

# СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1464–1477 (2019)

УДК 519.21

DOI 10.33048/semi.2019.16.101

MSC 60K05, 60F10

## ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПЕРВОГО ОБОВЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А.А. МОГУЛЬСКИЙ, Е.И. ПРОКОПЕНКО

**ABSTRACT.** We obtain the large deviation principles for multidimensional first compound renewal processes  $\mathbf{Z}(t)$  in the phase space  $\mathbb{R}^d$ , for this we find and investigate the rate function  $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$ . Also we find asymptotics for the Laplace transform of this process when the time goes to infinity, for this we find and investigate the so-called fundamental function  $A_Z(\boldsymbol{\mu})$ .

**Keywords:** compound multidimensional renewal process, large deviations, renewal measure, Cramer's condition, deviation (rate) function, second deviation (rate) function, fundamental function.

### 1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Условимся элементы  $d$ -мерного Евклидова пространства  $\mathbb{R}^d$  обозначать полужирными буквами, например,  $\mathbf{x} = (x_{(1)}, \dots, x_{(d)})$ ,  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ . Скалярное произведение для элементов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  будем обозначать

$$\mathbf{x}\mathbf{y} := x_{(1)}y_{(1)} + \dots + x_{(d)}y_{(d)}.$$

Норму в  $\mathbb{R}^d$  обозначим  $|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ . Случайные векторы со значениями в  $\mathbb{R}^d$  тоже будем обозначать полужирными буквами, например,  $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(d)})$ . Через

$$(\tau, \boldsymbol{\zeta}) = (\tau, \zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(d)})$$

будем обозначать случайный вектор в пространстве  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

MOGULSKII, A. A., PROKOPENKO, E. I., LARGE DEVIATION PRINCIPLE FOR MULTIDIMENSIONAL FIRST COMPOUND RENEWAL PROCESSES IN THE PHASE SPACE.

© 2019 Могульский А.А., Прокопенко Е.И..

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №18-11-00129).

Поступила 4 июня 2019 г., опубликована 17 октября 2019 г.

Пусть заданы «начальный» случайный вектор  $\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1)$  и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных невырожденных векторов  $\xi = (\tau, \zeta)$ ,  $\xi_2 = (\tau_2, \zeta_2)$ ,  $\xi_3 = (\tau_3, \zeta_3), \dots$ , где  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $\zeta_1, \zeta \in \mathbb{R}^d$ . Обозначим

$$T_0 = 0, \quad \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}; \quad T_n := \sum_{j=1}^n \tau_j, \quad \mathbf{Z}_n := \sum_{j=1}^n \zeta_j \quad \text{при } n \geq 1.$$

При  $t \geq 0$  определим

$$\nu(t) := \max\{k \geq 0 : T_k \leq t\}.$$

Обобщенный процесс восстановления (о.п.в.)  $\mathbf{Z}(t)$  определяется равенствами

$$\mathbf{Z}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)} \quad \text{при } t \geq 0, \quad \text{так что } \mathbf{Z}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \zeta_1, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

Траектории процесса  $\mathbf{Z}(t)$  непрерывны справа. О.п.в.  $Z(t)$  изучается в работах [1–5] наряду с процессом

$$\mathbf{Y}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)+1} = \mathbf{Z}(t) + \zeta_{\nu(t)+1},$$

который тоже называется о.п.в. Для того, чтобы отличать процессы  $\mathbf{Z}(t)$ ,  $\mathbf{Y}(t)$  в [3] предложено их называть *первым* и *вторым* о.п.в., соответственно. Как можно извлечь из результатов работ [1, 2], даже в одномерной случае теоремы о больших уклонениях для первого и второго о.п.в. могут, вообще говоря, различаться. Настоящая работа посвящена первому о.п.в.; изучению второго о.п.в. мы планируем посвятить другую работу. Обзор результатов для о.п.в. можно найти в [1, 2]. Ниже, при формулировании основных результатов настоящей работы мы упомянем известные нам результаты других авторов, относящиеся к близкой проблематике.

В дальнейшем везде будем предполагать, что выполнено условие Крамера в следующем виде

$$[\mathbf{C}_0] \quad \mathbf{E}e^{v|\zeta_1|} < \infty, \quad \mathbf{E}e^{v|\zeta|} < \infty \quad \text{при некотором } v > 0.$$

Для  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{1+d}$  положим

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) &:= \mathbf{E}e^{\lambda\tau + \mu\zeta}, & \psi_1(\lambda, \mu) &:= \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1 + \mu\zeta_1}, \\ A(\lambda, \mu) &:= \ln \psi(\lambda, \mu), & A_1(\lambda, \mu) &:= \ln \psi_1(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

Определим множества

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) < \infty\}, \quad \mathcal{A}_1 := \{(\lambda, \mu) : A_1(\lambda, \mu) < \infty\}.$$

Обозначим (следуя [3], обозначения относящиеся к первому о.п.в.  $\mathbf{Z}(t)$  мы снабдим нижним индексом  $Z$ ):

$$\mathcal{A}^{\leq 0} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) \leq 0\}, \quad \mathcal{A}_Z^{\leq 0} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) \leq 0, \lambda \leq \lambda_+\},$$

где

$$\lambda_+ := \sup\{\lambda \geq 0 : \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\}.$$

Ясно, что если  $\lambda_+ > 0$ , то в соответствии с условием  $[\mathbf{C}_0]$  внутренность  $(\mathcal{A})$  множества  $\mathcal{A}$  содержит точку  $(\lambda, \mu) = (0, \mathbf{0})$  и является областью аналитичности функции  $A(\lambda, \mu)$ . Определяющую роль в дальнейшем играют следующие две функции аргумента  $\mu \in \mathbb{R}^d$ :

$$(1.1) \quad A(\mu) := -\sup\{\lambda : (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}\},$$

где, по определению, считаем  $\sup\{\lambda : \lambda \in \emptyset\} = -\infty$ ;

$$(1.2) \quad A_Z(\boldsymbol{\mu}) := \max\{A(\boldsymbol{\mu}), -\lambda_+\}.$$

Как будет установлено ниже (см. теорему 2), функция  $A_Z(\boldsymbol{\mu})$  будет определять (при некоторых дополнительных условиях) логарифмическую асимптотику при  $t \rightarrow \infty$  преобразования Лапласа над распределением  $\mathbf{Z}(t)$ . Мы, следуя [1], назовем функцию  $A_Z(\boldsymbol{\mu})$  *базовой функцией* для процесса  $\mathbf{Z}(t)$ .

Для функции  $G = G(\boldsymbol{\mu})$ , отображающей  $\mathbb{R}^d$  в множество  $(-\infty, \infty]$ , определим преобразование Лежандра  $G^{\Sigma c} = G^{\Sigma c}(\boldsymbol{\alpha})$  (см., например, [13]), положив:

$$G^{\Sigma c}(\boldsymbol{\alpha}) := \sup_{\boldsymbol{\mu}} \{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - G(\boldsymbol{\mu})\}, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d.$$

Будем называть функцию  $H = H(\boldsymbol{\alpha})$ , отображающую  $\mathbb{R}^d$  в  $[0, \infty]$ , *компактной*, если для любого  $c \geq 0$  множество  $\{\boldsymbol{\alpha} : H(\boldsymbol{\alpha}) \leq c\}$  есть компакт в  $\mathbb{R}^d$ . Легко показать, что любая компактная функция  $H(\boldsymbol{\alpha})$  полунепрерывна снизу.

Обозначим далее для  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$

$$(1.3) \quad D = D(\boldsymbol{\alpha}) := A^{\Sigma c}(\boldsymbol{\alpha}), \quad D_Z = D_Z(\boldsymbol{\alpha}) := A_Z^{\Sigma c}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Как будет установлено ниже (см. теорему 1), функция  $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$  будет играть роль (при некоторых дополнительных условиях) функции уклонений при  $t \rightarrow \infty$  для процесса  $\mathbf{Z}(t)$ . Свойства функций  $A_Z(\boldsymbol{\mu})$ ,  $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$  изучены в [6]. Приведем некоторые свойства (см. теоремы 1.1, 1.2 из [6]):

**Лемма 1.1.** (i) *Функции  $A(\boldsymbol{\mu})$ ,  $A_Z(\boldsymbol{\mu})$  выпуклы и полунепрерывны снизу.*  
(ii) *Функции  $D(\boldsymbol{\alpha})$ ,  $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$  выпуклы, полунепрерывны снизу и компактны.*  
(iii) *Справедливы следующие формулы*

$$(1.4) \quad A(\boldsymbol{\mu}) = D^{\Sigma c}(\boldsymbol{\mu}), \quad A_Z(\boldsymbol{\mu}) = D_Z^{\Sigma c}(\boldsymbol{\mu}),$$

*так что пары  $A(\boldsymbol{\mu}), D(\boldsymbol{\alpha})$ ;  $A_Z(\boldsymbol{\mu}), D_Z(\boldsymbol{\alpha})$  являются парами взаимно сопряженных (относительно преобразования Лежандра) функций.*

(iv) *Для всех  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$  справедливо*

$$(1.5) \quad D_Z(\boldsymbol{\alpha}) = \inf_{\theta \in [0,1]} \{D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) + \lambda_+(1 - \theta)\}, \quad D(\boldsymbol{\alpha}) = D(1, \boldsymbol{\alpha}),$$

где

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\}.$$

(v) *Функции  $A_Z$ ,  $A$  совпадают (и, следовательно,  $D_Z = D$ ), тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$(1.6) \quad \lambda_+ \geq D(\mathbf{0}).$$

**Определение.** Будем говорить, что семейство  $\left\{ \frac{\mathbf{X}(t)}{t} \right\}_{t>0}$  случайных векторов в пространстве  $\mathbb{R}^d$  удовлетворяет принципу больших уклонений (п.б.у.) с компактной функцией уклонений (к.ф.у.)  $G(\boldsymbol{\alpha}) \geq 0$ , если функция  $G(\boldsymbol{\alpha})$  компактна и для любого измеримого множества  $B \subset \mathbb{R}^d$  справедливы неравенства

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{X}(t)}{t} \in B \right) \leq -G([B]),$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{X}(t)}{t} \in B \right) \geq -G((B)),$$

в которых для  $B \subset \mathbb{R}^d$ ,  $B \neq \emptyset$

$$G(B) := \inf_{\alpha \in B} G(\alpha), \quad G(\emptyset) := \infty,$$

и через  $[B]$ ,  $(B)$  обозначены замыкание и внутренность множества  $B$ , соответственно.

Основные результаты настоящей работы представлены теоремами 1, 2 (см. ниже).

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие допустимой неоднородности

$$(1.7) \quad (\mathcal{A}_Z^{\leq 0}) \subset \mathcal{A}_1, \quad \lambda_+^{(\tau_1)} := \sup\{\lambda : \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1} < \infty\} \geq \min\{\lambda_+, D(\mathbf{0})\}.$$

Пусть, кроме того, выполнено дополнительное условие

$$(1.8) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau \geq t) \geq -\lambda_+.$$

Тогда семейство  $\left\{\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}\right\}_{t>0}$  удовлетворяет п.б.у. в пространстве  $\mathbb{R}^d$  с к.ф.у.  $D_Z(\alpha)$ . Если дополнительно выполнено условие  $\lambda_+ \geq D(\mathbf{0})$ , то  $D_Z = D$ , и условие (1.8) является лишним.

Ранее в одномерном случае  $d = 1$  результат теоремы 1 был получен в [7] (для о.п.в.  $Z(t)$ , построенного по случайным векторам  $\{(\tau_k, F(\tau_k))\}_{k \geq 1}$ , где  $F : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  — ограниченная, непрерывная неслучайная функция) и в [8].

Обозначим

$$\mathcal{M}_Z := \{\mu \in \mathbb{R}^d : A_Z(\mu) < \infty\}.$$

множество в пространстве  $\mathbb{R}^d$ , во всех точках которого конечна функция  $A_Z(\mu)$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условие допустимой неоднородности (1.7) и дополнительное условие (1.8). Тогда для любого  $\mu \notin \partial \mathcal{M}_Z$  имеет место сходимость

$$(1.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}e^{\mu \mathbf{Z}(t)} = A_Z(\mu).$$

При этом в случае  $\lambda_+ \geq D(\mathbf{0})$  правая часть (1.9) равна  $A(\mu)$  и условие (1.8) является лишним.

Ранее в одномерном случае  $d = 1$  результат теоремы 2 был получен в [9]. В [10], тоже в одномерном случае асимптотика преобразования Лапласа над распределением о.п.в.  $Z(t)$  изучалась при условиях:  $\mathbf{E}\zeta = 0$ ,  $\{(\lambda, \mu) : \lambda < 0\} \subset \mathcal{A}$ .

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1, 2

2.1. **Доказательство теоремы 1.** Теорема 1 вытекает из лемм 2.1–2.3.

**Лемма 2.1.** (Локальный п.б.у. для процесса  $\mathbf{Z}(t)$ ) Пусть выполнены условия (1.7) и (1.8) теоремы 1.1. Тогда семейство  $\left\{\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}\right\}_{t>0}$  удовлетворяет локальному п.б.у. с к.ф.у.  $D_Z(\alpha)$ , т.е. для любых  $\alpha \in \mathbb{R}^d$ ,  $\varepsilon > 0$

$$(2.10) \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\delta\right) \leq -D_Z(\alpha);$$

$$(2.11) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon\right) \geq -D_Z(\alpha).$$

Если дополнительно  $\lambda_+ \geq D(\mathbf{0})$ , то  $D_Z = D$ , и условие (1.8) является лишним.

**Лемма 2.2.** (Экспоненциальная плотность для семейства  $\left\{\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ ) Семейство  $\left\{\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}\right\}_{t>0}$  случайных векторов экспоненциально плотно, т.е.

$$(2.12) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left( \left| \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \right| \geq K \right) = -\infty.$$

Леммы 2.1, 2.2 будут доказаны в разделах 3, 4, соответственно.

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, § 4.1 в [11]).

**Лемма 2.3.** Пусть семейство  $\left\{\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\right\}_{t>0}$  случайных векторов в  $\mathbb{R}^d$  является экспоненциально плотным и удовлетворяет локальному п.б.у. с к.ф.у.  $G(\alpha)$ . Тогда это семейство удовлетворяет п.б.у. с той же функцией уклонений  $G(\alpha)$ .

**2.2. Доказательство теоремы 2.** В основе доказательства теоремы 2 лежит лемма 2.4, которая является частным случаем теоремы 4.3.1 в [12].

**Лемма 2.4.** Пусть семейство  $\left\{\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\right\}_{t>0}$  случайных векторов удовлетворяет п.б.у. в пространстве  $\mathbb{R}^d$  с к.ф.у.  $G(\alpha)$ . Пусть для фиксированного  $\mu \in \mathbb{R}^d$  выполнено условие

$$(2.13) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}(e^{\mu \mathbf{X}(t)}; \mu \mathbf{X}(t) \geq Mt) = -\infty.$$

Тогда для этого  $\mu$  имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\mu \mathbf{X}(t)} = \sup_{\alpha} \{\mu \alpha - G(\alpha)\}.$$

Следующее утверждение будет доказано в разделе 4.

**Лемма 2.5.** Пусть выполнено условие допустимой неоднородности (1.7). Тогда для любого  $\mu \in (\mathcal{M}_Z)$  выполнено соотношение

$$(2.14) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}(e^{\mu \mathbf{Z}(t)}; \mu \mathbf{Z}(t) \geq Mt) = -\infty.$$

Осуществим теперь

*Доказательство теоремы 2.* Пусть сначала  $\mu \in (\mathcal{M}_Z)$ . Тогда в силу теоремы 1 и леммы 2.5 для семейства  $\left\{\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}\right\}$  выполнены условия леммы 2.4 с к.ф.у.  $D_Z(\alpha)$ . Поэтому в силу леммы 2.4 имеет место соотношение

$$(2.15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\mu \mathbf{Z}(t)} = \sup_{\alpha} \{\mu \alpha - D_Z(\alpha)\}.$$

Привлекая далее второе соотношение в (1.4), получаем, что правая часть (2.15) равна  $A_Z(\mu)$ . Таким образом, для случая  $\mu \in (\mathcal{M}_Z)$  соотношение (1.9) доказано.

Пусть теперь  $\mu \notin [\mathcal{M}_Z]$ . Тогда  $A_Z(\mu) = \infty$ , и для доказательства соотношения (1.9) достаточно установить оценку снизу

$$(2.16) \quad L_- := \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\mu \mathbf{Z}(t)} = \infty.$$

Для любых  $\alpha \in \mathbb{R}^d$ ,  $\varepsilon > 0$  имеем

$$\begin{aligned} L_- &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} \left( e^{\mu \mathbf{Z}(t)}; \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \\ &\geq \mu \alpha - |\mu| \varepsilon + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right). \end{aligned}$$

Применяя далее оценку снизу в локальном п.б.у. для  $\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}$  (см. лемму 2.1), получаем

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \geq -D_Z(\alpha),$$

поэтому

$$L_- \geq \mu \alpha - D_Z(\alpha) - |\mu| \varepsilon.$$

Из последнего в силу второго соотношения в утверждении (1.4) леммы 1.1 вытекает оценка снизу (2.16):

$$L_- \geq \sup_{\alpha} \{ \mu \alpha - D_Z(\alpha) \} - |\mu| \varepsilon = A_Z(\mu) - |\mu| \varepsilon = \infty.$$

Теорема 2 доказана. □

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1

**3.1. Дополнительные свойства функций  $D(\alpha)$ ,  $D_Z(\alpha)$ .** Функция уклонений для случайного вектора  $(\tau, \zeta)$  определяется как преобразование Лежандра  $A(\lambda, \mu)$  (см., например, [14]):

$$\Lambda(\theta, \alpha) := \sup_{\lambda, \mu} \{ \lambda \theta + \mu \alpha - A(\lambda, \mu) \}, \quad (\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Из теоремы 1.2 в [6] вытекает

**Лемма 3.1.** (i) Для всех  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  справедливо

$$(3.17) \quad D_Z(\alpha) = \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}_Z^{\leq 0}} \{ \lambda + \mu \alpha \}.$$

(ii) Для функции

$$D_\Lambda(\theta, \alpha) := \inf_{r > 0} r \Lambda \left( \frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r} \right),$$

для всех  $\theta > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  имеет место равенство

$$(3.18) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{\alpha' \in (\alpha)_\varepsilon} D_\Lambda(\theta, \alpha') = D(\theta, \alpha),$$

(iii) Если  $\lambda_+ < \infty$ , то для функции

$$\widehat{D}_Z(\alpha) := \inf_{\theta \in (0,1)} \{ D(\theta, \alpha) + \lambda_+(1 - \theta) \}$$

имеет место равенство

$$(3.19) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{\alpha' \in (\alpha)_\varepsilon} \widehat{D}_Z(\alpha') = D_Z(\alpha).$$

Заметим, что функция  $D_\Lambda(\theta, \alpha)$  впервые была определена и изучена в [15]. Пункт (i) леммы 3.1 нам понадобится для доказательства оценки сверху в л.п.б.у., пункты (ii), (iii) — для доказательства оценки снизу.

3.2. **Доказательство леммы 2.1.** (i). Доказательство оценки сверху (2.10).

Имеем

$$(3.20) \quad \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta, \tau_1 < t \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t), \quad P_n(t) := \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{Z}_n}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta, T_n \leq t < T_{n+1} \right).$$

Оценим сначала часть суммы в (3.20) по  $n > t^2$ :

$$\sum_1 := \sum_{n>t^2} P_n(t) \leq \sum_{n>t^2} \mathbf{P}(T_n \leq t) \leq \sum_{n>t^2} \mathbf{P}(T_n - \tau_1 \leq t) =: P_t.$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева при  $n \geq t^2 + 1$ ,  $\mathbf{E}\tau \geq \frac{t}{n-1} \geq \frac{1}{t}$  имеем

$$\mathbf{P}(T_n - \tau_1 \leq t) \leq e^{-(n-1)\Lambda_\tau(\frac{1}{t})},$$

где  $\Lambda_\tau(u) := \sup_\lambda \{\lambda u - \ln \mathbf{E}e^{\lambda\tau}\}$ . Поскольку  $\Lambda_\tau(\frac{1}{t}) \geq 1$  при всех достаточно больших  $t$ , то

$$(3.21) \quad \sum_1 \leq P_t \leq \frac{1}{1-e^{-1}} e^{-t^2}.$$

Оценим теперь сумму  $\sum_2$  в (3.20) по  $1 \leq n \leq t^2$ , для чего оценим сверху каждое слагаемое  $P_n(t)$ . Для произвольного вектора  $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A}_Z^{\leq 0})$ , имеем

$$(3.22) \quad P_n(t) = \mathbf{E} \left( e^{\pm\lambda T_n \pm \boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n}; \frac{\mathbf{Z}_n}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta, T_n \leq t < T_{n+1} \right).$$

На события

$$\left\{ \frac{\mathbf{Z}_n}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta, T_n \leq t < T_{n+1} \right\}$$

имеет место неравенство

$$(3.23) \quad e^{-\lambda T_n - \boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n} \leq e^{-\lambda t - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\alpha} t + \sqrt{d} |\boldsymbol{\mu}| \delta t} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\}.$$

Следовательно, из (3.22), (3.23) получаем

$$(3.24) \quad \begin{aligned} P_n(t) &\leq e^{-\lambda t - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\alpha} t + \sqrt{d} |\boldsymbol{\mu}| \delta t} \mathbf{E} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\} e^{\lambda T_n + \boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n} \\ &\leq e^{-\lambda t - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\alpha} t + \sqrt{d} |\boldsymbol{\mu}| \delta t} \mathbf{E} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\} \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \psi^{n-1}(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \end{aligned}$$

причем второй множитель в правой части (3.24) конечен в силу  $\lambda < \lambda_+$ , третий конечен в силу условия допустимой неоднородности (1.7), а последний не превосходит 1, так как  $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_Z^{\leq 0}$ . Таким образом, в силу (3.20)–(3.24) имеем для произвольных  $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A}_Z^{\leq 0})$  неравенство

$$L_+ := \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta, \tau_1 < t \right) \leq -(\lambda + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\alpha}).$$

Поскольку к любой точке  $(\lambda_0, \boldsymbol{\mu}_0)$  границы  $\partial \mathcal{A}_Z^{\leq 0}$  можно приблизиться точками  $(\lambda_n, \boldsymbol{\mu}_n)$  из внутренней  $(\mathcal{A}_Z^{\leq 0})$ , то последнее неравенство справедливо для всех  $(\lambda, \boldsymbol{\mu})$  из замкнутого выпуклого множества  $\mathcal{A}_Z^{\leq 0}$ . Следовательно, мы доказали, что

$$L_+ \leq - \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_Z^{\leq 0}} \{\lambda + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\alpha}\} = -D_Z(\boldsymbol{\alpha}).$$

Последнее равенство выполнено в силу равенства (3.17).

Получили

$$(3.25) \quad L_+ \leq -D_Z(\boldsymbol{\alpha}).$$

Оценим теперь

$$\mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta, \tau_1 \geq t \right) = \mathbf{P}(\tau_1 \geq t, \mathbf{0} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta).$$

Очевидно, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau_1 \geq t, \mathbf{0} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta) \leq \begin{cases} -\lambda_+^{(\tau_1)}, & \text{если } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}; \\ -\infty, & \text{если } \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Поэтому в силу условия допустимой неоднородности (см. второе соотношение в (1.7)) и равенства  $D_Z(0) = \min \{\lambda_+, D(0)\}$ , которое следует из первого равенства в (1.5)), имеем

$$(3.26) \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta, \tau_1 \geq t \right) \leq -D_Z(\boldsymbol{\alpha}).$$

Из (3.25), (3.26) следует оценка сверху (2.10).

(ii). Доказательство оценки снизу (2.11). Рассмотрим сначала случай  $\lambda_+ < D(0)$ , и тогда выполнено дополнительное условие (1.8). Для произвольных фиксированных  $\theta \in (0, 1)$ ,  $r > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  и для достаточно малого  $\delta > 0$  при  $n := [rt]$  имеем

$$\mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right) \geq \mathbf{P} \left( \frac{T_n}{n} \in \frac{t}{n}(\theta)_\delta, \frac{\mathbf{Z}_n}{n} \in \frac{t}{n}(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right) \mathbf{P}(\tau_{n+1} \geq t(1 - \theta + 2\delta)).$$

В силу известной оценки снизу (локальный п.б.у. для случайного блуждания) (см., например, теорему 1.2.1 в [11])

$$(3.27) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left( \frac{T_n}{n} \in \frac{t}{n}(\theta)_\delta, \frac{\mathbf{Z}_n}{n} \in \frac{t}{n}(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right) \geq -\Lambda \left( \frac{\theta}{r}, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r} \right),$$

и в силу условия (1.8) имеем

$$(3.28) \quad \begin{aligned} L_-(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon) &:= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right) \\ &\geq -r\Lambda \left( \frac{\theta}{r}, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r} \right) - \lambda_+(1 - \theta + 2\delta). \end{aligned}$$

Покажем, что правая часть (3.28) может быть заменена на  $-D_Z(\boldsymbol{\alpha})$ . Устремляя  $\delta$  к нулю и максимизируя правую часть (3.28) по  $r > 0$ , получаем

$$(3.29) \quad L_-(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon) \geq -D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}) - \lambda_+(1 - \theta).$$

Выберем теперь произвольные  $\boldsymbol{\alpha}' \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon$  и  $\varepsilon' > 0$  такие, что выполняется  $(\boldsymbol{\alpha}')_{\varepsilon'} \subset (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon$ . Применяя (3.29) для  $\boldsymbol{\alpha}'$  и  $\varepsilon'$ , получаем

$$(3.30) \quad L_-(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon) \geq L_-(\boldsymbol{\alpha}', \varepsilon') \geq -D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}') - \lambda_+(1 - \theta).$$

Максимизируя далее правую часть (3.30) по  $\boldsymbol{\alpha}' \in (\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon'}$ , получаем для любого  $\varepsilon' \in (0, \varepsilon]$

$$(3.31) \quad L_-(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon) \geq - \inf_{\boldsymbol{\alpha}' \in (\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon'}} D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}') - \lambda_+(1 - \theta).$$

Поскольку в силу (3.18) справедливо

$$\lim_{\varepsilon' \downarrow 0} \inf_{\boldsymbol{\alpha}' \in (\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon'}} D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}') = D(\theta, \boldsymbol{\alpha}),$$

то из (3.31) получаем

$$(3.32) \quad L_-(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon) \geq -D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) - \lambda_+(1 - \theta).$$

Выберем опять произвольные  $\alpha' \in (\alpha)_\varepsilon$  и  $\varepsilon' > 0$  такие, что выполняется  $(\alpha')_{\varepsilon'} \subset (\alpha)_\varepsilon$ . Применяя неравенство (3.32) для  $\alpha'$  и  $\varepsilon'$ , получаем

$$(3.33) \quad L_-(\alpha, \varepsilon) \geq L_-(\alpha', \varepsilon') \geq -D(\theta, \alpha') - \lambda_+(1 - \theta).$$

Максимизируя правую часть (3.33) по  $\theta \in (0, 1)$ , приходим к неравенству

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq - \inf_{\theta \in (0, 1)} \{D(\theta, \alpha) + \lambda_+(1 - \theta)\} =: -\widehat{D}_Z(\alpha').$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по  $\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}$ , приходим к неравенству

$$(3.34) \quad L_-(\alpha, \varepsilon) \geq - \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} \widehat{D}_Z(\alpha').$$

Тогда из (3.19), (3.34) получаем

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -D_Z(\alpha)$$

—требуемое неравенство (2.11) для рассматриваемого случая  $\lambda_+ < D(0)$ .

Докажем теперь оценку (2.11) в случае  $\lambda_+ \geq D(0)$ , и тогда дополнительное условие (1.8) отсутствует.

Рассмотрим для  $0 < c < \infty$ ,  $0 < R < \infty$ ,  $q \in (0, 1]$  класс  $\mathcal{K}(c, R, q)$  случайных векторов  $(\tau, \zeta) \in \mathbb{R}^{d+1}$  таких, что  $\mathbf{P}(\tau \geq c, |\zeta| \leq R) \geq q$ . Рассмотрим для любого  $T > 0$  событие

$$\mathcal{B}_T := \{\eta(T) \leq k(T), |\mathbf{Z}_m| \leq mR, \text{ для всех } m \in \{1, \dots, \eta(T)\}\},$$

где

$$\eta(t) = \nu(t) + 1, \quad k(T) := \left\lceil \frac{T}{c} \right\rceil + 1.$$

**Лемма 3.2.** Пусть однородное случайное блуждание  $(T_k, \mathbf{Z}_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , порождено последовательностью сумм независимых случайных векторов  $(\tau_i, \zeta_i)$  с общим с  $(\tau, \zeta)$  распределением и пусть  $(\tau, \zeta) \in \mathcal{K}(c, R, q)$ . Тогда для любого  $T > 0$

$$\mathbf{P}(\mathcal{B}_T) \geq q^{k(T)}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим события

$$C_k := \{\tau_k \geq c, |\zeta_k| \leq R\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда, легко заметить, что выполнено включение

$$\bigcap_{k=1}^{k(T)} C_k \subseteq \mathcal{B}_T.$$

Откуда и вытекает утверждение леммы 3.2.  $\square$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству оценки снизу (2.11). Рассмотрим для произвольных фиксированных  $r > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  и для достаточно малого  $\delta > 0$  при  $n := [rt]$  событие

$$C_t(\varepsilon, \delta) := \left\{ \frac{T_n}{n} \in \frac{t}{n}(1 - \delta)_\delta, \quad \frac{\mathbf{Z}_n}{n} \in \frac{t}{n}(\alpha)_{\frac{\varepsilon}{2}} \right\}.$$

На этом событии сумма  $T_n$  находится левее значения  $t$  и расстояние  $\mathcal{T} := t - T_n$  лежит в пределах

$$(3.35) \quad \mathcal{T} \in (0, 2t\delta).$$

Рассмотрим «новое» блуждание

$$\{(T'_k, \mathbf{Z}'_k); k \geq 0\}, \quad (T'_k, \mathbf{Z}'_k) := (T_{n+k} - T_n, \mathbf{Z}_{n+k} - \mathbf{Z}_n),$$

которое не зависит от блуждания

$$\{(T_k, \mathbf{Z}_k); 0 \leq k \leq n\}.$$

Для нового блуждания рассмотрим событие

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}} = \{\eta'(\mathcal{T}) \leq k(\mathcal{T}), \quad |\mathbf{Z}'_m| \leq mR, \quad \text{для всех } m \in \{1, \dots, \eta'(\mathcal{T})\}\},$$

связанное с моментом  $\eta'(T)$  первого прохождения случайного уровня  $\mathcal{T}$ . Очевидно, что для некоторых  $0 < c < \infty$ ,  $0 < R < \infty$ ,  $q \in (0, 1]$  выполняется  $(\tau, \zeta) \in \mathcal{K}(c, R, q)$ , поэтому можно воспользоваться леммой 3.2. Заметим прежде, что на событии  $C_t(\varepsilon, \delta) \cap \mathcal{B}_{\mathcal{T}}$  справедливо  $\nu(t) = n + \eta'(\mathcal{T}) - 1$ , поэтому

$$(3.36) \quad \mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}_n + \mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})-1}.$$

В силу выбора события  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$  и в силу (3.35) справедлива оценка

$$|\mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})-1}| \leq \frac{\mathcal{T}R}{c} \leq \frac{2t\delta R}{c},$$

поэтому при  $\frac{2\delta R}{c} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$  выполняется включение

$$\left\{ \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right\} \supset C_t(\varepsilon, \delta) \cap \mathcal{B}_{\mathcal{T}}.$$

Следовательно, используя лемму 3.2, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right) &\geq \mathbf{P}(\mathcal{B}_{\mathcal{T}} \cap C_t(\varepsilon, \delta)) = \int_0^\infty \mathbf{P}(\mathcal{B}_{\mathcal{T}} \cap C_t(\varepsilon, \delta), \mathcal{T} \in d\mathcal{T}) \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P}(\mathcal{B}_{\mathcal{T}}) \mathbf{P}(C_t(\varepsilon, \delta), \mathcal{T} \in d\mathcal{T}) \\ &\geq \int_0^\infty q^{k(\mathcal{T})} \mathbf{P}(C_t(\varepsilon, \delta), \mathcal{T} \in d\mathcal{T}) = \mathbf{E} \left( q^{k(\mathcal{T})}; C_t(\varepsilon, \delta) \right); \end{aligned}$$

при этом, на событии  $C_t(\varepsilon, \delta)$  справедливо  $\mathcal{T} \leq 2t\delta$ . Следовательно,

$$\mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right) \geq q^{\frac{2t\delta}{c} + 1} \mathbf{P}(C_t(\varepsilon, \delta)).$$

Используя далее оценку (3.27), получаем

$$\begin{aligned} L_-(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon) &:= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right) \\ &\geq -r\Lambda \left( \frac{1-\delta}{r}, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r} \right) + \frac{2\delta}{c} \ln q. \end{aligned}$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по  $r > 0$ , получаем для  $\boldsymbol{\beta} := \frac{1}{1-\delta}\boldsymbol{\alpha}$

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon) \geq -D_\Lambda(1-\delta, \boldsymbol{\alpha}) + \frac{2\delta}{c} \ln q = -(1-\delta)D_\Lambda(1, \boldsymbol{\beta}) + \frac{2\delta}{c} \ln q.$$

Выбирая далее  $\boldsymbol{\alpha}' \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon$  и  $\varepsilon' > 0$  такие, что  $(\boldsymbol{\alpha}')_{\varepsilon'} \subset (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon$ , получаем для  $\boldsymbol{\beta}' := \frac{1}{1-\delta}\boldsymbol{\alpha}'$

$$L_-(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon) \geq -(1-\delta)D_\Lambda(1, \boldsymbol{\beta}') + \frac{2\delta}{c} \ln q.$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по  $\alpha' \in (\alpha)_\varepsilon$ , получаем

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -(1 - \delta) \inf_{\alpha' = (1-\delta)\beta' \in (\alpha)_\varepsilon} D_\Lambda(1, \beta') + \frac{2\delta}{c} \ln q.$$

Поскольку для любого  $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$  и всех достаточно малых  $\delta > 0$  правая часть последнего неравенства не превосходит

$$-(1 - \delta) \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} D_\Lambda(1, \alpha') + \frac{2\delta}{c} \ln q,$$

то, переходя к пределу по  $\delta \rightarrow 0$ , получаем

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq - \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} D_\Lambda(1, \alpha').$$

Переходя далее в правой части последнего неравенства к пределу по  $\varepsilon' \rightarrow 0$ , получаем в силу (3.18)

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq - \lim_{\varepsilon' \downarrow 0} \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} D_\Lambda(1, \alpha') = -D(1, \alpha) = -D_Z(\alpha)$$

(мы воспользовались тем, что при  $\lambda_+ \geq D(0)$  последнее равенство имеет место — свойство (v) леммы 1.1).

Оценка (2.11) доказана. Лемма 2.1 доказана. □

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 2.2, 2.5

*Доказательство леммы 2.2.* Для любого  $K \in (0, \infty)$  имеем

$$\begin{aligned} \{|Z(t)| \geq Kt\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_n \leq t < T_{n+1}, |Z_n| \geq Kt\} \\ &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ T_n \leq t < T_{n+1}, \sum_{k=1}^n \gamma_k \geq Kt \right\}, \end{aligned}$$

где  $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность независимых случайных величин с общим  $\gamma = |\zeta_1| + |\zeta_2|$  распределением. Поэтому для любого  $M < \infty$

$$(4.37) \quad \mathbf{P}(|Z(t)| \geq K) \leq P_1(t, M) + P_2(t, M, K),$$

где

$$P_1(t, M) := \sum_{n \geq Mt} \mathbf{P}(T_n - T_1 \leq t), \quad P_2(t, M, K) := Mt \mathbf{P}(\gamma_1 + \dots + \gamma_{[Mt]} \geq Kt).$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева для  $(n-1)\mathbf{E}\tau \geq t$  (допускается  $\mathbf{E}\tau = +\infty$ ), имеем

$$\mathbf{P}(T_n - T_1 \leq t) \leq e^{-(n-1)\Lambda(\frac{t}{n-1})},$$

где  $\Lambda(\theta)$  — функция уклонений для случайной величины  $\tau$ . Поскольку  $\mathbf{P}(\tau > 0) = 1$ , то  $\Lambda(\theta) \uparrow \infty$  при  $\theta \downarrow 0$ , и поэтому

$$\sum_{n \geq Mt} \mathbf{P}(T_n - \tau_1 \leq t) \leq \sum_{n \geq Mt} e^{-(n-1)\Lambda(\frac{1}{M})} = \frac{e^{-Mt\Lambda(\frac{1}{M})}}{1 - e^{-M\Lambda(\frac{1}{M})}}.$$

Далее, слагаемые  $\gamma_k$  удовлетворяют моментному условию  $[C_0]$ . Поэтому для любого  $N < \infty$  найдутся  $M_N < \infty$  и  $K_N < \infty$  такие, что

$$(4.38) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln P_1(t, M_N) \leq -N, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln P_2(t, M_N, K_N) \leq -N.$$

В свою очередь, из соотношений (4.37), (4.38) вытекает утверждение леммы 2.2. Лемма 2.2 доказана.  $\square$

*Доказательство леммы 2.5.* Пусть  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ . Тогда

$$E_t(\boldsymbol{\mu}, M) := \mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}(t)}; \boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}(t) \geq Mt) = \mathbf{P}(0 \geq Mt) = 0,$$

и соотношение (2.14) очевидным образом выполняется.

Пусть теперь  $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\mu} \in (\mathcal{M}_Z)$ . Тогда найдется  $\varepsilon > 0$  такое, что  $(1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu} \in (\mathcal{M}_Z)$ , т.е.  $A((1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \leq A_Z((1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) < \infty$ . Возьмём  $\lambda = -A((1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu})$ , тогда

$$(4.39) \quad A(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \leq 0.$$

Поэтому для этих фиксированных  $\lambda$ ,  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\varepsilon$  имеем

$$\begin{aligned} E_t(\boldsymbol{\mu}, M) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n}; T_n \leq t < T_{n+1}, \boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n \geq Mt) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(e^{\pm\lambda T_n + (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n - \varepsilon\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n}; T_n \leq t < T_{n+1}, \boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n \geq Mt) \\ &\leq e^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(e^{\lambda T_n + (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n}; T_n \leq t < T_{n+1}, \boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n \geq Mt) \\ &=: e^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} \sum_1. \end{aligned}$$

Для того, чтобы оценить сверху сумму  $\sum_1$ , определим последовательность  $\{(\hat{\tau}_k, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k)\}_{k \geq 1}$  независимых случайных векторов, положив для борелевского множества  $B \subset \mathbb{R}^{d+1}$

$$\mathbf{P}((\hat{\tau}_k, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k) \in B) := \frac{1}{\psi_k(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu})} \mathbf{E}(e^{\lambda\tau_k + (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_k}; (\tau_k, \boldsymbol{\zeta}_k) \in B),$$

где  $\psi_k(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_k + (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_k}$ . По этой последовательности построим суммы  $(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{Z}}_n)$ . Используя новые обозначения, представим каждое слагаемое суммы  $\sum_1$  в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(e^{\lambda T_n + (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n}; T_n \leq t < T_{n+1}, \boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n \geq Mt) \\ &= \psi_1(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \psi_2^{n-1}(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \mathbf{P}(\hat{T}_n \leq t < \hat{T}_n + \tau_{n+1}, \boldsymbol{\mu}\hat{\mathbf{Z}}_n \geq Mt) \\ &\leq \psi_1(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \psi_2^{n-1}(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \mathbf{P}(\hat{T}_n \leq t). \end{aligned}$$

Поскольку в силу (4.39) имеем  $(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_Z^{\leq 0}$ , то  $\psi_2(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \leq 1$  и в силу условия допустимой неоднородности (1.7)  $\psi_1(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \leq C$  для некоторого  $C < \infty$ . Поэтому

$$(4.40) \quad E_t(\boldsymbol{\mu}, M) \leq C e^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} \sum_2, \quad \sum_2 := \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(\hat{T}_n \leq t).$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева для  $(n - 1)\mathbf{E}\hat{\tau} \geq t$ , имеем

$$\mathbf{P}(\hat{T}_n \leq t) \leq \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leq t) \leq e^{-(n-1)\hat{\Lambda}(\frac{t}{n-1})},$$

где  $\hat{\Lambda}(\alpha)$ —функция уклонений для случайной величины  $\hat{\tau} := \hat{\tau}_2$ . Поскольку  $\mathbf{P}(\hat{\tau} > 0) = 1$ , то  $\hat{\Lambda}(\alpha) \uparrow \infty$  при  $\alpha \downarrow 0$ , и поэтому при  $t \rightarrow \infty$

$$(4.41) \quad \sum_{n \geq t^2} \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leq t) \leq \sum_{n \geq t^2} e^{-(n-1)\hat{\Lambda}(\frac{t}{n-1})} = o(1).$$

Следовательно, при всех достаточно больших  $t$

$$\sum_2 = \sum_{1 \leq n \leq t^2-1} \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leq t) + \sum_{n \geq t^2} \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leq t) \leq t^2 - 1 + o(1) \leq t^2,$$

так что при тех же  $t$  в силу (4.40) имеем для любого  $M$  и для выбранных ранее фиксированных  $\lambda, \mu, \varepsilon$  неравенство

$$E_t(\mu, M) \leq C e^{|\lambda|t - \varepsilon M t^2}.$$

Поскольку из последнего неравенства вытекает соотношение (2.14), то лемма 2.5 доказана.  $\square$

#### REFERENCES

- [1] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. I*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 491–514. MR3879625
- [2] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. II*, Siberian Mathematical Journal, **59**:4 (2018), 731–750. MR3879647
- [3] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. I*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 475–502. Zbl 1395.60102
- [4] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. II*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 503–527. Zbl 1395.60102Zbl 1395.60103
- [5] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. III*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 528–553. Zbl 1395.60104
- [6] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *The rate function and the fundamental function for multidimensional renewal process*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1449–1463.
- [7] R. Lefevere, M. Mariani, L. Zambotti, *Large deviations for renewal processes*, Stochastic Processes and their Applications, **121**: 10 (2011), 2243–2271. MR2822776
- [8] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Large deviation principles for the finite-dimensional distributions of compound renewal processes*, Sib. Math. J., **56**:1 (2015), 28–53. MR3407938
- [9] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Properties of the deviation rate function and the asymptotics for the Laplace transform of the distribution of a compound renewal process*, Teor. Veroyatnost. i Primenen., **64**:4 (2019), 625–641.
- [10] B. Tsirelson, *From uniform renewal theorem to uniform large and moderate deviations for renewal-reward processes*, Electron. Commun. Probab. **18**:52 (2013), 1–13. MR3078015
- [11] A.A. Borovkov, *Asymptotic analysis of random walks. Rapidly decreasing distributions of increments*, Moscow: Fizmatlit, 2013. Zbl 1351.60003
- [12] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Berlin: Springer-Verlag, 2010. MR2571413
- [13] Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton: Princeton University Press, 1970. MR0274683
- [14] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, London: Springer-Verlag, 2013. MR3086572
- [15] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *The second rate function and the asymptotic problems of renewal and hitting the boundary for multidimensional random walks*, Sib. Math. J., **37**:4 (1996), 647–682. MR1643358

ANATOLII ALFREDOVICH MOGULSKII  
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
4, КОПТУГА АВЕ.,  
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA  
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
1, PIROGOVA STR.,  
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA  
*E-mail address:* mogul@math.nsc.ru

EVGENII IGOREVICH PROKOPENKO  
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
1, PIROGOVA STR.,  
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA  
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
4, КОПТУГА АВЕ.,  
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA  
*E-mail address:* evgenii.prokopenko@gmail.com