \equiv 0$, $h_2(t) \equiv 0$

$$u_{3m}(x,t) = T_{3m}(t) \sin \mu_m x, \tag{46}$$

где

$$T_{3m}(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{3m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)} e^{-\lambda_m^2 t^{n+1}/(n+1)} + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t g_1(s) e^{-\lambda_m^2 (t^{n+1}/(n+1) - s^{n+1}/(n+1))}\, ds, & t > 0, \\ \dfrac{\omega_{3m}(\alpha)}{\Delta_m(\alpha)} \cos \lambda_m t - \omega_{1m}(-t), & t < 0, \end{cases}$$

$$\omega_{3m}(-t) = -\frac{g_1(0)}{\lambda_m} \sin \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \int_t^0 g_2(s) \sin\left[\lambda_m (t-s)\right] ds.$$

Аналогично п. 3 можно показать, что построенная функция (46) удовлетворяет условиям (2) – (9).

References

[1] I.M. Gelfand, *Some questions of analysis and differential equations*, Uspehi Mat. Nauk, **14**:3(87) (1959), 3–19. MR0121557

[2] Ya.S. Uflyand, *On the question of the propagation of oscillations in compound electric lines*, Engineering and Physics Journal, **7**:1 (1964), 89–92.

[3] Ya.S. Uflyand, I.T. Lozanovskaya, *On a Class of Problems of Mathematical Physics with a Mixed Spectrum of Eigenvalues*, Dokl. Academy of Sciences of the USSR, **164**:5 (1965), 1005–1007. Zbl 0137.18601

[4] T.D. Dzhuraev, A. Sopuev, M. Mamazhanov, *Boundary value problems for parabolic-hyperbolic equations*, Tashkent: Fan, 1986. MR1357670

[5] O.A. Ladyzhenskaya, L. Stupyalis, *On mixed-type equations*, Bulletin of Leningrad State University, A series of mathematics, mechanics and astronomy, **19**:4 (1965), 38–46. MR0212403

[6] L. Stupyalis, *Initial-boundary value problems for equations of mixed type*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **127** (1975), 135–170.

[7] M.M. Lavrentyev, K.G. Reznitskaya, V.G. Yakhno, *One-dimensional inverse problems of mathematical physics*, Novosibirsk: Nauka, 1982. MR0701852

[8] V.G. Romanov, *Inverse problems of mathematical physics*, Moscow: Nauka, 1984. MR0759893

[9] V.G. Romanov, S.I. Kabanikhin, *Inverse geo-electrical problems*, Moscow: Nauka, 1991. MR1190273

[10] A.M. Denisov, *Introduction to the theory of inverse problems*, MSU, Moskow, 1994.

[11] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, New York, Basel: Marcel Dekker Inc., 1999.

[12] V. Isakov, *Inverse problems for partial differential equations*, New-York: Springer, 2006. MR2193218

[13] S.I. Kabanikhin, *Inverse and incorrect tasks*, Novosibirsk: Siberian Scientific Publishing, 2009

[14] A.I. Prilepko, V.V. Soloviev, *Solvability theorems and the Rote method in inverse problems for a parabolic equation, I, II*, Differential Equations, **23**:10 (1987), 1791–1799; **23**:11 (1987), 1971–1980. MR0928863; MR0928246

[15] A.I. Prilepko, I.A. Vasin, *Study of uniqueness problems in some nonlinear inverse problems of hydrodynamics*, Differential Equations, **26**:1 (1990), 109–120. MR1050366

[16] A.I. Prilepko, A.B. Kostin, *Estimation of the spectral radius of an operator and the solvability of inverse problems for evolution equations*, Math. Notes, **53**:1 (1993), 63–66. MR1215162

[17] V.V. Soloviev, *Determination of the source and coefficients in a parabolic equation in the multidimensional case*, Differential Equations, **31**:6 (1995), 1060–1069.

[18] V.V. Soloviev, *The existence of a solution in the "whole" inverse problem of determining the source in a quasilinear parabolic equation*, Differential Equations, **32**:4 (1996), 536–544.

[19] A.B. Kostin, *The inverse problem of recovering the source in a parabolic equation under a condition of nonlocal observation*, Sbornik: Mathematics, **204**:10 (2013), 1391–1434. MR3137159

[20] A.I. Kozhanov, *A nonlinear loaded parabolic equation and a related inverse problem*, Math. Notes, **76**:6 (2004), 784–795. MR2127495

[21] A.I. Kozhanov, R.R. Safiullova, *Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **18**:1 (2010), 1–18. MR2629677

[22] A.G. Megrabov, *Forward and inverse problems for hyperbolic, elliptic, and mixed type equations*, VSP, Utrecht, Boston, 2003. MR2224547

[23] S.Z.Djamalov, *The linear inverse problem for the equation of Trikomi in three-dimensional space*, Bulletin KRASEC. Phys. & Math. Sci., **13**:2 (2016), 10–15.

[24] S.Z.Djamalov, *The linear inverse problem for the mixed type equation of the second kind of the second order with nonlocal boundary conditions in three-dimensional space*, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki., **17**:1 (2017), 7–13. Zbl 06964877

[25] K.B. Sabitov, *Direct and inverse problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type*, Moscow: Nauka, 2016.

[26] K.B. Sabitov, *Initial boundary and inverse problems for the inhomogeneous equation of a mixed parabolic-hyperbolic equation*, Math. Notes, **102**:3 (2017), 378–395. MR3691706

[27] K.B. Sabitov, L.Kh. Rakhmanova, *Initial-boundary value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type in a rectangular domain*, Differential Equations, **44**:9 (2008), 1218–1224. MR2484527

[28] K.B. Sabitov, *The Tricomi problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain*, Math. Notes, **86**:2 (2009), 249–254. MR2584560

[29] K.B. Sabitov, *Initial-boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with power-law degeneration on the type change line*, Differential Equations, **47**:10 (2011), 1490–1497. MR2918851

[30] K.B. Sabitov, S.N. Sidorov, *On a nonlocal problem for a degenerating parabolic-hyperbolic equation*, Differential Equations, **50**:3 (2014), 352—361. MR3300044

[31] K.B. Sabitov, S.N. Sidorov, *Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type*, Journal of Mathematical Sciences, **236**:6 (2019), 603–640.

[32] K.B. Sabitov, E.M. Safin, *The inverse problem for a mixed-type parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain*, Russian Math. (Iz. VUZ), **54**:4 (2010), 48–54. MR2779412

[33] K.B. Sabitov, E.M. Safin, *The inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type*, Math. Notes, **87**:6 (2010), 880–889. MR2840385

[34] K.B. Sabitov, S.N. Sidorov, *Inverse problem for degenerate parabolic-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition*, Russian Math. (Iz. VUZ), **59**:1 (2015), 39–50. MR3372221

[35] K.B. Sabitov, S.N. Sidorov, *Inverse problems for a degenerate mixed parabolic-hyperbolic equation for finding the time-dependent factors of the right sides*, Ufa Mathematical Journal (2018) (in the press).

[36] K.B. Sabitov, A.R. Zaynullov, *Inverse problems for determining initial conditions in a mixed problem for a telegraph equation*, Results of science and technology. A series of modern mathematics and its applications. Thematic Reviews, **141** (2017), 111–133. MR3801343

[37] K.B. Sabitov, *Functional, differential and integral equations*, Moscow: Vysshaya shkola, 2005.

Stanislav Nikolaevich Sidorov

Sterlitamak branch of the Institute of Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan,

68, Odesskaya str.,

Sterlitamak, 453103, Russia

E-mail address: stsid@mail.ru