S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1478–1492 (2019) УДК 519.21
DOI 10.33048/semi.2019.16.102 MSC 60K05, 60F10

ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВТОРОГО ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А.А. МОГУЛЬСКИЙ, Е.И. ПРОКОПЕНКО

Abstract. We obtain the large deviation principles for multidimensional second compound renewal processes $\mathbf{Y}(t)$ in the phase space $\mathbb{R}^d$, for this we find and investigate the rate function $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$. Also we find asymptotics for the Laplace transform of this process when the time goes to infinity, for this we find and investigate the so-called fundamental function $A_Y(\boldsymbol{\mu})$.

Keywords: compound multidimensional renewal process, large deviations, renewal measure, Cramer's condition, deviation (rate) function, second deviation (rate) function.

1. Введение. Формулировки основных утверждений

Условимся элементы d-мерного Евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ обозначать полужирными буквами, например, $\mathbf{x} = (x_{(1)}, \cdots, x_{(d)})$, $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$. Скалярное произведение для элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать

$$\mathbf{xy} := x_{(1)}y_{(1)} + \cdots + x_{(d)}y_{(d)}.$$

Норму в $\mathbb{R}^d$ обозначим $|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{xx}}$. Случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$ тоже будем обозначать полужирными буквами, например, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{(1)}, \cdots, \zeta_{(d)})$. Через

$$(\tau, \boldsymbol{\zeta}) = (\tau, \zeta_{(1)}, \cdots, \zeta_{(d)})$$

будем обозначать случайный вектор в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Mogulskii, A.A., Prokopenko, E.I., Large deviation principle for multidimensional second compound renewal processes in the phase space.

© 2019 Могульский А.А., Прокопенко Е.И.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН проекты №0314-2019-0008, №0250-2019-0001 и гранта РФФИ №18-01-00101.

Поступила 4 июня 2019 г., опубликована 17 октября 2019 г.

Пусть заданы «начальный» случайный вектор $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$ и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных невырожденных векторов $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \boldsymbol{\zeta})$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (\tau_2, \boldsymbol{\zeta}_2)$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (\tau_3, \boldsymbol{\zeta}_3), \ldots$, где $\tau_1 \geqslant 0$, $\tau > 0$, $\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^d$. Обозначим

$$T_0 = 0, \quad \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}; \quad T_n := \sum_{j=1}^{n} \tau_j, \quad \mathbf{Z}_n := \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\zeta}_j \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

При $t \geqslant 0$ определим два функционала

$$\eta(t) := \min\{k \geqslant 0 : \ T_k > t\}, \qquad \nu(t) := \max\{k \geqslant 0 : \ T_k \leqslant t\},$$

так что выполняется $\nu(t) = \eta(t) + 1$. *Первый обобщенный процесс восстановления* (о.п.в.) $\mathbf{Z}(t)$ определяется равенствами

$$\mathbf{Z}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{Z}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \boldsymbol{\zeta}_1, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

В работе [4] установлен принцип больших уклонений и логарифмическая асимптотика преобразования Лапласа для процесса $\mathbf{Z}(t)$. Также, в работе [4] приведено сравнение известных результатов с установленными.

В данной же работе мы будем изучать *второй* о.п.в.

$$\mathbf{Y}(t) := \mathbf{Z}_{\eta(t)} = \mathbf{Z}(t) + \boldsymbol{\zeta}_{\eta(t)} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{cases} \boldsymbol{\zeta}_1, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{\zeta}_2, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

Как оказалось, большие уклонения для процессов $\mathbf{Z}(t), \mathbf{Y}(t)$ вообще говоря различаются, что следует из данной работы и работы [4].

В известной нам литературе грубая асимптотика больших уклонений изучалась только для процесса $\mathbf{Z}(t)$, причем в том случае, когда функции уклонений для процессов $\mathbf{Z}(t), \mathbf{Y}(t)$ совпадают. Обзор различных результатов связанных с о.п.в. можно найти в [1].

В дальнейшем везде будем предполагать, что выполнено условие Крамера в следующем виде

$[\mathbf{C}_0]$ $\qquad \mathbf{E}e^{v|\boldsymbol{\zeta}_1|} < \infty$, $\mathbf{E}e^{v|\boldsymbol{\zeta}|} < \infty$ *при некотором* $v > 0$.

Для $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{1+d}$ положим

$$\psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}}, \quad \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1 + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_1},$$
$$A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln \psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \quad A_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}).$$

Определим множества

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}, \quad \mathcal{A}_1 := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}.$$

Ясно, что внутренности $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}_1)$ множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ являются областями аналитичности функций $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, $A_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, соответственно. Обозначим

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \leqslant 0\}, \quad \mathcal{A}_Y^{\leqslant 0} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \leqslant 0, \quad \boldsymbol{\mu} \in [\mathcal{M}]\},$$

где

$$\mathcal{M} := \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{E}e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}} < \infty\},$$

$[\mathcal{M}]$—замыкание множества $\mathcal{M}$. Определяющую роль в дальнейшем играют следующие функции аргумента $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$:

$$A(\boldsymbol{\mu}) := -\sup\{\lambda : \ (\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}\}, \tag{1.1}$$

где, по определению, считаем $\sup\{\lambda:\ \lambda\in\emptyset\}=-\infty$;

$$A_Y(\boldsymbol{\mu}) := \begin{cases} A(\boldsymbol{\mu}), & \text{если } \boldsymbol{\mu}\in[\mathcal{M}]; \\ \infty, & \text{если } \boldsymbol{\mu}\notin[\mathcal{M}]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Как будет установлено ниже (см. теорему 2), функция $A_Y(\boldsymbol{\mu})$ будет определять (при некоторых дополнительных условиях) логарифмическую асимптотику при $t\to\infty$ преобразования Лапласа над распределением $\mathbf{Y}(t)$. Мы, следуя [1], назовем функцию $A_Y(\boldsymbol{\mu})$ *базовой функцией* для процесса $\mathbf{Y}(t)$.

Для функции $G=G(\boldsymbol{\mu})$, отображающей $\mathbb{R}^d$ в множество $(-\infty,\infty]$, определим преобразование Лежандра $G^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}=G^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}(\boldsymbol{\alpha})$, положив:

$$G^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}(\boldsymbol{\alpha}) := \sup_{\boldsymbol{\mu}}\{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}-G(\boldsymbol{\mu})\},\quad \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^d.$$

Будем называть функцию $H=H(\boldsymbol{\alpha})$, отображающую $\mathbb{R}^d$ в $[0,\infty]$, *компактной*, если для любого $c\geqslant 0$ множество $\{\boldsymbol{\alpha}:\ H(\boldsymbol{\alpha})\leqslant c\}$ есть компакт в $\mathbb{R}^d$. Легко показать, что любая компактная функция $H(\boldsymbol{\alpha})$ полунепрерывна снизу.

Обозначим далее для $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^d$

$$D=D(\boldsymbol{\alpha}) := A^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}(\boldsymbol{\alpha}),\quad D_Y=D_Y(\boldsymbol{\alpha}) := A_Y^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{1.3}$$

Как будет установлено ниже (см. теорему 1), функция $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$ будет играть роль (при некоторых дополнительных условиях) функции уклонений при $t\to\infty$ для процесса $\mathbf{Y}(t)$. Свойства функций $A_Y(\boldsymbol{\mu})$, $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$ изучены [3]. Приведем некоторые свойства (см. теоремы 1.1, 1.2 из [3]):.

Лемма 1.1. *(i) Функции $A(\boldsymbol{\mu})$, $A_Y(\boldsymbol{\mu})$ выпуклы и полунепрерывны снизу.*

(ii) Функции $D(\boldsymbol{\alpha})$, $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$ выпуклы, полунепрерывны снизу и компактны.

(iii) Справедливы следующие формулы

$$A(\boldsymbol{\mu})=D^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}(\boldsymbol{\mu}),\quad A_Y(\boldsymbol{\mu})=D_Y^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}(\boldsymbol{\mu}), \tag{1.4}$$

так что пары $A(\mu),D(\alpha)$; $A_Y(\mu),D_Y(\alpha)$ являются парами взаимно сопряженных (относительно преобразования Лежандра) функций.

(iv) Для всех $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^d$ справедливо

$$D_Y(\boldsymbol{\alpha})=\inf_{\boldsymbol{\beta}}\{D(\boldsymbol{\beta})+V^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\}, \tag{1.5}$$

где

$$V(\boldsymbol{\mu}) := \begin{cases} 0, & \text{если } \boldsymbol{\mu}\in[\mathcal{M}]; \\ \infty, & \text{если } \boldsymbol{\mu}\notin[\mathcal{M}]. \end{cases} \tag{1.6}$$

(v) Функции A_Y, A совпадают (и, следовательно, $D_Y=D$), тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0}\subset\{(\lambda,\boldsymbol{\mu}):\ \boldsymbol{\mu}\in[\mathcal{M}]\}. \tag{1.7}$$

Определение. *Будем говорить, что семейство $\left\{\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов в пространстве $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет принципу больших уклонений (п.б.у.) с компактной функцией уклонений (к.ф.у.) $G(\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$, если функция $G(\boldsymbol{\alpha})$ компактна и для любого измеримого множества $B\subset\mathbb{R}^d$ справедливы неравенства*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\in B\right)\leqslant -G\left([B]\right),$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{X}(t)}{t} \in B\right) \geqslant -G\left((B)\right),$$

в которых для $B \subset \mathbb{R}^d$, $B \neq \emptyset$

$$G(B) := \inf_{\boldsymbol{\alpha}\in B} G(\boldsymbol{\alpha}), \quad G\left(\emptyset\right) := \infty,$$

и через $[B]$, (B) *обозначены замыкание и внутренность множества* B, *соответственно.*

Заметим, что используя неравенство Чебышева легко показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\right) \leqslant -V^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}(\boldsymbol{\alpha}),$$

где $(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon = \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d : \ |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}| < \varepsilon\}$—$\varepsilon$-окрестность точки $\boldsymbol{\alpha}$ в $\mathbb{R}^d$.

Основные результаты настоящей работы представлены теоремами 1, 2 (см. ниже).

Теорема 1. *Пусть выполнено условие допустимой неоднородности*

$$(\mathcal{A}_Y^{\leqslant 0}) \subset \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{M} \subset \left\{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d \,:\, \mathbf{E}e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_1} < \infty\right\}, \tag{1.8}$$

и, кроме того, дополнительное условие: для некоторого $c_0 > 0$ *и любых* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(\tau \leqslant c_0) > 0, \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\tau \geqslant c_0, \quad \frac{\boldsymbol{\zeta}}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\right) \geqslant -V^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{1.9}$$

Тогда семейство $\left\{\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ *удовлетворяет п.б.у. в пространстве* $\mathbb{R}^d$ *с к.ф.у.* $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$. *Если дополнительно выполнено условие (1.7), то* $D_Y = D$, *и условие (1.9) является лишним.*

В случае $d = 1$ множество $\mathcal{M}$ таково, что $[\mathcal{M}] = [\mu_-, \mu_+]$, где

$$\mu_+ = \sup\left\{\mu \,:\, \mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty\right\}, \quad \mu_- = \inf\left\{\mu \,:\, \mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty\right\}.$$

При этом $0 \in (\mathcal{M})$ в силу условия $[\mathbf{C}_0]$; поэтому условие (1.9) выглядит следующим образом: *для некоторого* $c_0 > 0$ *такого, что* $\mathbf{P}(\tau \leqslant c_0) > 0$ *выполненяется*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\tau \geqslant c_0,\ \zeta \geqslant t\right) \geqslant -\mu_+, \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\tau \geqslant c_0,\ \zeta \leqslant -t\right) \geqslant -|\mu_-|.$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие допустимой неоднородности (1.8) и дополнительное условие (1.9). Тогда для любого* $\boldsymbol{\mu} \notin \partial\mathcal{M}$ *имеет место сходимость*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{Y}(t)} = A_Y(\boldsymbol{\mu}). \tag{1.10}$$

При этом в случае (1.7) правая часть (1.10) равна $A(\boldsymbol{\mu})$ *и условие (1.9) является лишним.*

2. Доказательство теорем 1, 2

2.1. **Доказательство теоремы 1.** Теорема 1 вытекает из лемм 2.1—2.3.

Лемма 2.1. *(Локальный п.б.у. для процесса $\mathbf{Y}(t)$) Пусть выполнены условия (1.8) и (1.9) теоремы 1. Тогда семейство $\left\{\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ удовлетворяет локальному п.б.у. с к.ф.у. $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$, т.е. для любых $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\in(\boldsymbol{\alpha})_\delta\right)\leqslant -D_Y(\boldsymbol{\alpha}); \tag{2.1}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\in(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\right)\geqslant -D_Y(\boldsymbol{\alpha}). \tag{2.2}$$

Если дополнительно выполнено (1.7), то $D_Y = D$ и условие (1.9) является лишним.

Лемма 2.2. *(Экспоненциальная плотность для семейства $\left\{\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\right\}_{t>0}$) Семейство $\left\{\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов экспоненциально плотно, т.е.*

$$\lim_{K\to\infty}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}\left(\frac{|\mathbf{Y}(t)|}{t}\geqslant K\right)=-\infty. \tag{2.3}$$

Леммы 2.1, 2.2 будут доказаны в разделах 3, 4, соответственно.

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, § 4.1 в [9]).

Лемма 2.3. *Пусть семейство $\left\{\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов в $\mathbb{R}^d$ является экспоненциально плотным и удовлетворяет локальному п.б.у. с к.ф.у. $G(\boldsymbol{\alpha})$. Тогда это семейство удовлетворяет п.б.у. с той же функцией уклонений $G(\boldsymbol{\alpha})$.*

2.2. **Доказательство теоремы 2.** В основе доказательства теоремы 2 лежит лемма 2.4, которая является частным случаем теоремы 4.3.1 в [10].

Лемма 2.4. *Пусть семейство $\left\{\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у. $G(\boldsymbol{\alpha})$. Пусть для фиксированного $\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^d$ выполнено условие*

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{E}\left(e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{X}(t)};\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{X}(t)\geqslant Mt\right)=-\infty. \tag{2.4}$$

Тогда для этого $\boldsymbol{\mu}$ имеет место соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{E}e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{X}(t)}=\sup_{\boldsymbol{\alpha}}\{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}-G(\boldsymbol{\alpha})\}.$$

Следующее утверждение будет доказано в разделе 4.

Лемма 2.5. *Пусть выполнено условие допустимой неоднородности (1.8). Тогда для любого $\boldsymbol{\mu}\in(\mathcal{M})$ выполнено соотношение*

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{E}\left(e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{Y}(t)};\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{Y}(t)\geqslant Mt\right)=-\infty. \tag{2.5}$$

Осуществим теперь

Доказательство теоремы 2. Пусть сначала $\boldsymbol{\mu} \in (\mathcal{M})$. Тогда в силу теоремы 1 и леммы 2.5 для семейства $\left\{\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\right\}$ выполнены условия леммы 2.4 с к.ф.у. $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$. Поэтому в силу леммы 2.4 имеет место соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{Y}(t)} = \sup_{\boldsymbol{\alpha}} \{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - D_Y(\boldsymbol{\alpha})\}. \tag{2.6}$$

Привлекая далее второе соотношение в (1.4), получаем, что правая часть (2.6) равна $A_Y(\boldsymbol{\mu})$. Таким образом, для случая $\boldsymbol{\mu} \in (\mathcal{M})$ соотношение (1.10) доказано.

Пусть теперь $\boldsymbol{\mu} \notin [\mathcal{M}]$. Тогда $A_Y(\boldsymbol{\mu}) = \infty$, и для доказательства соотношения (1.10) достаточно установить оценку снизу

$$L_- := \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{Y}(t)} = \infty. \tag{2.7}$$

Для любых $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} L_- &\geqslant \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} \left(e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{Y}(t)};\ \frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right) \\ &\geqslant \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - |\boldsymbol{\mu}|\varepsilon + \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right). \end{aligned}$$

Применяя далее оценку снизу в локальном п.б.у. для $\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}$ (см. лемму 2.1), получаем

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right) \geqslant -D_Y(\boldsymbol{\alpha}),$$

поэтому

$$L_- \geqslant \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - D_Y(\boldsymbol{\alpha}) - |\boldsymbol{\mu}|\varepsilon.$$

Из последнего в силу второго соотношения в утверждении (1.4) леммы 1.1 вытекает оценка снизу (2.7):

$$L_- \geqslant \sup_{\boldsymbol{\alpha}} \{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - D_Y(\boldsymbol{\alpha})\} - |\boldsymbol{\mu}|\varepsilon = A_Y(\boldsymbol{\mu}) - |\boldsymbol{\mu}|\varepsilon = \infty.$$

Теорема 2 доказана. □

3. Доказательство леммы 2.1

3.1. **Дополнительные свойства функций $D(\boldsymbol{\alpha})$, $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$.** *Функция уклонений* для случайного вектора $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ определяется как преобразование Лежандра $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ (см., например, [12]):

$$\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \sup_{\lambda, \boldsymbol{\mu}} \{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - A(\lambda, \boldsymbol{\mu})\}, \quad (\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Из теоремы 1.2 в [3] вытекает

Лемма 3.1. (*i*) *Для всех* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ *справедливо*

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}} \{\lambda + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\}; \tag{3.1}$$

$$D_Y(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_Y^{\leqslant 0}} \{\lambda + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\}. \tag{3.2}$$

(ii) *Для функции*

$$D_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha}) := \inf_{r>0} r\Lambda\left(\frac{\theta}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right),$$

для всех $\theta>0, \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^d$ *имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\inf_{\boldsymbol{\alpha}'\in(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon} D_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha}') = D(\theta,\boldsymbol{\alpha}), \tag{3.3}$$

где

$$D(\theta,\boldsymbol{\alpha}) := \sup_{(\lambda,\boldsymbol{\mu})\in\mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda\theta+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\}.$$

Заметим, что функция $D_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha})$ впервые была определена и изучена в [13]. Пункт (i) леммы 3.1 нам понадобится для доказательства оценки сверху в л.п.б.у., пункты (ii) — для доказательства оценки снизу.

3.2. **Доказательство леммы 2.1.** (i). Доказательство оценки сверху в лемме 2.1. Для произвольного $\delta>0$ имеем

$$P_Y(t) := \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\in(\boldsymbol{\alpha})_\delta\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t), \tag{3.4}$$

где

$$P_n(t) := \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Z}_{n+1}}{t}\in(\boldsymbol{\alpha})_\delta,\quad T_n\leqslant t<T_{n+1}\right).$$

Оценим часть суммы в (3.4) по $n>t^2$:

$$\sum\nolimits_1 := \sum_{n>t^2} P_n(t) \leqslant \sum_{n>t^2}\mathbf{P}\left(T_n\leqslant t\right) \leqslant \sum_{n>t^2}\mathbf{P}\left(T_n-\tau_1\leqslant t\right).$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева для $(n-1)\mathbf{E}\tau\geqslant t$ (допускается $\mathbf{E}\tau=+\infty$), имеем

$$\mathbf{P}(T_n-\tau_1\leqslant t)\leqslant e^{-(n-1)\Lambda\left(\frac{t}{n-1}\right)},$$

где $\Lambda(\theta)$ — функция уклонений для случайной величины τ. Поскольку $\mathbf{P}\left(\tau>0\right)=1$, то $\Lambda(\theta)\uparrow\infty$ при $\theta\downarrow 0$, и поэтому

$$\sum\nolimits_1 \leqslant \sum_{n>t^2}\mathbf{P}(T_n-\tau_1\leqslant t)\leqslant \sum_{n>t^2} e^{-(n-1)\Lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \leqslant \frac{1}{1-e^{-1}}e^{-t^2}. \tag{3.5}$$

Оценим теперь сумму $\sum_2$ в (3.4) по $1\leqslant n\leqslant t^2$, для чего оценим сверху каждое слагаемое $P_n(t)$. Для произвольного вектора $(\lambda,\boldsymbol{\mu})\in(\mathcal{A}_Y^{\leqslant 0})$ и для любого $n\geqslant 1$ имеем

$$P_n(t) = \mathbf{E}\left(e^{\pm\lambda T_n\pm\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n};\ \mathbf{Z}_{n+1}\in(t\boldsymbol{\alpha})_{t\delta},\ T_n\leqslant t<T_{n+1}\right). \tag{3.6}$$

Заметим, далее, что на событии

$$\{\mathbf{Z}_{n+1}\in(t\boldsymbol{\alpha})_{t\delta},\ T_n\leqslant t<T_{n+1}\}$$

выполняется неравенство

$$e^{-\lambda T_n-\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n}\leqslant e^{-\lambda t-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}t+\sqrt{d}|\boldsymbol{\mu}|\delta t}\max\{1,e^{\lambda\tau_{n+1}}\}e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_{n+1}}. \tag{3.7}$$

Поэтому из (3.6), (3.7) для всех $(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ из $(\mathcal{A}_Y^{\leqslant 0})$ справедливо

$$
\begin{aligned}
P_n(t) &\leqslant e^{-\lambda t - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} t + \sqrt{d}|\boldsymbol{\mu}|\delta t}\mathbf{E}e^{\lambda T_n + \boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n}\mathbf{E}\max\{1, e^{\lambda\tau_{n+1}}\}e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_{n+1}} \\
&= e^{-\lambda t - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} t + \sqrt{d}|\boldsymbol{\mu}|\delta t}\psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})\psi^{n-1}(\lambda, \boldsymbol{\mu})\mathbf{E}\max\{1, e^{\lambda\tau_{n+1}}\}e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_{n+1}} \qquad (3.8) \\
&\leqslant e^{-\lambda t - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} t + \sqrt{d}|\boldsymbol{\mu}|\delta t}\psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})\mathbf{E}\max\{1, e^{\lambda\tau_{n+1}}\}e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_{n+1}}.
\end{aligned}
$$

где второй сомножитель $\psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ в правой части (3.8) конечен в силу условия допустимой неоднородности (1.8), а третий сомножитель оценивается как

$$
\mathbf{E}\max\{1, e^{\lambda\tau_{n+1}}\}e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_{n+1}} \leqslant \begin{cases} \mathbf{E}e^{\lambda\tau_{n+1} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_{n+1}}, & \text{если } \lambda \geqslant 0\ ; \\ \mathbf{E}e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_{n+1}}, & \text{если } \lambda < 0, \end{cases}
$$

и, следовательно, конечен при $n = 0$ в силу условия допустимой неоднородности (1.8); при $n \geqslant 1$ в силу того, что $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A}_Y^{\leqslant 0})$. Таким образом, из (3.4), (3.5), (3.8) вытекает: для всех $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A}_Y^{\leqslant 0})$

$$
L_+(\boldsymbol{\alpha}) := \lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta\right) \leqslant -(\lambda + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}). \qquad (3.9)
$$

Поскольку к любой точке $(\lambda_0, \boldsymbol{\mu}_0)$ границы $\partial\mathcal{A}_Y^{\leqslant 0}$ можно приблизиться точками $(\lambda_n, \boldsymbol{\mu}_n)$ из внутренности $(\mathcal{A}_Y^{\leqslant 0})$, то неравенство (3.9) справедливо для всех $(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ из замкнутого выпуклого множества $\mathcal{A}_Y^{\leqslant 0}$. Из последнего вытекает

$$
L_+(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant -\sup_{(\lambda,\boldsymbol{\mu})\in\mathcal{A}_Y^{\leqslant 0}}\{(\lambda + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha})\}.
$$

Осталось воспользоваться свойством (3.2):

$$
\sup_{(\lambda,\boldsymbol{\mu})\in\mathcal{A}_Y^{\leqslant 0}}\{(\lambda + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha})\} = D_Y(\boldsymbol{\alpha}).
$$

Оценка сверху в лемме 2.1 доказана.

(ii). Доказательство оценки снизу в лемме 2.1. Докажем сначала без привлечения условия (1.9) более грубую, чем (2.2), оценку

$$
\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}\left(\frac{Y(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\right) \geqslant -D(\boldsymbol{\alpha}). \qquad (3.10)
$$

Оценка (3.10) является более грубой, чем оценка (2.2) так, как всегда выполнено неравенство $D_Y(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant D(\boldsymbol{\alpha})$, которое вытекает из определения $A_Y(\boldsymbol{\mu}), A(\boldsymbol{\mu})$ и соотношений (1.4).

Рассмотрим для $0 < c < \infty$, $0 < R < \infty$, $q \in (0, 1]$ класс $\mathcal{K}(c, R, q)$ случайных векторов $(\tau, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ таких, что $\mathbf{P}(\tau \geqslant c,\ |\boldsymbol{\zeta}| \leqslant R) \geqslant q$. Рассмотрим для любого $T > 0$ событие

$$
\mathcal{B}_T := \{\eta(T) \leqslant k(T),\ \ |\mathbf{Z}_m| \leqslant mR,\ \ \text{для всех } m \in \{1, \ldots, \eta(T)\}\},
$$

где

$$
\eta(t) = \nu(t) + 1,\ k(T) := \left[\frac{T}{c}\right] + 1.
$$

Лемма 3.2. *Пусть однородное случайное блуждание $(T_k, \mathbf{Z}_k)$, $k = 0, 1, \cdots$, порождено последовательностью сумм независимых случайных векторов $(\tau_i, \boldsymbol{\zeta}_i)$ с общим с $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ распределением и пусть $(\tau, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{K}(c, R, q)$. Тогда для любого $T > 0$*

$$
\mathbf{P}(B_T) \geqslant q^{k(T)}.
$$

Доказательство. Рассмотрим события

$$C_k := \{\tau_k \geqslant c,\ |\boldsymbol{\zeta}_k| \leqslant R\}, \quad k = 1, 2, \cdots .$$

Тогда, легко заметить, что выполнено включение

$$\bigcap_{k=1}^{k(T)} C_k \subseteq B_T.$$

Откуда и вытекает утверждение леммы 3.2. □

Перейдем теперь непосредственно к доказательству оценки снизу (3.10). Рассмотрим для произвольных фиксированных $r > 0$, $\varepsilon > 0$ и достаточно малого $\delta > 0$ при $n := [rt]$ событие

$$C_t(\varepsilon, \delta) := \left\{ \frac{T_n}{n} \in \frac{t}{n}(1-\delta)_\delta, \quad \frac{\mathbf{Z}_n}{n} \in \frac{t}{n}(\boldsymbol{\alpha})_{\frac{\varepsilon}{2}} \right\}.$$

На этом событии сумма T_n находится левее значения t и расстояние $\mathcal{T} := t - T_n$ лежит в пределах

$$\mathcal{T} \in (0, 2t\delta). \tag{3.11}$$

Рассмотрим «новое» блуждание

$$\{(T'_k, \mathbf{Z}'_k);\ k \geqslant 0\}, \quad (T'_k, \mathbf{Z}'_k) := (T_{n+k} - T_n,\ \mathbf{Z}_{n+k} - \mathbf{Z}_n),$$

которое не зависит от блуждания

$$\{(T_k, \mathbf{Z}_k);\ 0 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Для нового блуждания рассмотрим событие

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}} = \{\eta'(\mathcal{T}) \leqslant k(\mathcal{T}),\ \ |\mathbf{Z}'_m| \leqslant mR,\ \ \text{для всех } m \in \{1, \ldots, \eta'(\mathcal{T})\}\},$$

связанное с моментом $\eta'(T)$ первого прохождения случайного уровня $\mathcal{T}$. Очевидно, что для некоторых $0 < c < \infty$, $0 < R < \infty$, $q \in (0, 1]$ выполняется $(\tau, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{K}(c, R, q)$, поэтому можно воспользоваться леммой 3.2. Заметим прежде, что на событии $C_t(\varepsilon, \delta) \cap \mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ справедливо $\nu(t) = n + \eta'(\mathcal{T}) - 1$, поэтому

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Z}_n + \mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})}. \tag{3.12}$$

В силу выбора события $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ и в силу (3.11) справедлива оценка

$$|\mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})}| \leqslant k(\mathcal{T})R \leqslant \left(\frac{\mathcal{T}}{c} + 1\right) R \leqslant t\left(\frac{2\delta R}{c} + \frac{R}{t}\right).$$

Тогда при

$$\frac{2\delta R}{c} \leqslant \frac{\varepsilon}{4},\ \ \frac{R}{t} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

имеет место включение

$$\left\{ \frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right\} \supset C_t(\varepsilon, \delta) \cap \mathcal{B}_{\mathcal{T}}.$$

Следовательно, используя лемму 3.2, имеем

(3.13)
$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\in(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\right)&\geqslant\mathbf{P}\left(\mathcal{B}_{\mathcal{T}}\cap C_t(\varepsilon,\delta)\right)=\int_0^\infty\mathbf{P}\left(\mathcal{B}_T\cap C_t(\varepsilon,\delta),\mathcal{T}\in dT\right)\\&=\int_0^\infty\mathbf{P}\left(\mathcal{B}_T\right)\mathbf{P}\left(C_t(\varepsilon,\delta),\mathcal{T}\in dT\right)\\&\geqslant\int_0^\infty q^{k(T)}\mathbf{P}\left(C_t(\varepsilon,\delta),\mathcal{T}\in dT\right)=\mathbf{E}\left(q^{k(\mathcal{T})};C_t(\varepsilon,\delta)\right);\end{aligned}$$

при этом, на событие $C_t(\varepsilon,\delta)$ справедливо $\mathcal{T}\leqslant 2t\delta$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\in(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\right)\geqslant q^{\frac{2t\delta}{c}+1}\mathbf{P}\left(C_t(\varepsilon,\delta)\right).$$

В силу известной оценки снизу (локальный п.б.у. для случайного блуждания) (см., например, теорему 1.2.1 в [9])

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}\left(C_t(\varepsilon,\delta)\right)\geqslant -r\Lambda\left(\frac{1-\delta}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right),\tag{3.14}$$

получаем

$$L_-(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon):=\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\in(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\right)\geqslant -r\Lambda\left(\frac{1-\delta}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right)+\frac{2\delta}{c}\ln q.$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $r>0$, получаем для $\boldsymbol{\beta}:=\frac{1}{1-\delta}\boldsymbol{\alpha}$

$$L_-(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon)\geqslant -D_\Lambda(1-\delta,\boldsymbol{\alpha})+\frac{2\delta}{c}\ln q=-(1-\delta)D_\Lambda(1,\boldsymbol{\beta})+\frac{2\delta}{c}\ln q.$$

Выбирая далее $\boldsymbol{\alpha}'\in(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon$ и $\varepsilon'>0$ такие, что $(\boldsymbol{\alpha}')_{\varepsilon'}\subset(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon$, получаем для $\boldsymbol{\beta}':=\frac{1}{1-\delta}\boldsymbol{\alpha}'$

$$L_-(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon)\geqslant -(1-\delta)D_\Lambda(1,\boldsymbol{\beta}')+\frac{2\delta}{c}\ln q.$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $\boldsymbol{\alpha}'\in(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon$, получаем

$$L_-(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon)\geqslant -(1-\delta)\inf_{\boldsymbol{\alpha}'=(1-\delta)\boldsymbol{\beta}'\in(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon}D_\Lambda(1,\boldsymbol{\beta}')+\frac{2\delta}{c}\ln q.$$

Поскольку для любого $\varepsilon'\in(0,\varepsilon)$ и всех достаточно малых $\delta>0$ правая часть последнего неравенства не превосходит

$$-(1-\delta)\inf_{\boldsymbol{\alpha}'\in(\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon'}}D_\Lambda(1,\boldsymbol{\alpha}')+\frac{2\delta}{c}\ln q,$$

то, переходя к пределу по $\delta\to 0$, получаем

$$L_-(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon)\geqslant -\inf_{\boldsymbol{\alpha}'\in(\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon'}}D_\Lambda(1,\boldsymbol{\alpha}').$$

Переходя далее в правой части последнего неравенства к пределу по $\varepsilon'\to 0$, получаем в силу (3.3)

$$L_-(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon)\geqslant -\lim_{\varepsilon'\downarrow 0}\inf_{\boldsymbol{\alpha}'\in(\boldsymbol{\alpha})_{\varepsilon'}}D_\Lambda(1,\boldsymbol{\alpha}')=-D(1,\boldsymbol{\alpha})=-D(\boldsymbol{\alpha})\tag{3.15}$$

Последнее равенство следует из (3.1). Более грубая, чем (2.2), оценка (3.10) установлена. Таким образом, оценка (2.2) доказана в случае, когда $D_Y=D$, без привлечения условия (1.9).

Рассмотрим теперь случай, когда функции $D = D(\boldsymbol{\alpha})$ и $D_Y = D_Y(\boldsymbol{\alpha})$ различны и выполнено дополнительное условие (1.9).

Рассмотрим для $0 < c < \infty$, $0 < R < \infty$, $q \in (0,1]$ класс $\mathcal{K}(c, c_0, R, q)$ случайных векторов $(\tau, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ таких, что

$$\mathbf{P}(c \leqslant \tau \leqslant c_0,\ |\boldsymbol{\zeta}| \leqslant R) \geqslant q,$$

где константа c_0 из условия (1.9).

Зафиксируем $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d, r > 0$ и построим три события B_t, C_t, D_t таким образом, что выполняется включение

$$\left\{ \frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_{4\varepsilon} \right\} \supset B_t \cap C_t \cap D_t. \tag{3.16}$$

В качестве C_t выберем событие

$$C_t := \left\{ \frac{\mathbf{Z}_n}{n} \in \frac{t}{n}((1-2\delta)\boldsymbol{\beta})_\varepsilon, \quad \frac{T_n}{n} \in \frac{t}{n}(1-2\delta)_\delta \right\},$$

где константу $\delta > 0$ выберем позже, $n = [rt]$. Рассмотрим далее, как и ранее, «новое» блуждание

$$\{(T'_k, \mathbf{Z}'_k);\ k \geqslant 0\}, \quad (T'_k, \mathbf{Z}'_r) := (T_{n+k} - T_n,\ \mathbf{Z}_{n+k} - \mathbf{Z}_n),$$

на траекториях которого, для $\chi'(T) := t - T'_n$, определим событие

$$B_t := \{\eta'(\mathcal{T}) \leqslant k(\mathcal{T}),\ \ \chi'(\mathcal{T}) \leqslant c_0,\ \ |\mathbf{Z}'_m| \leqslant mR,\ \ 1 \leqslant m \leqslant \eta'(\mathcal{T})\},$$

связанное с первым прохождением координатой T'_k случайного уровня

$$\mathcal{T} := t - T_n - c_0.$$

Аналогично доказательству леммы 3.2 и неравенству (3.13) получаем

$$\mathbf{P}\left(B_t \cap C_t \right) \geqslant \mathbf{E}\left(q^{k(\mathcal{T})}; C_t \right). \tag{3.17}$$

Наконец, определим третье событие

$$D_t := \left\{ \tau_{n+\eta'(\mathcal{T})+1} \geqslant c_0, \quad \frac{\boldsymbol{\zeta}_{n+\eta'(\mathcal{T})+1}}{t} \in ((1-2\delta)(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}))_\delta \right\},$$

которое не зависит от первых двух. На событии

$$B_t \cap C_t \cap D_t,$$

выполняется $\eta(t) = n + \eta'(\mathcal{T}) + 1$, поэтому

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Z}_n + \mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})} + \boldsymbol{\zeta}_{n+\eta'(\mathcal{T})+1},$$

а также

$$\mathcal{T} \leqslant 3t\delta - c_0, \quad |\mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})}| \leqslant k(\mathcal{T})R \leqslant \left(\frac{3t\delta - c_0}{c} + 1 \right) R.$$

Имеем

$$\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} - \boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{\mathbf{Z}_n}{t} - (1-2\delta)\boldsymbol{\beta} \right) + \frac{\mathbf{Z}'_{\eta'(T)}}{t} + \left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_{n+\eta'(T)+1}}{t} - (1-2\delta)(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \right) - 2\delta\boldsymbol{\alpha},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathbf{Y}(t)}{t} - \boldsymbol{\alpha} \right| &\leq \left| \frac{\mathbf{Z}_n}{t} - (1-2\delta)\boldsymbol{\beta} \right| + \left| \frac{\mathbf{Z}'_{\eta'(T)}}{t} \right| + \left| \frac{\boldsymbol{\zeta}_{n+\eta'(T)+1}}{t} - ((1-2\delta)(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})) \right| + 2\delta|\boldsymbol{\alpha}| \\ &< \varepsilon + \left(\frac{3\delta}{c} - \frac{c_0}{ct} + \frac{1}{t} \right) R + \delta + |\boldsymbol{\alpha}| 2\delta. \end{aligned}$$

Выбираем $\delta > 0$ и $t > 0$ таким образом, что

$$\left(\frac{3\delta}{c} - \frac{c_0}{ct} + \frac{1}{t}\right) R < \varepsilon, \quad \delta < \varepsilon, \quad 2|\boldsymbol{\alpha}|\delta < \varepsilon,$$

получаем включение (3.16). Используя (3.17), (3.16), получаем неравенства

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_{4\varepsilon}\right) &\geqslant \mathbf{P}\,(\,B_t \cap C_t \cap D_t\,) = \mathbf{P}\,(\,B_t \cap C_t\,)\,\mathbf{P}\,(\,D_t\,) \\ &\geqslant q^{\frac{3\delta t - c_0 + c}{c}}\mathbf{P}\,(\,C_t\,)\,\mathbf{P}\,(\,D_t\,)\,.\end{aligned}$$

Из последнего выводим

$$\begin{aligned}L_-(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon) &:= \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_{4\varepsilon}\right) \\ &\geqslant \frac{3\delta}{c}\ln q + \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}\,(\,C_t\,) + \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}\,(\,D_t\,) \\ &=: \frac{3\delta}{c}\ln q + L_1 + L_2.\end{aligned}$$

Оцениваем L_1 аналогично (3.14), L_2 – с помощью условия (1.9), получаем

$$L_-(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon) \geqslant \frac{3\delta}{c}\ln q - r\Lambda\left(\frac{1-2\delta}{r}, \frac{(1-2\delta)\boldsymbol{\beta}}{r}\right) - V^{\mathfrak{L}_e}\left((1-2\delta)(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\right).$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $r > 0$, получаем

$$\begin{aligned}L_-(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon) &\geqslant \frac{3\delta}{c}\ln q - D_\Lambda(1-2\delta,(1-2\delta)\boldsymbol{\beta}) - V^{\mathfrak{L}_e}((1-2\delta)(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})) \\ &= \frac{3\delta}{c}\ln q - (1-2\delta)D_\Lambda(1,\boldsymbol{\beta}) - (1-2\delta)V^{\mathfrak{L}_e}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}).\end{aligned}$$

Устремляя далее $\delta \to 0$, получаем неравенство

$$L_-(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon) \geqslant -D_\Lambda(1,\boldsymbol{\beta}) - V^{\mathfrak{L}_e}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}).$$

Повторяя далее с очевидными изменениями последовательность соотношений, которые использовались ранее для доказательства оценки снизу (3.15), мы приходим к неравенству

$$L_-(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon) \geqslant -D(\boldsymbol{\beta}) - V^{\mathfrak{L}_e}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}).$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$, и используя свойство (1.5), получаем требуемое

$$L_-(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon) \geqslant -\inf_{\boldsymbol{\beta}}\{D(\boldsymbol{\beta}) + V^{\mathfrak{L}_e}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\} = -D_Y(\boldsymbol{\alpha}).$$

Оценка снизу в лемме 2.1 доказана. Лемма 2.1 доказана.

□

4. Доказательство лемм 2.2, 2.5

Доказательство леммы 2.2 повторяет с очевидными изменениями доказательство леммы 2.2 в [4], поэтому мы опускаем это доказательство.

Доказательство леммы 2.5 в идейном плане близко к доказательству леммы 2.5 в [4]; однако есть существенные отличия. Поэтому мы приводим полное

Доказательство леммы 2.5. Пусть $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Тогда

$$\mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{Y}(t)};\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{Y}(t) \geqslant Mt) = \mathbf{P}(0 \geqslant Mt) = 0,$$

и соотношение (2.5) очевидным образом выполняется.

Пусть теперь $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\mu} \in (\mathcal{M})$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$(1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu} \in (\mathcal{M}), \quad \mathbf{E}e^{(1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_1} < \infty.$$

Следовательно, $A((1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}) < \infty$. Выберем $\lambda = -A((1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu})$, тогда

$$A(\lambda, (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \leqslant 0. \tag{4.1}$$

И, следовательно, для этих фиксированных $\lambda,\ \boldsymbol{\mu},\ \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned}
E_t(\boldsymbol{\mu}, M) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_{n+1}};\ T_n \leqslant t < T_{n+1},\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_{n+1} \geqslant Mt) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{\pm\lambda T_n + (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_{n+1} - \varepsilon\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_{n+1}};\ T_n \leqslant t < T_{n+1},\ \mu\mathbf{Z}_{n+1} \geqslant Mt) \\
&\leqslant e^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{\lambda T_n + (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_{n+1}};\ T_n \leqslant t < T_{n+1},\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_{n+1} \geqslant Mt) \\
&=: e^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} \sum_{n=0}^{\infty} E_n.
\end{aligned}$$

При $n = 0$ для некоторого $C_1 < \infty$ имеем

$$E_0 = \mathbf{E}(e^{(1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_1};\ \tau_1 > t,\ \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_1 \geqslant Mt) \leqslant \mathbf{E}e^{(1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_1} < C_1.$$

Для того, чтобы оценить сверху E_n при $n \geqslant 1$, определим последовательность $\{(\hat{\tau}_k,\ \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k)\}_{k\geqslant 1}$ независимых случайных векторов, положив для борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^{d+1}$

$$\mathbf{P}((\hat{\tau}_k,\ \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k) \in B) := \frac{1}{\psi_k(\lambda, (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu})} \mathbf{E}(e^{\lambda\tau_k + (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_k};\ (\tau_k, \boldsymbol{\zeta}_k) \in B),$$

где $\psi_k(\lambda, (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_k + (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_k}$. По этой последовательности построим суммы $(\hat{T}_n,\ \hat{\mathbf{Z}}_n)$. Используя новые обозначения, имеем для $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
E_n &= \mathbf{E}(e^{\lambda T_n + (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n + (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_{n+1}};\ T_n \leqslant t < T_{n+1},\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}_n + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_{n+1} \geqslant Mt) \\
&= \psi_1(\lambda, (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu})\psi_2^{n-1}(\lambda, (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu})\mathbf{P}\left(\hat{T}_n \leqslant t < \hat{T}_{n+1},\ \boldsymbol{\mu}\hat{\mathbf{Z}}_{n+1} \geqslant Mt\right) \\
&\leqslant \psi_1(\lambda, (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu})\psi_2^{n-1}(\lambda, (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu})\mathbf{P}\left(\hat{T}_n \leqslant t\right).
\end{aligned}$$

Поскольку в силу (4.1) имеем $(\lambda, (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_Y^{\leqslant 0}$, то $\psi_2(\lambda, (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \leqslant 1$ и в силу условия допустимой неоднородности (1.8) $\psi_1(\lambda, (1+\varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \leqslant C$ для некоторого $C < \infty$. Поэтому

$$E_t(\boldsymbol{\mu}, M) \leqslant CC_1 e^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} \sum\nolimits_1, \quad \sum\nolimits_1 := \sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(\hat{T}_n \leqslant t). \tag{4.2}$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева для $(n-1)\mathbf{E}\hat{\tau} \geqslant t$, имеем

$$\mathbf{P}(\hat{T}_n \leqslant t) \leqslant \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leqslant t) \leqslant e^{-(n-1)\hat{\Lambda}(\frac{t}{n-1})},$$

где $\hat{\Lambda}(\alpha)$—функция уклонений для случайной величины $\hat{\tau} := \hat{\tau}_2$. Поскольку $\mathbf{P}(\hat{\tau} > 0) = 1$, то $\hat{\Lambda}(\alpha) \uparrow \infty$ при $\alpha \downarrow 0$, и поэтому при $t \to \infty$

$$\sum_{n \geqslant t^2} \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leqslant t) \leqslant \sum_{n \geqslant t^2} e^{-(n-1)\hat{\Lambda}(\frac{t}{n-1})} = o(1). \tag{4.3}$$

Следовательно, при всех достаточно больших t

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{1 \leqslant n \leqslant t^2 - 1} \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leqslant t) + \sum_{n \geqslant t^2} \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leqslant t) \leqslant t^2 - 1 + o(1) \leqslant t^2,$$

то, при тех же t, в силу (4.2) имеем для любого M и для выбранных ранее фиксированных $\lambda, \boldsymbol{\mu}, \varepsilon$ неравенство

$$E_t(\boldsymbol{\mu}, M) \leqslant C e^{|\lambda| t - \varepsilon M t} t^2.$$

Поскольку из последнего неравенства вытекает соотношение (2.5), то лемма 2.5 доказана. □

References

[1] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. I*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 491–514. MR3879625

[2] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. II*, Siberian Mathematical Journal, **59**:4 (2018), 731–750. MR3879647

[3] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *The rate function and the fundamental function for multidimensional compound renewal process*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1449–1463.

[4] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Large deviation principle for multidimensional first compound renewal processes in the phase space*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1464–1477.

[5] R. Lefevere, M. Mariani, L. Zambotti, *Large deviations for renewal processes*, In Stochastic Processes and their Applications, **121**:10 (2011), 2243–2271. MR2822776

[6] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Large deviation principles for the finite-dimensional distributions of compound renewal processes*, Sib. Math. J., **56**:1 (2015), 28–53. MR3407938

[7] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Properties of the deviation rate function and the asimptotics for the Laplace transform of the distribution of a compound renewal process*, Teor. Veroyatnost. i Primenen., **64**:4 (2019), 625–641.

[8] B. Tsirelson, *From uniform renewal theorem to uniform large and moderate deviations for renewal-reward processes*, Electron. Commun. Probab. **18**:52 (2013), 1–13. MR3078015

[9] A.A. Borovkov, *Asymptotic analysis of random walks. Rapidly decreasing distributions of increments*, Moscow: Fizmatlit, 2013. Zbl 1351.60003

[10] A.Dembo, O.Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Berlin: Springer-Verlag, 2010. MR2571413

[11] Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970. MR0274683

[12] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, London: Springer-Verlag , 2013. MR3086572

[13] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *The second rate function and the asymptotic problems of renewal and hitting the boundary for multidimensional random walks*, Sib. Math. J., **37**:4 (1996), 647–682. MR1643358

Anatolii Alfredovich Mogulskii
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: mogul@math.nsc.ru

Evgenii Igorevich Prokopenko
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: evgenii.prokopenko@gmail.com