S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1493–1530 (2019) УДК 512.556
DOI 10.33048/semi.2019.16.103 MSC 06B05, 16S60, 54H99

ИЗОМОРФИЗМЫ РЕШЕТОК ПОДАЛГЕБР ПОЛУПОЛЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С MAX-СЛОЖЕНИЕМ

В.В. СИДОРОВ

Abstract. Let $\mathbb{P}^{\vee}$ be the semifield of positive real numbers with operations of max-addition and multiplication and $U^{\vee}(X)$ be the semifield of continuous $\mathbb{P}^{\vee}$-valued functions on an arbitrary topological space X with pointwise operation max-addition and multiplication. We call a subset $A \subseteq U^{\vee}(X)$ a subalgebra if $f \vee g$, fg, $rf \in A$ for any $f, g \in A$, $r \in \mathbb{P}^{\vee}$. We describe isomorphisms of lattices of subalgebras of semifields $U^{\vee}(X)$.

Keywords: semifield of continuous functions, subalgebra, isomorphism, lattice of subalgebras, Hewitt space, max-addition.

1. Введение

Настоящая работа является естественным продолжением работы [1] и относится к тому направлению в математике, в котором изучаются взаимосвязи между топологическими пространствами и алгебраическими системами непрерывных функций, заданных на них. Знакомство с работой [1] не обязательно, так как мы напоминаем идейные предпосылки исследования, а также необходимые понятия и результаты в удобной для нас форме.

1.1. **Исходные понятия.** Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$, где $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативный моноид с нейтральным элементом нуль 0, $\langle S, \cdot, 1\rangle$ — моноид с нейтральным элементом единица 1, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ для всех

Sidorov, V.V., Isomorphisms of lattices of subalgebras of the semifield of continuous positive functions with max-addition.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (проект №1.5879.2017/8.9).

Поступила 11 мая 2019 г., опубликована 21 октября 2019 г.

$a \in S$. Полукольцо S, отличное от кольца, называется полуполем с нулем, если $\langle S\backslash\{0\}, \cdot\rangle$ — коммутативная группа. Легко показать, что если S — полуполе с нулем и $a, b \neq 0$, то $a+b, ab \neq 0$. Алгебраическая структура $\langle S\backslash\{0\}, +, \cdot\rangle$ называется полуполем. Множества $\mathbb{R}_+$ неотрицательных действительных чисел и $\mathbb{P}$ положительных действительных чисел с операциями сложения и умножения являются полуполем с нулем и полуполем соответственно.

Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ положим $a \vee b = \max\{a, b\}$ и $a \wedge b = \min\{a, b\}$. Если в полуполях $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{P}$ заменить сложение $+$ на max-сложение $\vee$, то получим полуполе с нулем $\mathbb{R}_+^\vee$ и полуполе $\mathbb{P}^\vee$. Обозначим через $U^\vee(X)$ полуполе непрерывных $\mathbb{P}^\vee$-значных функций на произвольном топологическом пространстве X с поточечными операциями max-сложения и умножения функций.

Кольцо $C(X)$ непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на X является алгеброй над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Подалгеброй в $C(X)$ будет любое его подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения функций и выдерживающее умножение на константы из $\mathbb{R}$. По аналогии назовем подмножество $A \subseteq U^\vee(X)$ подалгеброй, если $f \vee g, fg, rf \in A$ для всех $f, g \in A$ и $r \in \mathbb{P}^\vee$. Таким образом, мы будем употреблять термин «подалгебра» в более широком смысле, нежели кольцо, одновременно являющееся векторным пространством.

Обозначим через $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ решетку подалгебр полуполя $U^\vee(X)$ относительно включения $\subseteq$ (строгое включение обозначим через $\subset$), а через $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ обозначим ее подрешетку подалгебр с единицей. Легко видеть, что точная нижняя грань произвольного семейства подалгебр $\{A_i\}_{i \in I}$ равна их пересечению $\bigcap_{i \in I} A_i$, а точная верхняя грань состоит из конечных max-сумм функций вида $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$, где $f_1, \ldots, f_n \in \bigcup_{i \in I} A_i$, $n \in \mathbb{N}$. Возможно, $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$. Поэтому пустое множество также будем считать подалгеброй — нулем решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$.

Множество функций-констант полуполя $U^\vee(X)$ образует подалгебру, которую обозначим через $\mathbb{P}^\vee$ (это не вызовет путаницы). Наименьшую подалгебру, которая содержит функцию f, назовем однопорожденной и обозначим через $\langle f\rangle$. Наименьшую подалгебру с единицей, которая содержит функцию f, обозначим через $[f]$. При работе в решетке $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ подалгебру $[f]$ также будем называть однопорожденной. Для записи функций подалгебр $\langle f\rangle$ и $[f]$ многочленами от f будем использовать запись по возрастающим степеням f, а коэффициенты многочленов будем обозначать символами a, b, c и r (часто с индексами). Легко видеть, что $[f] = \langle f\rangle \vee \mathbb{P}^\vee$ и

$$\langle f\rangle = \{a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n \colon a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^\vee, a_n > 0, n \in \mathbb{N}\},$$
$$[f] = \{a_0 \vee a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n \colon a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^\vee, a_n > 0, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Кроме того, если A — подалгебра и $r \in \mathbb{P}^\vee$, то

$$A = \bigvee_{f \in A} \langle f\rangle, \quad r \in A \Longleftrightarrow \mathbb{P}^\vee \subseteq A = \bigvee_{f \in A} [f]. \tag{1}$$

Обозначим через $\operatorname{Max} f$ и $\operatorname{Min} f$ подмножества X (возможно, пустые), на которых функция f принимает наибольшее $\max f$ и наименьшее $\min f$ значения соответственно. Для непустого подмножества $Z \subseteq X$ обозначим через $\operatorname{Min}_Z, \operatorname{Max}_Z$ и A_Z подалгебры, заданные равенствами

$$\operatorname{Min}_Z = \{f \in U^\vee(X) \colon Z \subseteq \operatorname{Min} f\}, \quad \operatorname{Max}_Z = \{f \in U^\vee(X) \colon Z \subseteq \operatorname{Max} f\}$$

и $A_Z = \{f \in U^\vee(X) \colon |f(Z)| = 1\}$. Если подмножество $Z = \{x, y, \dots, z\}$ конечно, то будем писать $\mathrm{Min}_{x,y,\dots,z}$, $\mathrm{Max}_{x,y,\dots,z}$ и $A_{x,y,\dots,z}$. Легко видеть, что

$$\mathrm{Min}_Z = \bigcap_{x \in Z} \mathrm{Min}_x, \quad \mathrm{Max}_Z = \bigcap_{x \in Z} \mathrm{Max}_x, \quad \mathbb{P}^\vee = \mathrm{Min}_Z \cap \mathrm{Max}_Z. \tag{2}$$

Кроме того, $\mathrm{Min}_X = \mathrm{Max}_X = \mathbb{P}^\vee$, $A_Z = U^\vee(X)$ равносильно $|Z| = 1$ и

$$\mathrm{Min}_Z \vee \mathrm{Max}_Z = A_Z. \tag{3}$$

Действительно, если $f \in A_Z$ и $f(Z) = \{r\}$, то $f \vee r \in \mathrm{Min}_Z$, $f \wedge r \in \mathrm{Max}_Z$ и $f = (f \vee r)(f \wedge r)/r$. Отсюда $f \in \mathrm{Min}_Z \vee \mathrm{Max}_Z$. Значит, $A_Z \subseteq \mathrm{Min}_Z \vee \mathrm{Max}_Z$. Обратное включение очевидно.

Пусть $bU^\vee(X)$, $spU^\vee(X)$ и $spbU^\vee(X)$ — подалгебры, заданные равенствами

$$bU^\vee(X) = \{f \in U^\vee(X) \colon \sup f < \infty\}, \quad spU^\vee(X) = \{f \in U^\vee(X) \colon \inf f > 0\}$$

и $spbU^\vee(X) = bU^\vee(X) \cap spU^\vee(X)$. Подалгебру A назовем b-, sp- или spb-подалгеброй, если $A \subseteq bU^\vee(X)$, $A \subseteq spU^\vee(X)$ или $A \subseteq spbU^\vee(X)$ соответственно. В частности, пустая подалгебра $\emptyset$ является b-, sp- и spb-подалгеброй. Для подалгебры A обозначим через bA, spA и $spbA$ b-подалгебру $A \cap bU^\vee(X)$, sp-подалгебру $A \cap spU^\vee(X)$ и spb-подалгебру $A \cap spbU^\vee(X)$ соответственно.

Хаусдорфово пространство X называется тихоновским, если для любого непустого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $x \in X \backslash F$ найдется функция $f \in C(X)$ или, что равносильно, $f \in U^\vee(X)$ такая, что $f(F) = \{a\}$ и $f(x) = b$, где $a \neq b$. Идеал M кольца $C(X)$ называется $\mathbb{R}$-идеалом, если факторкольцо $C(X)/M$ изоморфно полю $\mathbb{R}$ действительных чисел. Идеалы $M_x = \{f \in C(X) \colon f(x) = 0\}$, $x \in X$, называются фиксированными максимальными идеалами. Тихоновское пространство X называется хьюиттовским, если все $\mathbb{R}$-идеалы кольца $C(X)$ являются фиксированными максимальными идеалами. Хорошо известны следующие характеризации (см., например, [2]): топологическое пространство является тихоновским (хьюиттовским) тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно подпространству (замкнутому подпространству) тихоновской степени пространства $\mathbb{R}$.

Следующее предложение подчеркивает важную роль, которую хьюиттовские пространства играют в теории колец $C(X)$ и связанных с ними алгебраических систем непрерывных функций.

Предложение 1 ([2, теоремы 3.9 и 8.7]). *Для произвольного топологического пространства X существуют тихоновское пространство τX и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$ такие, что канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а значит,и соответствующие им полуполя $U^\vee(X)$, $U^\vee(\tau X)$ и $U^\vee(\nu\tau X)$, а также решетки их подалгебр.*

Легко показать, что если пространство X — тихоновское (в частности, хьюиттовское) и множество $Z = \{x, y, \dots, z\} \subseteq X$ конечно, то для любого набора чисел $r_x, r_y, \dots, r_z \in \mathbb{P}^\vee$ существует функция $f \in U^\vee(X)$ такая, что $f|_Z = (r_x, r_y, \dots, r_z)$. Здесь и далее $f|_Z$ — ограничение функции f на Z, а равенство $f|_Z = (r_x, r_y, \dots, r_z)$ означает, что $f(x) = r_x$, $f(y) = r_y, \dots, f(z) = r_z$.

Будем говорить, что в решетке имеется решеточная характеризация некоторого свойства, если данное свойство можно описать в терминах этой решетки.

Дадим решеточные характеризации подалгебры $\mathbb{P}^\vee$ в $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$.

Элемент A решетки L с нулем называется атомом, если неравенство $B < A$, где $B \in L$, означает, что B — нулевой элемент.

Предложение 2. *Подалгебра* $\mathbb{P}^\vee$ — *единственный атом решетки* $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ *и нуль решетки* $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$.

Доказательство. Для произвольной подалгебры A полуполя $U^\vee(X)$ условия $\mathbb{P}^\vee \subseteq A$ и $A \cap \mathbb{P}^\vee \neq \emptyset$ равносильны. Поэтому подалгебра $\mathbb{P}^\vee$ является нулем решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ и атомом решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$.

Пусть подалгебра A — атом решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$, т. е. минимальна. Выберем функцию $f \in A$. Тогда $\langle f^2 \rangle \subseteq A$. Отсюда $A = \langle f^2 \rangle$ в силу минимальности A. Поэтому $f \in \langle f^2 \rangle$ и функция f имеет вид $f = a_1 f^2 \vee \ldots \vee a_n (f^2)^n$. Отсюда $1 = a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^{2n-1}$. Тогда $\mathbb{P}^\vee \subseteq A$, так как $f \in A$. Поэтому $A = \mathbb{P}^\vee$ в силу минимальности A. Значит, $\mathbb{P}^\vee$ — единственный атом решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. □

Замечание 1. В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости, в записи решеточной характеризации некоторых свойств будем использовать условия, которые хотя и сформулированы не в терминах решетки, но решеточная характеризация которых была получена ранее. Вместо оборотов «существует решеточная характеризация» и «решеточная характеризация», для краткости, будем использовать сокращения «с. р. х.» и «р. х.» соответственно.

В силу предложения 2 в решетке $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ с. р. х. ее подрешетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Поэтому все свойства, имеющие р. х. в $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, имеют р. х. и в $\mathbb{A}(U^\vee(X))$.

1.2. **Основные результаты.** И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров в работе [3] доказали, что спектр кольца $C(X)$ непрерывных действительнозначных функций, заданных на тихоновском пространстве X, гомеоморфен стоун-чеховской компактификации βX пространства X. Эта классическая теорема Гельфанда–Колмогорова, в частности, означает, что топология любого компакта X определяется кольцом $C(X)$. Данный результат послужил источником для многочисленных обобщений за счет ослабления ограничений на топологию пространства X и перехода от кольца $C(X)$ к другим функционально-алгебраическим объектам, связанным с пространством X. Так, Э. Хьюитт установил (см. [4, теорема 57]) определяемость топологии произвольного хьюиттовского пространства X кольцом $C(X)$, а Е. М. Вечтомов доказал (см. [5, теорема 1]) ее определяемость решеткой $\mathbb{A}(C(X))$ подалгебр кольца $C(X)$ и тем самым усилил результат Э. Хьюитта, так как изоморфизм колец $C(X)$ влечет изоморфизм решеток их подалгебр. Мы перенесли этот результат (см. [1, теорема 2] и [6, теорема 1]) на случай решеток подалгебр полуполя $U^\vee(X)$. Более точно, мы доказали, что для любых хьюиттовских пространств X и Y изоморфизм решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}(U^\vee(Y))$ или $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(Y))$ влечет гомеоморфизм пространств X и Y. Отсюда и из предложения 1 получаем (см. [1, теорема 3]), что для произвольных топологических пространств X и Y изоморфизм решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}(U^\vee(Y))$ или $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(Y))$ влечет изоморфизм полуполей $U^\vee(X)$ и $U^\vee(Y)$. Обратное утверждение, как показывает следующий пример, неверно.

Пример. Если $X = \{x, y\}$ — дискретное пространство, то $U^\vee(X) = \mathbb{P}^\vee \times \mathbb{P}^\vee$. Правило $\psi\colon (a, b) \mapsto (a, b^2)$ задает автоморфизм полуполя $U^\vee(X)$, который не индуцирует автоморфизмы решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ в силу предложения 2, так как $\psi\colon (2, 2) \mapsto (2, 4) \notin \mathbb{P}^\vee$, т. е. $\psi(\mathbb{P}^\vee) \neq \mathbb{P}^\vee$.

Возникают следующие естественные вопросы.

Вопрос 1. Как устроены изоморфизмы полуполей $U^\vee(X)$, индуцирующие изоморфизмы решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$?

Вопрос 2. Как устроены изоморфизмы решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$? В частности, существуют ли изоморфизмы этих решеток, которые не индуцируются изоморфизмами полуполей $U^\vee(X)$?

Цель настоящей работы — ответить на вопросы 1 и 2. Перед тем, как перейти к формулировке ответов, сделаем ряд важных наблюдений и соглашений.

1. В силу предложения 1, не умаляя общности, все пространства, если не оговорено противное, будем считать хьюиттовскими.

2. Если X —компакт, то $spbA = A$ для любой подалгебры A. В частности, $spb\mathrm{Min}_Z = \mathrm{Min}_Z$, $spb\mathrm{Max}_Z = \mathrm{Max}_Z$ и $spbA_Z = A_Z$ для всех $Z \subseteq X$. Данное наблюдение вместе со следующим утверждением мотивируют появление в наших рассуждениях стоун-чеховской компактификации.

Предложение 3. *Если X — компакт, то в $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ с. р. х.*

1) *множества* $\{(\mathrm{Min}_x, \mathrm{Max}_x) \colon x \in X\}$,
2) *подалгебр* Min_Z, Max_Z *и* A_Z *для любого множества* $\{\mathrm{Min}_x \colon x \in Z\}$.

Доказательство. Если X — компакт, то в $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ согласно [1, предложение 12] с. р. х. множества $\{\mathrm{Max}_x \colon x \in X\}$. Для произвольной подалгебры Max_x в $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ в силу [1, предложения 13] с. р. х. подалгебр $[f] \subseteq \mathrm{Min}_x$, а значит, и подалгебры Min_x, точной верхней гранью которых она является. Утверждение 1) доказано. Утверждение 2) следует из (2), (3) и утверждения 1). □

3. Пусть βX — стоун-чеховская компактификация хьюиттовского пространства X. Компактификация βX характеризуется (см. [7, теорема 3.6.1]) следующими условиями: βX — компакт, X плотно в βX и любая ограниченая функция $f \in C(X)$ продолжается до некоторой единственной функции $f^\beta \in C(\beta X)$. Поскольку X плотно в βX, $\inf f = \min f^\beta$ и $\sup f = \max f^\beta$ для любой ограниченной функции $f \in C(X)$. Значит, полуполя $spbU^\vee(X)$ и $U^\vee(\beta X)$ канонически изоморфны. Соответствующий канонический изоморфизм решеток $\mathbb{A}_1(spbU^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(\beta X))$ обозначим через α_X. Тогда

$$\alpha_X \colon \mathrm{spbMin}_x \mapsto \mathrm{Min}_x,\ \mathrm{spbMax}_x \mapsto \mathrm{Max}_x \text{ для всех } x \in X. \tag{4}$$

4. Согласно [1, предложение 17] в $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ с. р. х. b- и sp-подалгебр, а значит, и spb-подалгебр. Кроме того, если $A \in \mathbb{A}(U^\vee(X))$, то воспользуемся предложением 2 и рассмотрим подрешетку $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ и подалгебру $A \vee \mathbb{P}^\vee \in \mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Подалгебра A является b-, sp- или spb-подалгеброй тогда и только тогда, когда ей является подалгебра $A \vee \mathbb{P}^\vee$. Поэтому справедливо

Предложение 4. *В $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ с. р. х. b-, sp- и spb-подалгебр.*

Позже, опираясь на предложение 4, мы докажем

Предложение 5. *В $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ для любой подалгебры $spbA_Z$, где $2 \le |Z| < \infty$, с. р. х. подалгебры A_Z.*

5. Пусть α_1 — изоморфизм решеток $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(Y))$. Тогда в силу предложения 4 ограничение α_1 на решетку $\mathbb{A}_1(spbU^\vee(X))$ является изоморфизмом решеток $\mathbb{A}_1(spbU^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(spbU^\vee(Y))$. Следовательно, отображение $\gamma = \alpha_Y \circ \alpha_1 \circ \alpha_X^{-1}$ служит изоморфизмом решеток $\mathbb{A}_1(U^\vee(\beta X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(\beta Y))$.

Рассмотрим отображение $\varphi \colon \beta X \to \beta Y$, заданное правилом

$$x \mapsto x' \Longleftrightarrow \gamma(\mathrm{Min}_x) = \mathrm{Min}_{x'}.$$

При доказательстве [1, теорема 2] мы показали, что отображение φ является гомеоморфизмом компактов βX и βY, причем ограничение $\varphi|_X$ служит гомеоморфизмом пространств X и Y. Это вместе с условием (4) и предложением 3 означает, что правило

$$x \mapsto x' \iff \alpha_1(spb\mathrm{Min}_x) = spb\mathrm{Min}_{x'}$$

задает гомеоморфизм пространств X и Y, который обозначим через φ_{α_1}.

Аналогично, если α — изоморфизм решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}(U^\vee(Y))$, то в силу предложения 2 ограничение α на решетку $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ является изоморфизмом решеток $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(Y))$. Поэтому правило

$$x \mapsto x' \iff \alpha(spb\mathrm{Min}_x) = spb\mathrm{Min}_{x'}$$

задает гомеоморфизм пространств X и Y, который обозначим через φ_α.

6. Отождествим точки пространств X и Y гомеоморфизмом φ_α или φ_{α_1}. После чего, не умаляя общности, будем считать изоморфизмы α и α_1 автоморфизмами решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, которые оставляют на месте подалгебры spbMin_x и spbMax_x, $x \in X$. Вместе с равенствами (2), (3) и предложением 5 это означает, что для автоморфизмов α и α_1 выполняется условие:

$$(*) \qquad \mathbb{P}^\vee \mapsto \mathbb{P}^\vee, \quad \mathrm{spbMin}_Z \mapsto \mathrm{spbMin}_Z, \quad \mathrm{spbMax}_Z \mapsto \mathrm{spbMax}_Z, \quad A_Z \mapsto A_Z$$

для любого непустого конечного подмножества $Z \subseteq X$.

Автоморфизм полуполя $U^\vee(X)$, решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ или решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ назовем $*$-автоморфизмом, если выполняется условие (*).

Итак (см. пунты 1–6), вопросы 1 и 2 равносильны следующим вопросам.

Вопрос $1'$. Как устроены $*$-автоморфизмы полуполей $U^\vee(X)$, индуцирующие $*$-автоморфизмы решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$?

Вопрос $2'$. Как устроены $*$-автоморфизмы решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$? В частности, существуют ли $*$-автоморфизмы этих решеток, которые не индуцируются $*$-автоморфизмами полуполей $U^\vee(X)$?

Ответим на вопрос $1'$.

Легко видеть, что для любого $t \in \mathbb{P}$ правило $f \mapsto f^t$ задает $*$-автоморфизм полуполя $U^\vee(X)$, который обозначим через ψ_t.

Теорема 1. *Для произвольного автоморфизма ψ полуполя $U^\vee(X)$ равносильны следующие условия*:

1) *ψ индуцирует $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$*;
2) *ψ индуцирует $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$*;
3) *ψ — $*$-автоморфизм полуполя $U^\vee(X)$*;
4) *$\psi = \psi_t$ для некоторого $t \in \mathbb{P}$.*

$*$-автоморфизмы решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, которые по теореме 1 индуцирует автоморфизм ψ_t, обозначим через α_{ψ_t} и α_{1,ψ_t} соответственно.

Промежуток $(0,1]$ с естественным порядком образует цепь. Если $X = \{x, y\}$, то для любых порядковых автоморфизмов φ_x и φ_y цепи $(0,1]$ обозначим через $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$ преобразование полуполя $U^\vee(X)$, которое действует по правилу

$$(5) \qquad f \mapsto \begin{cases} 0, \text{ если } f = 0, \\ \max f\left(\varphi_x\left(\dfrac{f(x)}{\max f}\right), \varphi_y\left(\dfrac{f(y)}{\max f}\right)\right), \text{ если } f \neq 0. \end{cases}$$

Предложение 6. *Произвольное преобразование $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$ индуцирует $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$, $|X|=2$.*

$*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$, $|X|=2$, который по предложению 6 индуцирует преобразование $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$, обозначим через $\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}$.

Предложение 7. *Произвольные автоморфизмы $\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}$ и α_{ψ_t} равны тогда и только тогда, когда $\varphi_x(r)=\varphi_y(r)=r^t$ для всех $r\in(0,1]$.*

Из предложения 7 получаем, что семейство автоморфизмов $\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}$ строгим образом включает семейство автоморфизмов α_{ψ_t}. Отсюда и из теоремы 1 следует существование $*$-автоморфизмов решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$, $|X|=2$, которые не индуцируются $*$-автоморфизмами полуполя $U^\vee(X)$. Это наблюдение и следующая теорема отвечают на вопрос $2'$ в случае решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$.

Теорема 2. *Для произвольного $*$-автоморфизма α решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$*

1) *если $|X|\neq 2$, то $\alpha=\alpha_{\psi_t}$ для некоторого $t\in\mathbb{P}$,*

2) *если $|X|=2$, то $\alpha=\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}$ для некоторых порядковых автоморфизмов φ_x и φ_y цепи $(0,1]$.*

Для функции f такой, что $\operatorname{Im} f=\{a,b,c\}$ и $a>b>c$, положим $\operatorname{mid} f=b$.

Пусть $X=\{x,y,z\}$. Рассмотрим множество Mid_y, заданное равенством

$$\mathrm{Mid}_y=\{f\in U^\vee(X)\colon |\operatorname{Im} f|=3,\ f(y)=\operatorname{mid} f\}.$$

Зафиксируем числа a_y и s_y, $s_y>1>a_y>0$. Тогда для любой функции $f\in\mathrm{Mid}_y$, $f(x)>f(y)>f(z)$, найдутся единственные числа $k\in\mathbb{R}$ и $r,p\in\mathbb{P}$ такие, что

$$f=a_y^k\left(1,a_y^r,\left(a_y^r\right)^{1+p(s_y-1)}\right).$$

Данное равенство задает биекцию между множеством функций $f\in\mathrm{Mid}_y$, $f(x)>f(y)>f(z)$, и множеством наборов чисел $k\in\mathbb{R}$ и $r,p\in\mathbb{P}$. Аналогичное верно и для функций $f\in\mathrm{Mid}_y$, $f(x)<f(y)<f(z)$.

Зафиксируем набор чисел $T_y=(a_y,b_y,s_y,t_y)$, где $s_y,t_y>1>a_y,b_y>0$, и положим

$$c_y=a_y^{s_y-1},\quad l_y=\frac{s_y}{s_y-1},\quad d_y=b_y^{t_y-1},\quad q_y=\frac{t_y}{t_y-1}.$$

Тогда

$$l_y,q_y>1>c_y,d_y>0\quad (s_y-1)(l_y-1)=(t_y-1)(q_y-1)=1.$$

Обозначим через ψ_{T_y} преобразование множества Mid_y, заданное правилом

$$f\mapsto\begin{cases} b_y^k\left(1,b_y^r,\left(b_y^r\right)^{1+p(t_y-1)}\right), \text{ если } f=a_y^k\left(1,a_y^r,\left(a_y^r\right)^{1+p(s_y-1)}\right),\\ d_y^k\left(\left(d_y^r\right)^{1+p(q_y-1)},d_y^r,1\right), \text{ если } f=c_y^k\left(\left(c_y^r\right)^{1+p(l_y-1)},c_y^r,1\right).\end{cases}\tag{6}$$

Множества Mid_x, Mid_z и их преобразования ψ_{T_x}, ψ_{T_z} определим аналогичным образом. Тогда для произвольного набора T параметров T_x, T_y и T_z обозначим через ψ_T преобразование полуполя $U^\vee(X)$, действующее по правилу

$$f\mapsto\begin{cases}\psi_{T_x}(f), \text{ если } f\in\mathrm{Mid}_x,\\ \psi_{T_y}(f), \text{ если } f\in\mathrm{Mid}_y,\\ \psi_{T_z}(f), \text{ если } f\in\mathrm{Mid}_z,\\ f, \text{ если } |\operatorname{Im} f|\le 2.\end{cases}\tag{7}$$

Предложение 8. *Произвольное преобразование ψ_T индуцирует $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, $|X| = 3$.*

$*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, $|X| = 3$, который по предложению 8 индуцирует преобразование ψ_T, обозначим через α_{1,ψ_T}.

Предложение 9. *Произвольные автоморфизмы α_{1,ψ_t} и α_{1,ψ_T}, где*

$$T\colon T_x = (a_x, b_x, s_x, t_x),\ T_y = (a_y, b_y, s_y, t_y),\ T_z = (a_z, b_z, s_z, t_z),$$

равны тогда и только тогда, когда

$$b_x = a_x^t,\ t_x = s_x, \quad b_y = a_y^t,\ t_y = s_y, \quad b_z = a_z^t,\ t_z = s_z. \tag{8}$$

Из предложения 9 получаем, что семейство автоморфизмов α_{1,ψ_T} строгим образом включает семейство автоморфизмов α_{1,ψ_t}. Отсюда и из теоремы 1 следует существование $*$-автоморфизмов решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, $|X| = 3$, которые не индуцируются $*$-автоморфизмами полуполя $U^\vee(X)$. Это наблюдение и следующая теорема отвечают на вопрос $2'$ в случае решеток подалгебр $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$.

Теорема 3. *Для произвольного $*$-автоморфизма α_1 решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$*
1) *если $|X| \neq 3$, то $\alpha_1 = \alpha_{1,\psi_t}$ для некоторого $t \in \mathbb{P}$,*
2) *если $|X| = 3$, то $\alpha = \alpha_{1,\psi_T}$ для некоторого набора параметров T.*

Приступим к доказательству основных результатов. Ключевую роль будет играть техника однопорожденных подалгебр, суть которой заключается в том, что свойства подалгебр описываются в терминах решеточных свойств однопорожденных подалгебр, точной верхней гранью которых они являются.

2. Предварительные результаты

2.1. **Подалгебры $\langle f\rangle$ и $[f]$.** Дадим р.х. подалгебр $\langle f\rangle$ и $[f]$ и докажем ряд утверждений, которые устанавливают связи между решеточными свойствами этих подалгебр и свойствами функции f.

Докажем несколько простых утверждений.

Предложение 10. *Для любых подалгебр $[f]$, $[g] \subseteq [f]$ и точек $x, y \in X$*
1) *если $f(x) < f(y)$, то $g(x) \le g(y)$,*
2) *если $g(x) < g(y)$, то $f(x) < f(y)$, а значит, $|\operatorname{Im} g| \le |\operatorname{Im} f|$,*
3) *если $f, g \notin \mathbb{P}^\vee$, то $\operatorname{Max} f = \operatorname{Max} g$ и $\operatorname{Min} f \subseteq \operatorname{Min} g$,*
4) *если $f(x) = g(x) = 1$ и $g = a_0 \vee a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n$, то $a_0 \vee a_1 \vee \ldots \vee a_n = 1$,*
5) *если $f(x) = 1$ и $f = b_0 \vee b_1 f \vee \ldots \vee b_n f^n$, то $b_1 = 1$ или $f(y) = b_0$ при $f(y) < 1$.*

Доказательство. Поскольку $[g] \subseteq [f]$, функция g имеет вид

$$g = a_0 \vee a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n.$$

Кроме того, если $f(x) < f(y)$, то $a_i f^i(x) = a_i f^i(y)$ в случае $a_i = 0$ или $i = 0$, и $a_i f^i(x) < a_i f^i(y)$ в случае $a_i > 0$ и $i \ge 1$. Отсюда получаем утверждения 1)–3).

Утверждение 4) очевидно. Докажем утверждение 5).

Если $f(x) = 1$ и $f = b_0 \vee b_1 f \vee \ldots \vee b_n f^n$, то $b_0 \vee b_1 \vee \ldots \vee b_n = 1$. Значит, если $b_1 < 1$ и $f(y) < 1$, то $f(y) > b_i f^i(y)$ при $i \ge 1$, т.е. $f(y) = b_0$. $\square$

Решим вопрос о равенстве однопорожденных подалгебр.

Предложение 11. *Для любых функций* $f, g \in U^\vee(X)$
1) *если* $\langle f\rangle = \langle g\rangle$ *или* $[f] = [g]$, *то* $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g|$,
2) *условия* $\langle f\rangle = \langle g\rangle$ *и* $f/g \in \mathbb{P}^\vee$ *равносильны,*
3) *если* $|\operatorname{Im} f| \neq 2$, *то условия* $[f] = [g]$ *и* $f/g \in \mathbb{P}^\vee$ *равносильны,*
4) *если* $|\operatorname{Im} f| = 2$, *то*

$$[f] = [g] \Longleftrightarrow (|\operatorname{Im} g| = 2,\ \operatorname{Max} f = \operatorname{Max} g). \tag{9}$$

Доказательство. 1) Если $\langle f\rangle = \langle g\rangle$ или $[f] = [g]$, то $[g] \subseteq [f]$ и $[f] \subseteq [g]$. Отсюда $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g|$ в силу утверждения 2) предложения 10.

2) Если $f/g \in \mathbb{P}^\vee$, то $f = rg \in \langle g\rangle$ и $g = f/r \in \langle f\rangle$ для некоторого $r \in \mathbb{P}^\vee$. Отсюда $\langle f\rangle \subseteq \langle g\rangle$ и $\langle g\rangle \subseteq \langle f\rangle$. Значит, $\langle f\rangle = \langle g\rangle$.

Обратно, пусть $\langle f\rangle = \langle g\rangle$. Тогда $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g|$ по утверждению 1). Если $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 1$, то, очевидно, $f/g \in \mathbb{P}^\vee$.

Пусть $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| \geq 2$. В силу $f \in \langle g\rangle$, $g \in \langle f\rangle$ функции f и g имеют вид

$$f = a_1 g \vee \ldots \vee a_n g^n, \quad g = b_1 f \vee \ldots \vee b_m f^m. \tag{10}$$

Следовательно,

$$f = a_1\big(b_1 f \vee \ldots \vee b_m f^m\big) \vee \ldots \vee a_n\big(b_1 f \vee \ldots \vee b_m f^m\big)^n.$$

Отсюда

$$f = a_1 b_1 f \vee \ldots \vee a_n b_m^n f^{mn}.$$

Не умаляя общности, будем считать, что $1 = g(x) = f(x) > f(y)$ для некоторых $x, y \in X$; в частности, $a_1, b_1 \leq 1$. Заметим, что $a_1 b_1 = 1$ по утверждению 5) предложения 10. Поэтому $a_1 = b_1 = 1$. Отсюда и из (10) находим, что $f \geq a_1 g = g$ и $g \geq b_1 f = f$. Значит, $f = g$.

3) Если $f/g \in \mathbb{P}^\vee$, то $f = rg \in [g]$ и $g = f/r \in [f]$ для некоторого $r \in \mathbb{P}^\vee$. Отсюда $[f] \subseteq [g]$ и $[g] \subseteq [f]$. Значит, $[f] = [g]$.

Обратно, пусть $[f] = [g]$, причем $|\operatorname{Im} f| \neq 2$. Тогда $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g|$ согласно утверждению 1). Если $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 1$, то, очевидно, $f/g \in \mathbb{P}^\vee$.

Пусть $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| \geq 3$. В силу $f \in [g]$, $g \in [f]$ функции f и g имеют вид

$$f = a_0 \vee a_1 g \vee \ldots \vee a_n g^n, \quad g = b_0 \vee b_1 f \vee \ldots \vee b_m f^m. \tag{11}$$

Следовательно,

$$f = a_0 \vee a_1\big(b_0 \vee b_1 f \vee \ldots \vee b_m f^m\big) \vee \ldots \vee a_n\big(b_0 \vee b_1 f \vee \ldots \vee b_m f^m\big)^n.$$

Отсюда

$$f = \big(a_0 \vee a_1 b_0 \vee \ldots \vee a_n b_0^n\big) \vee a_1 b_1 f \vee \ldots \vee a_n b_m^n f^{mn}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $1 = g(x) = f(x) > f(y) > f(z)$ для некоторых $x, y, z \in X$; в частности, $a_1, b_1 \leq 1$.

Если $a_1 b_1 < 1$, то $f(y) = f(z) = a_0 \vee a_1 b_0 \vee \ldots \vee a_n b_0^n$ в силу утверждения 5) предложения 10; противоречие. Следовательно, $a_1 b_1 = 1$, т.е. $a_1 = b_1 = 1$. Отсюда и из (11) находим, что $f \geq a_1 g = g$ и $g \geq b_1 f = f$. Значит, $f = g$.

4) Пусть $|\operatorname{Im} f| = 2$. Если $[f] = [g]$, то $|\operatorname{Im} g| = 2$ по утверждению 1). Кроме того, в силу утверждения 2) предложения 10 для любых $x, y \in X$ неравенства $f(x) < f(y)$ и $g(x) < g(y)$ равносильны. Значит, $\operatorname{Max} f = \operatorname{Max} g$.

Обратно, пусть $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 2$ и $\operatorname{Max} f = \operatorname{Max} g$. Не умаляя общности, будем считать, что $\operatorname{Im} f = \{1, a\}$ и $\operatorname{Im} g = \{1, b\}$, где $1 > a, b$. Выберем $m, n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $a^m \leq b$ и $b^n \leq a$. Тогда $f = a \vee g^n \in [g]$ и $g = b \vee f^m \in [f]$. Значит, $[f] \subseteq [g]$ и $[g] \subseteq [f]$, т.е. $[f] = [g]$. □

Предложение 12. *Для произвольных подалгебр $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ таких, что*

$$|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 2, \quad \operatorname{Min} f = \operatorname{Min} g, \quad \max f = \max g,$$

условия $\langle g\rangle \subset \langle f\rangle$ и $\min g < \min f$ равносильны.

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $\max f = \max g = 1$.

Пусть $\min g < \min f$. Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\min f^m \le \min g$. Тогда $g = (\min g/\min f) f \vee f^m \in \langle f\rangle$. Кроме того, $\langle f\rangle \ne \langle g\rangle$ по предложению 11. Значит, $\langle g\rangle \subset \langle f\rangle$. Обратное утверждение следует из доказанного. $\square$

Обозначим через $\mathbb{A}_1([f])$ решетку подалгебр с единицей, включенных в $[f]$. Решетка $\mathbb{A}_1([f])$ является подрешеткой решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$.

Предложение 13. *Для любой подалгебры $[f]$ условия $|\operatorname{Im} f| = 1$, $|\operatorname{Im} f| = 2$ и $|\operatorname{Im} f| \ge 3$ равносильны условиям $|\mathbb{A}_1([f])| = 1$, $|\mathbb{A}_1([f])| = 2$ и $|\mathbb{A}_1([f])| \ge 3$ соответственно.*

Доказательство. Если $|\operatorname{Im} f| = 1$, то $\mathbb{A}_1([f]) = \{\mathbb{P}^\vee\}$. Пусть $|\operatorname{Im} f| = 2$. Если $[g] \subseteq [f]$ и $[g] \ne \mathbb{P}^\vee$, то $\operatorname{Max} f = \operatorname{Max} g$ в силу утверждения 3) предложения 10. Отсюда и из (9) находим, что $[f] = [g]$. Значит, $\mathbb{A}_1([f]) = \{\mathbb{P}^\vee, [f]\}$.

Пусть $|\operatorname{Im} f| \ge 3$. Тогда $[f^4] \subset [f^2] \subset [f]$ в силу $f^2 \in [f]$, $f^4 \in [f^2]$ и предложения 11. Значит, $|\mathbb{A}_1([f])| \ge 3$. $\square$

Поскольку $[f] = \langle f\rangle \vee \mathbb{P}^\vee$, из предложений 2 и 13 получаем

Предложение 14. *Для любой подалгебры $[f]$ в $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, а значит, и для любой подалгебры $\langle f\rangle$ в $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ с. р. х. условий $|\operatorname{Im} f| = 1$, $|\operatorname{Im} f| = 2$ и $|\operatorname{Im} f| \ge 3$.*

Дадим р. х. однопорожденных подалгебр.

Решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ — полные, т. е. любые подмножества их элементов имеет точные верхнюю и нижнюю грани. Элемент A полной решетки называется компактным, если для любого непустого семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ ее элементов $A \le \bigvee_{i\in I} A_i$ влечет $A \le \bigvee_{i\in J} A_i$ для некоторого конечного подмножества $J \subseteq I$. Элемент A решетки называется $\vee$-неразложимым, если $A = B \vee C$ влечет $A = B$ или $A = C$.

Предложение 15. *Подалгебры $\langle f\rangle$ и $[f]$ — это в точности $\vee$-неразложимые компактные элементы решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ соответственно.*

Доказательство. Докажем р. х. подалгебр $[f]$.

Пусть $[f] \subseteq \bigvee_{i\in I} A_i$ для некоторого семейства подалгебр $\{A_i\}_{i\in I}$. Тогда найдутся подалгебры $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$, $m \in \mathbb{N}$, и функции $f_1, \ldots, f_n \in A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_m}$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что функция f записывается в виде max-многочлена над $\mathbb{R}_+^\vee$ от $f_1, \ldots, f_n$. Значит, $[f] \subseteq A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_m}$, т. е. подалгебра $[f]$ компактна.

Допустим, $[f] = A \vee B$ для некоторых подалгебр $A, B \subset [f]$ с единицей. Тогда $|\mathbb{A}_1([f])| \ge 3$. Поэтому $|\operatorname{Im} f| \ge 3$ в силу предложения 13,

Далее, поскольку $f \in A \vee B$, функция f имеет вид

$$f = a_1 P_1(f) Q_1(f) \vee \ldots \vee a_n P_n(f) Q_n(f), \tag{12}$$

где $P_1(f), \ldots, P_n(f) \in A \cap \mathbb{R}_+^\vee[f]$ и $Q_1(f), \ldots, Q_n(f) \in B \cap \mathbb{R}_+^\vee[f]$ (возможно, $P_i \in \mathbb{P}^\vee$ или $Q_i \in \mathbb{P}^\vee$). Без ограничения общности, будем считать, что

$$1 = P_i(f(x)) = Q_i(f(x)) = f(x) > f(y) > f(z), \; i = 1, \ldots, n \tag{13}$$

для некоторых точек $x, y, z \in X$. Поскольку $1 > f(y) > f(z)$, в силу утверждения 5) предложения 10 для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$ многочлен $a_j P_j(f) Q_j(f)$ содержит одночлен f. Поэтому если, для определенности,

$$P_j(f) = b_0 \vee b_1 f \vee \dots \vee b_m f^m, \quad Q_j(f) = c_0 \vee c_1 f \vee \dots \vee c_k f^k, \tag{14}$$

то $a_j(b_0 c_1 \vee b_1 c_0) = 1$. Кроме того, $a_j, b_0, b_1, c_0, c_1 \leq 1$ в силу (12), (13) и (14). Следовательно, $a_j = b_0 = c_1 = 1$ или $a_j = b_1 = c_0 = 1$.

Если $a_j = b_0 = c_1 = 1$, то из (12) и (14) находим, что

$$f \geq a_j P_j(f) Q_j(f) \geq a_j b_0 Q_j(f) = Q_j(f) \geq c_1 f = f.$$

Отсюда $f = Q_j(f) \in B$, т.е. $[f] \subseteq B$; противоречие с $B \subset [f]$. Аналогично, случай $a_j = b_1 = c_0 = 1$ невозможен. Значит, подалгебра $[f]$ $\vee$-неразложима.

Обратно, пусть подалгебра A — $\vee$-неразложимый компактный элемент решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Поскольку A компактна и $A = \bigvee_{f \in A} [f]$, $A = [f_1] \vee \dots \vee [f_n]$ для некоторых $f_1, \dots, f_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Не умаляя общности, будем считать, что n принимает наименьшее возможное значение.

Если $n \geq 2$, то $A = [f_1] \vee ([f_2] \vee \dots \vee [f_n])$. Поскольку A — $\vee$-неразложимый элемент, $A = [f_1]$ или $A = [f_2] \vee \dots \vee [f_n]$; противоречие с минимальностью n. Значит, $n = 1$, т.е. $A = [f_1]$ — однопорожденная подалгебра.

Р.х. подалгебр $\langle f \rangle$ доказывается аналогично. □

2.2. **Решетка** $\mathbb{A}_{A_Z}(U^\vee(X))$**.** Для подмножеств $A \subseteq U^\vee(X)$ и $Z \subseteq X$, $Z \neq \emptyset$, положим $A|_Z = \{f|_Z : f \in A\}$. Легко видеть, что $U^\vee(X)|_Z$ — полуполе, если A — подалгебра полуполя $U^\vee(X)$, то $A|_Z$ — подалгебра полуполя $U^\vee(X)|_Z$, и

$$\langle f \rangle|_Z = \langle f|_Z \rangle, \quad [f]|_Z = [f|_Z]. \tag{15}$$

Предложение 16. *Для любых подалгебр A, B и непустого $Z \subseteq X$*

1) $(A \vee B)|_Z = A|_Z \vee B|_Z$,

2) *если* $A_Z \subseteq A, B$, *то* $(A \cap B)|_Z = A|_Z \cap B|_Z$,

3) *если* $\mathbb{P}^\vee \subseteq A, B$, *то*

$$A|_Z = B|_Z \Longleftrightarrow A \vee A_Z = B \vee A_Z. \tag{16}$$

Доказательство. 1) Пусть $f \in A \vee B$. Тогда

$$f = f_{11} \cdot \ldots \cdot f_{1i_1} \vee \dots \vee f_{n1} \cdot \ldots \cdot f_{ni_n}$$

для некоторых $f_{11}, \dots, f_{ni_n} \in A \cup B$ и $i_1, \dots, i_n, n \in \mathbb{N}$. Отсюда

$$f|_Z = f_{11}|_Z \cdot \ldots \cdot f_{1i_1}|_Z \vee \dots \vee f_{n1}|_Z \cdot \ldots \cdot f_{ni_n}|_Z \in A|_Z \vee B|_Z.$$

Значит, $(A \vee B)|_Z \subseteq A|_Z \vee B|_Z$. Обратное включение очевидно.

2) Пусть $A_Z \subseteq A, B$. Если $f \in A|_Z \cap B|_Z$, то $f = g|_Z = h|_Z$ для некоторых $g \in A$, $h \in B$. Тогда $g = h(g/h) \in B$, так как $g/h \in A_Z \subseteq B$. Отсюда $f = g|_Z \in (A \cap B)|_Z$. Значит, $A|_Z \cap B|_Z \subseteq (A \cap B)|_Z$. Обратное включение очевидно.

3) Пусть $\mathbb{P}^\vee \subseteq A, B$. Тогда $\mathbb{P}^\vee|_Z \subseteq A|_Z, B|_Z$. Кроме того, $A_Z|_Z = \mathbb{P}^\vee|_Z$. Поэтому если $A \vee A_Z = B \vee A_Z$, то отсюда и из утверждения 1) получаем

$$A|_Z = (A \vee \mathbb{P}^\vee)|_Z = A|_Z \vee \mathbb{P}^\vee|_Z = A|_Z \vee A_Z|_Z = (A \vee A_Z)|_Z =$$
$$(B \vee A_Z)|_Z = B|_Z \vee A_Z|_Z = B|_Z \vee \mathbb{P}^\vee|_Z = (B \vee \mathbb{P}^\vee)|_Z = B|_Z.$$

Обратно, пусть $A|_Z = B|_Z$. Тогда если $f \in A$, то $f|_Z = g|_Z$ для некоторой $g \in B$. Отсюда $f = g(f/g) \in B \vee A_Z$, так как $f/g \in A_Z$. Поэтому $A \vee A_Z \subseteq B \vee A_Z$. Аналогично, $B \vee A_Z \subseteq A \vee A_Z$. Значит, $A \vee A_Z = B \vee B_Z$. □

Обозначим через $\mathbb{A}_{A_Z}(U^\vee(X))$ решетку подалгебр полуполя $U^\vee(X)$, которые включают подалгебру A_Z. Решетка $\mathbb{A}_{A_Z}(U^\vee(X))$ является подрешеткой решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, так как $\mathbb{P}^\vee \subseteq A_Z$.

Следующее предложение, как будет ясно из дальнейшего, позволит нам свести описание $*$-автоморфизмов решеток $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, $|X| \geq 4$, к случаю $|X| = 3$.

Предложение 17. *Для любой подалгебры A_Z правило $\beta_Z\colon A \mapsto A|_Z$ задает изоморфизм решеток $\mathbb{A}_{A_Z}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X)|_Z)$.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathbb{A}_{A_Z}(U^\vee(X))$. Тогда по утверждениям 1) и 2) предложения 16 имеем $\beta_Z(A \vee B) = \beta_Z(A) \vee \beta_Z(B)$ и $\beta_Z(A \cap B) = \beta_Z(A) \cap \beta_Z(B)$.

Далее, поскольку $A = A \vee A_Z$ и $B = B \vee B_Z$, в силу (16)

$$A = B \Longleftrightarrow A \vee A_Z = B \vee A_Z \Longleftrightarrow A|_Z = B|_Z \Longleftrightarrow \beta_Z(A) = \beta_Z(B).$$

Значит, отображение β_Z инъективно. Наконец, докажем его сюръективность.

Пусть $A' \in \mathbb{A}_1(U^\vee(X)|_Z)$. Тогда $A = \{f \in U^\vee(X)\colon\ f|_Z \in A'\}$ — подалгебра и $A_Z \subseteq A$, так как $A_Z|_Z = \mathbb{P}^\vee|_Z \subseteq A'$. Значит, $\beta_Z(A) = A'$. $\square$

Далее и до конца раздела будем работать в решетке $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Подалгебры с единицей, для краткости, будем называть подалгебрами.

Доказательство предложения 5. Докажем, что для подалгебры $spbA_Z$, $|Z| \geq 2$, с. р. х. подалгебры bA_Z или, что в силу (1) равносильно, b-подалгебр $[f] \subseteq bA_Z$. Рассмотрим (см. предложение 4) произвольную b-подалгебру $[f]$. Тогда включение $[f] \subseteq bA_Z$ равносильно условию $[g] \subseteq spbA_Z$ для всех $[g] \subseteq [f]$. Действительно, пусть условие выполняется, но $[f] \not\subseteq bA_Z$. Тогда $f(x) < f(y)$ для некоторых $x, y \in Z$. Положим $g = f(x) \vee f$. Тогда $[g]$ — sp-подалгебра и $[g] \subseteq [f]$, но $[g] \not\subseteq spbA_Z$, так как $g(x) < g(y)$; противоречие. Значит, $[f] \subseteq bA_Z$. Обратное утверждение очевидно.

Докажем, что для подалгебры $bA_Z, 2 \leq |Z| < \infty$, с. р. х. подалгебры A_Z или, что в силу (1) равносильно, подалгебр $[f] \subseteq A_Z$. Заметим, что для подалгебры $[f]$ включение $[f] \subseteq A_Z$ равносильно условию

$$([g] \subseteq bA_Z,\ [h] \subseteq [f] \vee [g],\ [h] \text{— b-подалгебра}) \Longrightarrow [h] \subseteq bA_Z. \tag{17}$$

Действительно, если $[f] \subseteq A_Z$ и $[g] \subseteq bA_Z$, то $|f(Z)| = |g(Z)| = 1$. Поэтому $|h(Z)| = 1$ для любой b-подалгебры $[h] \subseteq [f] \vee [g]$. Значит, $[h] \subseteq bA_Z$.

Обратно, пусть условие (17) выполняется, но $[f] \not\subseteq A_Z$. Поскольку $|Z| < \infty$, $f \leq r$ на Z для некоторого $r \in \mathbb{P}^\vee$. Положим $g = 1/(r \vee f)$ и $h = f/(r \vee f)$. Тогда $[h] \subseteq [f] \vee [g]$, $[h]$ — b-подалгебра и $[g] \subseteq bA_Z$, так как $h = fg$, $h \leq 1$, $g \leq 1/r$ и $g = 1/r$ на Z. Кроме того, $|h(Z)| = |f(Z)|$ и $|f(Z)| \geq 2$, так как $[f] \not\subseteq A_Z$. Следовательно, $[h] \not\subseteq bA_Z$; противоречие с (17). Значит, $[f] \subseteq A_Z$.

Предложение 18. *Для различных пар $(spb\mathrm{Min}_x, spb\mathrm{Max}_x)$, $(spb\mathrm{Min}_y, spb\mathrm{Max}_y)$ и любой подалгебры $[f]$ с. р. х. условий $f(x) < f(y)$, $f(x) = f(y)$ и $f(x) > f(y)$.*

Доказательство. Достаточно дать р. х. неравенства $f(x) < f(y)$.

Положим $Z = \{x, y\}$. Тогда в силу (2) и (3)

$$spbA_Z = (spb\mathrm{Min}_x \cap spb\mathrm{Min}_y) \vee (spb\mathrm{Max}_x \cap spb\mathrm{Max}_y).$$

По предложению 5 для подалгебры $spbA_Z$ с. р. х. подалгебры A_Z. Наконец, заметим (см. (15) и (16)), что

$$f(x) < f(y) \Longleftrightarrow \big([f|_Z] \subseteq spb\mathrm{Min}_x|_Z\,,\ [f|_Z] \nsubseteq spb\ \mathrm{Min}_y|_Z\big) \Longleftrightarrow \\ ([f] \vee A_Z \subseteq spb\mathrm{Min}_x \vee A_Z,\ [f] \vee A_Z \nsubseteq spb\mathrm{Min}_y \vee A_Z)\,.$$

□

Замечание 2. Пусть α_1 — $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Тогда в силу (*) и предложения 18 для любой подалгебры $[f]$ и подалгебры $[f'] = \alpha_1([f])$

(18) $\qquad f(x) < f(y) \Longleftrightarrow f'(x) < f'(y)$ для произвольных $x, y \in X$.

Кроме того, если α — $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$, то в силу предложения 2 ограничение α на решетку $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ служит ее $*$-автоморфизмом. Кроме того, $\alpha([f]) = \alpha(\langle f\rangle \vee \mathbb{P}^\vee) = \langle f'\rangle \vee \mathbb{P}^\vee = [f']$ для любой подалгебры $\langle f\rangle$ и подалгебры $\langle f'\rangle = \alpha(\langle f\rangle)$. Значит, для α утверждение (18) также выполняется.

Произвольная подалгебра Min_x является точной верхней гранью подалгебр $[f]$ таких, что $f(y) \geq f(x)$ для всех $y \in X$. Аналогичное верно и для подалгебр Max_x. Поэтому из предложения 18 получаем

Предложение 19. *Для любой пары* $(spb\mathrm{Min}_x, spb\mathrm{Max}_x)$ *и множества пар* $\{(spb\mathrm{Min}_y, spb\mathrm{Max}_y) : y \in X\}$ *с. р. х. пары* $(\mathrm{Min}_x, \mathrm{Max}_x)$.

Предложение 20. *Если X — компакт, то для любых подалгебр $[f]$ и A_Z, $2 \leq |Z| \leq \infty$, с. р. х.*

1) *множества $\{\mathrm{Min}_x : x \in Z\}$, а значит, равенства $|Z| = n$, $n \in \mathbb{N}$,*

2) *условий $f(x) < f(y)$, $f(x) = f(y)$ и $f(x) > f(y)$ для любых подалгебр Min_x и Min_y, $x, y \in Z$.*

Доказательство. Рассмотрим (см. предложение 3) произвольное множество пар $\{(\mathrm{Min}_x, \mathrm{Max}_x) : x \in Z'\}$, где $2 \leq |Z'| < \infty$. Тогда в силу (2) и (3)

$$A_{Z'} = \Big(\bigcap_{x\in Z'} \mathrm{Min}_x\Big) \vee \Big(\bigcap_{x\in Z'} \mathrm{Max}_x\Big).$$

Остается заметить, что множество $\{\mathrm{Min}_x : x \in Z'\}$ — искомое тогда и только тогда, когда $A_Z = A_{Z'}$, так как в случае $2 \leq |Z|, |Z'| < \infty$ равенства $A_Z = A_{Z'}$ и $Z = Z'$ равносильны.

Утверждение 2) следует из утверждения 1) и предложения 18. □

3. $*$-АВТОМОРФИЗМЫ ПОЛУПОЛЯ $U^\vee(X)$

Докажем теорему 1. Импликации 1) ⇒ 3) и 2) ⇒ 3) справедливы в силу (*). Установим обратные импликации.

Пусть ψ — $*$-автоморфизм полуполя $U^\vee(X)$. В частности, $\psi(\mathbb{P}^\vee) = \mathbb{P}^\vee$. Тогда для произвольного $A \subseteq U^\vee(X)$ и любых $f, g \in A$, $r \in \mathbb{P}^\vee$ условия $r \in \mathbb{P}^\vee$, $f \vee g, fg, rf \in A$ и $\psi(r) \in \mathbb{P}^\vee$, $\psi(f) \vee \psi(g), \psi(f)\psi(g), \psi(r)\psi(f) \in \psi(A)$ равносильны. Поэтому A — подалгебра тогда и только тогда, когда $\psi(A)$ —подалгебра. Кроме того, поскольку $\psi(\mathbb{P}^\vee) = \mathbb{P}^\vee$ и ψ — биекция, для любых подалгебр A и B

$$\mathbb{P}^\vee \subseteq A \Longleftrightarrow \mathbb{P}^\vee \subseteq \psi(A), \quad A \subseteq B \Longleftrightarrow \psi(A) \subseteq \psi(B).$$

Значит, ψ индуцирует $*$-автоморфизмы решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$.

Импликации 4) $\Rightarrow$ 1) и 4) $\Rightarrow$ 2) следуют из импликаций 3) $\Rightarrow$ 1) и 3) $\Rightarrow$ 2), так как ψ_t — $*$-автоморфизм. Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 4).

Пусть автоморфизм ψ индуцирует $*$-автоморфизм α_1 решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Заметим, что автоморфизм ψ — порядковый, так как для любых $f, g \in U^\vee(X)$

$$f \le g \Longleftrightarrow f \vee g = g \Longleftrightarrow \psi(f) \vee \psi(g) = \psi(g) \Longleftrightarrow \psi(f) \le \psi(g).$$

Кроме того, $\psi(\mathbb{P}^\vee) = \mathbb{P}^\vee$ и $\psi(1) = 1$ в силу (*) и $\psi(1) = \psi(1 \cdot 1) = \psi(1)\psi(1)$. Значит, $\psi\colon (0,1] \mapsto (0,1]$ и $\psi(f \wedge g) = \psi(f) \wedge \psi(g)$ для любых $f, g \in U^\vee(X)$.

Выберем $f \in (0,1)$. Тогда $\psi(f) = f^t$ для некоторого $t \in \mathbb{P}$. Докажем, что $\psi = \psi_t$, т.е. $\psi(g) = g^t$ для всех $g \in U^\vee(X)$.

Заметим, что для любых $a \in (0,1)$, $b \in (0,1]$ и $i \in \mathbb{N}$ найдется показатель $n_i \in \mathbb{N}_0$ такой, что $a^{1+n_i} < b^i \le a^{n_i}$ или, что равносильно,

$$\frac{n_i}{i} \le \log_a b < \frac{1}{i} + \frac{n_i}{i}.$$

Показатель n_i обозначим через $n_i(a,b)$. Тогда

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{n_i(a,b)}{i} = \log_a b. \tag{19}$$

Случай 1: $g \in (0,1]$. Тогда $n_i(f,g) = n_i(\psi(f), \psi(g)) = n_i(f^t, \psi(g))$, так как ψ — порядковый автоморфизм и $\psi(f) = f^t$. Отсюда и из (19) находим, что

$$\log_f g = \lim_{i\to+\infty} \frac{n_i(f,g)}{i} = \lim_{i\to+\infty} \frac{n_i(f^t, \psi(g))}{i} = \log_{f^t} \psi(g).$$

Значит, $\psi(g) = g^t$.

Случай 2: $g \in (1, +\infty)$. Тогда $\psi(g) = g^t$, так как $1/g \in (0,1)$ и (см. случай 1) $\psi(g)/g^t = \psi(g)\psi(1/g) = \psi(1) = 1$.

Случай 3: $g \in spbU^\vee(X)$. Докажем

$$g \in spb\mathrm{Min}_x \cup spb\mathrm{Max}_x \Longrightarrow \psi(g)(x) = g^t(x). \tag{20}$$

Пусть $g \in spb\mathrm{Min}_x$. Тогда равенство $g(x) = a$ равносильно условию

$$g = a \vee g \text{ и } g \ne b \vee g \text{ для всех } b > a,\ b \in \mathbb{P}^\vee. \tag{21}$$

Поскольку $\psi(a) = a^t$, $\psi(b) = b^t$ (см. случаи 1 и 2) и ψ — порядковый автоморфизм, условие (21) эквивалентно условию

$$\psi(g) = a^t \vee \psi(g) \text{ и } \psi(g) \ne b^t \vee \psi(g) \text{ для всех } b^t > a^t,\ b^t \in \mathbb{P}^\vee,$$

которое равносильно равенству $\psi(g)(x) = a^t$, так как $\psi(g) \in \psi(spb\mathrm{Min}_x)$ и $\psi(spb\mathrm{Min}_x) = spb\mathrm{Min}_x$ в силу (*).

Если $g \in spb\mathrm{Max}_x$, то $\psi(g)(x) = g^t(x)$, так как $1/g \in spb\mathrm{Min}_x$, а значит, $\psi(g)(x)/g^t(x) = \psi(g)(x)\psi(1/g)(x) = \psi(g \cdot 1/g)(x) = 1$.

Наконец, докажем, что $\psi(g)(x) = g^t(x)$ для произвольного $x \in X$.

Поскольку $g(x) \vee g \in spb\mathrm{Min}_x$ и $g(x) \wedge g \in spb\mathrm{Max}_x$, в силу (20)

$$\psi(g(x) \vee g)(x) = (g(x) \vee g)^t(x) = g^t(x),$$
$$\psi(g(x) \wedge g)(x) = (g(x) \wedge g)^t(x) = g^t(x).$$

Отсюда и из $g(x)g = (g(x) \vee g)(g(x) \wedge g)$ находим, что

$$g^t(x)\psi(g)(x) = \psi(g(x))\psi(g)(x) = \psi(g(x)g)(x) =$$
$$\psi\big((g(x) \vee g)(g(x) \wedge g)\big)(x) = \psi\big(g(x) \vee g\big)(x)\psi\big(g(x) \wedge g\big)(x) = g^t(x)g^t(x).$$

Значит, $\psi(g)(x) = g^t(x)$.

Случай 4: $g \in U^\vee(X)$. Докажем, что $\psi(g)(x) = g^t(x)$ для любого $x \in X$.

Пусть $a < g(x) < b$, $a, b \in \mathbb{P}^\vee$. Тогда $(g \vee a) \wedge b \in spbU^\vee(X)$ и (см. случай 3)

$$\psi((g \vee a) \wedge b) = ((g \vee a) \wedge b)^t = (g^t \vee a^t) \wedge b^t.$$

Кроме того, поскольку ψ — порядковый автоморфизм,

$$\psi((g \vee a) \wedge b) = (\psi(g) \vee \psi(a)) \wedge \psi(b) = (\psi(g) \vee a^t) \wedge b^t.$$

Следовательно, $(g^t(x) \vee a^t) \wedge b^t = (\psi(g)(x) \vee a^t) \wedge b^t$. Значит, $\psi(g)(x) = g^t(x)$, так как $a^t < g^t(x) < b^t$. Теорема 1 доказана.

4. $*$-автоморфизмы решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, $|X| \le 2$

Опишем $*$-автоморфизмы α и α_1 решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, $|X| \le 2$.

Если $|X| = 1$, то $U^\vee(X) = \mathbb{P}^\vee$, $\mathbb{A}(U^\vee(X)) = \{\emptyset, \mathbb{P}^\vee\}$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X)) = \{\mathbb{P}^\vee\}$. Следовательно, автоморфизмы α и α_1 — тождественные, причем индуцируются любым $*$-автоморфизмом ψ полуполя $U^\vee(X)$, так как $\psi(\mathbb{P}^\vee) = \mathbb{P}^\vee$ в силу (*).

Пусть $X = \{x, y\}$. Для произвольного $r \in \mathbb{P}$, $r \le 1$, обозначим через Min_x^r и Min_y^r подалгебры, заданные равенствами

$$\mathrm{Min}_x^r = \{f \in U^\vee(X) \colon f(x) < rf(y)\}, \quad \mathrm{Min}_y^r = \{f \in U^\vee(X) \colon f(y) < rf(x)\}.$$

Из определения подалгебры Min_x^r и предложения 12 получаем:

$$\begin{aligned}
&\langle (r_1, 1)\rangle \subset \langle (r_2, 1)\rangle \Longleftrightarrow r_1 < r_2;\\
&\langle (r_1, 1)\rangle \subset \mathrm{Min}_x^{r_2} \Longleftrightarrow r_1 < r_2;\\
&\mathrm{Min}_x^{r_1} \subset \mathrm{Min}_x^{r_2} \Longleftrightarrow r_1 < r_2;\\
&\mathrm{Min}_x^{r_1} \subset \langle (r_2, 1) \Longleftrightarrow r_1 \le r_2 < 1.
\end{aligned} \tag{22}$$

Опишем подалгебры полуполя $U^\vee(X)$.

Предложение 21. *Для произвольной подалгебры A*

1) *если* $1 \in A$, *то* $A \in \{\mathbb{P}^\vee, \mathrm{Min}_x, \mathrm{Min}_y, U^\vee(X)\}$,

2) *если* $1 \notin A$, *то* $A \in \big\{\langle (r_1, 1)\rangle, \langle (1, r_1)\rangle, \mathrm{Min}_x^{r_2}, \mathrm{Min}_y^{r_2} \colon r_1 < 1,\ r_2 \le 1\big\}$.

Доказательство. Если $f(x) > f(y)$ и $g(x) < g(y)$ для некоторых $f, g \in A$, то для любой $h \in U^\vee(X)$ найдутся $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $h(x)f^m(y)/f^m(x) < h(y)$ и $h(y)g^n(x)/g^n(y) < h(x)$, а значит, $h = h(x)f^m/f^m(x) \vee h(y)g^n/g^n(y) \in A$. Следовательно, $A = U^\vee(X)$.

Пусть $f(y) \ge f(x)$ для всех $f \in A$. Положим $r = \sup_{f \in A} f(x)/f(y)$.

Если $r < 1$ и $f(x)/f(y) = r$ для некоторой $f \in A$, то $A = \langle f\rangle$ в силу (22).

Если $r \le 1$ и $f(x)/f(y) < r$ для всех $f \in A$, то $A = \mathrm{Min}_x^r$ в силу (22).

Пусть $r = 1$ и $1 \in A$. Тогда $\mathbb{P}^\vee \subseteq A$. Если $A \ne \mathbb{P}^\vee$, то для любого r', $1 \ge r' > 0$, найдется $f \in A$ такая, что $f(x)/f(y) \ge r'$. Поэтому $\langle (r', 1)\rangle \subseteq A$, так как $\langle f/f(y)\rangle \subseteq A$ и $\langle (r', 1)\rangle \subseteq \langle f/f(y)\rangle$ в силу (22). Следовательно, $\mathrm{Min}_x \subseteq A$. Кроме того, $A \subseteq \mathrm{Min}_x$, так как $f(y) \ge f(x)$ для всех $f \in A$. Значит, $A = \mathrm{Min}_x$.

Случай, когда $f(y) \le f(x)$ для всех $f \in A$, разбирается аналогично. $\square$

Из утверждения 1) предложения 21 получаем, что существует лишь тождественный $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, $|X| = 2$.

Утверждение 2) теоремы 3 для $|X| = 2$ доказано.

Доказательство предложения 6. Рассмотрим произвольное преобразование $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}$. Из (5) следует, что для любой функции $f \in U^\vee(X)$ и функции

$f' = \psi_{\varphi_x,\varphi_y}(f)$ неравенства $f(x) < f(y)$ и $f(x) > f(y)$ равносильны неравенствам $f'(x) < f'(y)$ и $f'(x) > f'(y)$ соответственно. Отсюда и из (22) получаем

$$\psi_{\varphi_x,\varphi_y}\colon \begin{cases} \mathbb{P}^\vee \mapsto \mathbb{P}^\vee,\ \mathrm{Min}_x \mapsto \mathrm{Min}_x,\ \mathrm{Min}_y \mapsto \mathrm{Min}_y,\ U^\vee(X) \mapsto U^\vee(X), \\ \langle(r,1)\rangle \mapsto \langle(\varphi_x(r),1)\rangle,\ \langle(1,r)\rangle \mapsto \langle(1,\varphi_y(r))\rangle, \\ \mathrm{Min}_x^r \mapsto \mathrm{Min}_x^{\varphi_x(r)},\ \mathrm{Min}_y^r \mapsto \mathrm{Min}_y^{\varphi_y(r)} \text{ для всех } r \in (0,1]. \end{cases} \tag{23}$$

Вместе с предложением 21 это означает, что преобразование $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$ индуцирует $*$-преобразование решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Остается доказать

$$A \subset B \Longleftrightarrow \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) \subset \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(B) \text{ для любых подалгебр } A, B. \tag{24}$$

В силу (22) и (23) имеем:
если $B = U^\vee(X)$, то условие (24), очевидно, выполняется;
если $B = \mathrm{Min}_x$, то

$$\begin{aligned} A \subset B \Longleftrightarrow A \in \{\mathrm{Min}_x^r, \langle(r,1)\rangle \colon r \le 1\} \Longleftrightarrow \\ \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) \in \Big\{\mathrm{Min}_x^{\varphi_x(r)}, \langle(\varphi_x(r),1)\rangle \colon r \le 1\Big\} \Longleftrightarrow \\ \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) \subset \mathrm{Min}_x \Longleftrightarrow \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) \subset \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(B); \end{aligned}$$

если $B = \mathrm{Min}_x^r$, то

$$\begin{aligned} A \subset B \Longleftrightarrow A \in \{\mathrm{Min}_x^{r_1}, \langle(r_1,1)\rangle \colon r_1 < r\} \Longleftrightarrow \\ \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) \in \Big\{\mathrm{Min}_x^{\varphi_x(r_1)}, \langle(\varphi_x(r_1),1)\rangle \colon r_1 < r\Big\} \Longleftrightarrow \\ \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) \subset \mathrm{Min}_x^{\varphi_x(r)} \Longleftrightarrow \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) \subset \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(B); \end{aligned}$$

если $B = \langle(r,1)\rangle$, $r < 1$, то

$$\begin{aligned} A \subset B \Longleftrightarrow A \in \{\mathrm{Min}_x^{r_1}, \langle(r_2,1)\rangle \colon r_1 \le r,\ r_2 < r\} \Longleftrightarrow \\ \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) \in \Big\{\mathrm{Min}_x^{\varphi_x(r_1)}, \langle(\varphi_x(r_2),1)\rangle \colon r_1 \le r,\ r_2 < r\Big\} \Longleftrightarrow \\ \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) \subset \langle(\varphi_x(r),1)\rangle \Longleftrightarrow \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) \subset \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(B); \end{aligned}$$

если $B = \langle(1,1)\rangle = \mathbb{P}^\vee$, то

$$\begin{aligned} A \subset B \Longleftrightarrow A = \emptyset \Longleftrightarrow \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) = \emptyset \\ \Longleftrightarrow \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) \subset \mathbb{P}^\vee \Longleftrightarrow \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(A) \subset \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(B). \end{aligned}$$

Случаи $B = \mathrm{Min}_y$, $B = \mathrm{Min}_y^r$ и $B = \langle(1,r)\rangle$ разбираются аналогично.

Доказательство предложения 7. Пусть $\alpha_{\varphi_x,\varphi_y} = \alpha_{\psi_t}$. Тогда

$$\langle(\varphi_x(r),1)\rangle = \alpha(\langle(r,1)\rangle) = \alpha_{\psi_t}(\langle(r,1)\rangle) = \langle(r^t,1)\rangle \text{ для всех } r \in (0,1].$$

Отсюда $\varphi_x(r) = r^t$ по предложению 11. Аналогично, $\varphi_y(r) = r^t$.

Обратное утверждение очевидно.

Доказательство утверждения 2) теоремы 2. Пусть α — $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Тогда $\alpha(\mathbb{P}^\vee) = \mathbb{P}^\vee$ и $\alpha(\mathrm{Min}_x) = \mathrm{Min}_x$ в силу (*). Поэтому образом подалгебры $\langle(r,1)\rangle \subset \mathrm{Min}_x$, $r \le 1$, будет подалгебра $\langle(r',1)\rangle \subset \mathrm{Min}_x$, $r' \le 1$, причем равенства $r = 1$ и $r' = 1$ равносильны. Кроме того, если $\alpha(\langle(r_1,1)\rangle) = \langle(r_1',1)\rangle$ и $\alpha(\langle(r_2,1)\rangle) = \langle(r_2',1)\rangle$, где $r_1', r_2' < 1$, то в силу предложения 12 неравенства $r_1 < r_2$ и $r_1' < r_2'$ равносильны. Значит, правило $r \mapsto r'$

задает некоторый порядковый автоморфизм φ_x цепи $(0,1]$. Аналогичным образом зададим автоморфизм φ_y. Тогда $\alpha(\langle f\rangle) = \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(\langle f\rangle)$ для любой подалгебры $\langle f\rangle$. Значит, $*$-автоморфизмы α и $\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}$ равны, так как образ произвольной подалгебры A однозначно определяется образами подалгебр $\langle f\rangle \subseteq A$, точной верхней гранью которых она является.

5. $*$-АВТОМОРФИЗМЫ РЕШЕТКИ $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, $|X| = 3$

Опишем $*$-автоморфизмы α_1 решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, $X = \{x, y, z\}$. Далее и до конца раздела будем работать в решетке $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Подалгебры с единицей, для краткости, будем называть подалгебрами.

Замечание 3. В силу предложения 14 для любой подалгебры $[f]$ равенства $|\operatorname{Im} f| = 1$, $|\operatorname{Im} f| = 2$ и $|\operatorname{Im} f| = 3$ имеют р. х. Этим будем пользоваться без ссылок на предложение 14.

5.1. **Подалгебры $[e_Z]$.** Обозначим через e_Z функцию $f \in U^\vee(X)$ такую, что $|\operatorname{Im} f| = 2$ и $\operatorname{Min} f = Z$. Подалгебры $[e_Z]$ имеют р. х. (см. замечание 3). В силу (9) подалгебра $[e_Z]$ задается множеством Z однозначно. Поэтому существует шесть подалгебр $[e_Z]$: $[e_x], [e_y], [e_z], [e_{x,y}], [e_{x,z}], [e_{y,z}]$.

Дадим р. х. подалгебр $[e_Z]$, $|Z| = 2$.

Предложение 22. *Для любой подалгебры* $[e_Z]$

$$|Z| = 2 \Longleftrightarrow [e_Z] \subseteq [f] \text{ для некоторой подалгебры } [f], |\operatorname{Im} f| = 3.$$

Доказательство. Пусть $|Z| = 2$ и, для определенности, $e_Z(x) = e_Z(y) < e_Z(z)$. Положим $f = (e_Z(x)/2, e_Z(y), e_Z(z))$. Тогда $[e_Z] \subseteq [f]$, так как $e_Z = e_Z(x) \vee f$.

Обратно, пусть $[e_Z] \subseteq [f]$, $|\operatorname{Im} f| = 3$. Тогда $\operatorname{Max} e_Z = \operatorname{Max} f$ по утверждению 3) предложения 10. Значит, $|Z| = |\operatorname{Min} e_Z| = 2$, так как $|\operatorname{Max} f| = 1$. □

Докажем несколько простых свойств подалгебр $[e_Z]$.

Предложение 23. *Верны следующие равенства*:

$$(25)\qquad \begin{aligned} &[e_x] \vee [e_y] = \operatorname{Max}_z, \quad [e_{x,y}] \vee [e_{y,z}] = \operatorname{Min}_y, \\ &[e_x] \vee [e_{y,z}] = [e_x] \cup [e_{y,z}], \quad [e_x] \vee [e_{x,y}] = \operatorname{Min}_x \cap \operatorname{Max}_z. \end{aligned}$$

Доказательство. 1) $[e_x] \vee [e_y] \subseteq \operatorname{Max}_z$, так как $e_x, e_y \in \operatorname{Max}_z$. Кроме того, если $f \in \operatorname{Max}_z$, то $g = (f(x)/f(z), 1, 1) \in [e_x]$ и $h = (1, f(y)/f(z), 1) \in [e_y]$. Поэтому $\operatorname{Max}_z \subseteq [e_x] \vee [e_y]$, так как $f = f(z)gh \in [e_x] \vee [e_y]$. Значит, $[e_x] \vee [e_y] = \operatorname{Max}_z$.

2) $[e_{x,y}] \vee [e_{y,z}] \subseteq \operatorname{Min}_y$, так как $e_{x,y}, e_{y,z} \in \operatorname{Min}_y$. Кроме того, если $f \in \operatorname{Min}_y$, то $g = (1, 1, f(z)/f(y)) \in [e_{x,y}]$ и $h = (f(x)/f(y), 1, 1) \in [e_{y,z}]$. Поэтому $\operatorname{Min}_y \subseteq [e_{x,y}] \vee [e_{y,z}]$, так как $f = f(y)gh$. Значит, $[e_{x,y}] \vee [e_{y,z}] = \operatorname{Min}_y$.

3) Если $f \in [e_x] \vee [e_{y,z}]$, то $f(y) = f(z)$, так как $e_x(y) = e_x(z)$ и $e_{y,z}(y) = e_{y,z}(z)$. Значит, $[e_x] \vee [e_{y,z}] \subseteq [e_x] \cup [e_{y,z}]$. Обратное включение очевидно.

4) $[e_x] \vee [e_{x,y}] \subseteq \operatorname{Min}_x \cap \operatorname{Max}_z$, так как $e_x, e_{x,y} \in \operatorname{Min}_x \cap \operatorname{Max}_z$. Кроме того, если $f \in \operatorname{Min}_x \cap \operatorname{Max}_z$, то $g = (f(x)/f(y), 1, 1) \in [e_x]$ и $h = (1, 1, f(z)/f(y)) \in [e_{x,y}]$. Поэтому $\operatorname{Min}_x \cap \operatorname{Max}_z \subseteq [e_x] \vee [e_{x,y}]$, так как $f = f(y)gh$. Значит, $[e_x] \vee [e_{x,y}] = \operatorname{Min}_x \cap \operatorname{Max}_z$. □

Замечание 4. Зафиксируем произвольную подалгебру $[v]$, $|\operatorname{Im} v| = 3$. Не умаляя общности, будем считать, что $v(x) > v(y) > v(z)$. Легко видеть, что для любых подалгебр $\operatorname{Min}_{x'}$, $\operatorname{Max}_{x'}$, $x' \in X$, и $[f]$

$$x' \in \operatorname{Max} f \Longleftrightarrow [f] \subseteq \operatorname{Max}_{x'}, \quad x' \in \operatorname{Min} f \Longleftrightarrow [f] \subseteq \operatorname{Min}_{x'}.$$

Вместе с предложениями 3 и 20 это означает, что для подалгебры $[v]$ с. р. х. тройки $(\mathrm{Min}_x, \mathrm{Min}_y, \mathrm{Min}_z)$, а также подалгебр $[f]$ с любым наперед заданным порядком значений $f(x)$, $f(y)$ и $f(z)$.

5.2. **Подалгебры** $[f^r]$**.** Докажем, что для любой подалгебры $[f], |\operatorname{Im} f| = 3$, и показателя $r \in \mathbb{P}$ с. р. х. подалгебры $[f^r]$.

Предложение 24. *Для любых подалгебр* $[f]$ *и* $[g] \subseteq [f]$, *где* $1 = f(x) > f(y) > f(z)$ *и* $1 = g(x) > g(y) > g(z)$, *найдутся числа* $i \in \mathbb{N}$ *и* a_i, $1 \geq a_i > 0$, *такие, что* $g \geq a_i f^i$ *и* $g(y) = a_i f^i(y)$. *В частности,* $f(y) \geq g(y)$.

Доказательство. Поскольку $[g] \subseteq [f]$ и $1 = f(x) = g(x) > g(y) > g(z)$, функция g имеет вид $g = a_0 \vee a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n$, причем $a_0 \vee \ldots \vee a_n = 1$ и $g(z) \geq a_0$. Значит, $g \geq a_i f^i$ и $g(y) = a_i f^i(y)$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$, причем $1 \geq a_i > 0$. $\square$

Предложение 25. *Для любых подалгебр* $[f]$ *и* $[g] \subseteq [f]$, *где* $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 3$, *равносильны следующие условия*:

1) $[g] = [f^p]$ *для некоторого простого числа* p;
2) *не существует подалгебры* $[h]$ *такой, что* $[g] \subset [h] \subset [f]$.

Доказательство. Поскольку $[g] \subseteq [f]$ и $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 3$, без ограничения общности, будем считать, что $1 = f(x) > f(y) > f(z)$ и $1 = g(x) > g(y) > g(z)$.

Пусть $[g] = [f^p]$, где p— простое число. Тогда $g = f^p$ по предложению 11. Допустим, $[g] \subset [h] \subset [f]$ для некоторой подалгебры $[h]$. Тогда $h(x) > h(y) > h(z)$ в силу утверждения 1) предложения 10, так как $f(x) > f(y) > f(z)$ и $g(x) > g(y) > g(z)$. Не умаляя общности, будем считать, что $h(x) = 1$. В силу предложения 24 найдутся числа $i, j \in \mathbb{N}$ и a_i, b_j, $1 \geq a_i, b_j > 0$, такие, что

$$h \geq a_i f^i, \quad h(y) = a_i f^i(y), \quad g \geq b_j h^j, \quad g(y) = b_j h^j(y). \tag{26}$$

Поэтому $f^p(y) = b_j\big(a_i f^i(y)\big)^j$ и $f^p(z) \geq b_j\big(a_i f^i(z)\big)^j$, так как $g = f^p$. Отсюда

$$\left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^p \leq \left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{ij}, \quad f^{p-ij}(y) = b_j a_i^j.$$

Следовательно, $p \leq ij$ и $p - ij \geq 0$, так как $f(y)/f(z) > 1 > f(y) > 0$ и $1 \geq a_i, b_j > 0$. Значит, $p = ij$ и $b_j a_i^j = 1$. Отсюда $i = 1, j = p$ или $i = p, j = 1$ в силу простоты p, и $a_i = b_j = 1$.

Допустим, $i = 1$ и $j = p$. Из $a_i = b_j = 1$, $g = f^p$ и (26) получаем, что $h \geq f$ и $f^p \geq h^p$, т. е. $h = f$; противоречие с $[h] \subset [f]$.

Допустим, $i = p$ и $j = 1$. Из $a_i = b_j = 1$, $g = f^p$ и (26) получаем, что $h \geq g$ и $g \geq h$, т. е. $g = h$; противоречие с $[g] \subset [h]$. Значит, условие 2) выполняется.

Обратно, пусть условие 2) выполняется, но $[g] \neq [f^p]$ для всех простых p. По предложению 24 существуют числа $i \in \mathbb{N}$ и a_i, $1 \geq a_i > 0$, такие, что $g(y) = a_i f^i(y)$ и $g(z) \geq a_i f^i(z)$.

Случай 1: $a_i = 1$. Тогда $g = g(z) \vee f^i$. Если $g(z) > f^i(z)$, то положим $h = r \vee f^i$, где $g(z) > r > f^i(z)$. Тогда $[g] \subseteq [h] \subseteq [f]$, так как $g = g(z) \vee h \in [h]$ и $h \in [f^i]$. Кроме того, $[g] \neq [h]$ и $[h] \neq [f]$ по предложению 11. Значит, $[g] \subset [h] \subset [f]$; противоречие с условием 2).

Если $g(z) = f^i(z)$, то $g = f^i$. Поскольку $[g] \neq [f]$ и $[g] \neq [f^p]$ для всех простых p, $i = mn$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq m, n < i$. Положим $h = f^m$. Тогда $[g] \subseteq [h] \subseteq [f]$, так как $g = h^n \in [h]$ и $h \in [f]$. Кроме того, $[g] \neq [h]$ и $[h] \neq [f]$ по предложению 11. Значит, $[g] \subset [h] \subset [f]$; противоречие с условием 2).

Случай 2: $a_i < 1$. Поскольку $1 = f(x) > f(y) > f(z)$, найдется $j \in \mathbb{N}$ такое, что $(f^i)^j \leq a_i f^i$ на $\{y, z\}$. Тогда $g = g(z) \vee a_i f^i \vee (f^i)^j$. Положим $h = af^i \vee (f^i)^j$, $1 > a > a_i$. Поскольку $1 = h(x) > h(y) > h(z)$, найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что $h^k \leq a_i h/a$ на $\{y, z\}$. Тогда $g = g(z) \vee a_i h/a \vee h^k$. Поэтому $[g] \subseteq [h] \subseteq [f]$, так как $g \in [h]$ и $h \in [f]$. Кроме того, $[g] \neq [h]$ и $[h] \neq [f]$ по предложению 11. Отсюда $[g] \subset [h] \subset [f]$; противоречие с условием 2). Значит, если условие 2) выполняется, то $[g] = [f^p]$ для некоторого простого p. □

Предложение 26. *Для любой подалгебры* $[f], |\operatorname{Im} f| = 3$, *и любых* $m, n, k \in \mathbb{N}$

$$[f^k] \subseteq [f^m] \vee [f^n] \iff f^k = (f^m)^i (f^n)^j \text{ для некоторых } i, j \in \mathbb{N}_0.$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Установим необходимость.

Пусть $[f^k] \subseteq [f^m] \vee [f^n]$ и, для определенности, $1 = f(x) > f(y) > f(z)$. Тогда функция f^k имеет вид

$$f^k = a_{00} \vee a_{10} f^m \vee a_{01} f^n \vee \ldots \vee a_{uv} (f^m)^u (f^n)^v, \ u, v \in \mathbb{N}_0,$$

причем $a_{00} \vee a_{10} \vee a_{01} \vee \ldots \vee a_{uv} = 1$, так как $f(x) = 1$. Поэтому найдутся числа $i, j \in \mathbb{N}_0$ и a_{ij}, $1 \geq a_{ij} > 0$, такие, что $f^k(y) = a_{ij}(f^m(y))^i (f^n(y))^j$ и $f^k(z) \geq a_{ij}(f^m(z))^i (f^n(z))^j$. Отсюда

$$\left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^k \leq \left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{im+jn}, \quad f^{k-(im+jn)}(y) = a_{ij}.$$

Следовательно, $k \leq im + jn$ и $k - (im + jn) \geq 0$, так как $f(y)/f(z) > 1 > f(y) > 0$ и $1 \geq a_{ij} > 0$. Значит, $k = im + jn$, т. е. $f^k = (f^m)^i (f^n)^j$. □

Предложение 27. *Для любой подалгебры* $[f], |\operatorname{Im} f| = 3$, *и рационального показателя* $r > 0$ *с. р. х. подалгебры* $[f^r]$.

Доказательство. Для $r = 1$ утверждение очевидно. Поэтому далее $r \neq 1$. Для определенности, будем считать, что $1 = f(x) > f(y) > f(z)$.

Случай 1: r — простое число. Согласно предложению 25 с. р. х. множества $M = \{[f^p] \colon p \text{— простое}\}$. Докажем, что для любой подалгебры $[f^p] \in M$ равенство $p = 2$ равносильно условию

$$(27) \qquad [f^m] \subseteq [f^p] \vee [f^n] \text{ или } [f^n] \subseteq [f^p] \vee [f^m] \text{ для любых } [f^m], [f^n] \in M.$$

Пусть $p = 2$. Если $m = 2$ или $n = 2$, то условие (27), очевидно, выполняется. Если m, n — нечетные простые числа и, для определенности, $m \leq n$, то $[f^n] \subseteq [f^2] \vee [f^m]$, так как $f^n = f^m \big(f^2\big)^{(n-m)/2}$.

Обратно, пусть условие (27) выполняется. Тогда из (27) для $m = 2, n = 3$ и предложения 26 находим, что $f^2 = \big(f^p\big)^i \big(f^3\big)^j$ или $f^3 = \big(f^p\big)^i \big(f^2\big)^j$ для некоторых $i, j \in \mathbb{N}_0$. Отсюда $pi + 3j = 2$ или $pi + 2j = 3$, т. е. $i = 1, j = 0, p = 2$ или $i = 1, j = 0, p = 3$ соответственно в силу простоты p.

Допустим, $p = 3$. Тогда из (27) для $m = 5, n = 7$ и предложения 26 получаем, что $f^5 = \big(f^3\big)^i \big(f^7\big)^j$ или $f^7 = \big(f^3\big)^i \big(f^5\big)^j$ для некоторых $i, j \in \mathbb{N}_0$. Отсюда $3i + 7j = 5$ или $3i + 5j = 7$; противоречие. Значит, $p = 2$, т. е. получена р. х. $[f^2]$.

Докажем теперь, что для любых различных подалгебр $[f^m], [f^n] \in M \backslash \{[f^2]\}$

$$(28) \qquad m < n \iff [f^n] \subseteq [f^2] \vee [f^m].$$

Пусть $m < n$. Поскольку $[f^m], [f^n] \in M \backslash \{[f^2]\}$, показатели m, n — нечетные. Отсюда $f^n = f^m \big(f^2\big)^{(n-m)/2}$. Значит, $[f^n] \subseteq [f^2] \vee [f^m]$.

Обратно, пусть $[f^n] \subseteq [f^2] \vee [f^m]$. Тогда $f^n = (f^2)^i (f^m)^j$ для некоторых $i, j \in \mathbb{N}_0$ по предложению 26. Отсюда $n = 2i + mj$, причем $i, j \neq 0$, так как в противном случае n кратно 2 или m, но m, n — различные нечетные простые числа в силу $[f^m] \neq [f^n]$ и $[f^m], [f^n] \in M \backslash \{[f^2]\}$. Значит, $m < n$.

Завершим доказательство предложения 27 для простого r, решеточно упорядочив при помощи (28) подалгебры $[f^p] \in M \backslash \{[f^2]\}$ по возрастанию p.

Случай 2: $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Пусть $r = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$, где $p_1, \ldots, p_n$ — простые числа, $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательно применим предложение 27 к подалгебрам $[f]$, $[f^{p_1}], \ldots, [f^{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}}]$ для $r = p_1$, $r = p_2, \ldots,$ $r = p_n$ соответственно. В конце получим искомую подалгебру $[f^n] = [f^{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}]$.

Случай 3: $r = m/n$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Применим предложение 27 к подалгебре $[f]$ для $r = m$ и получим подалгебру $[f^m]$. Затем применим предложение 27 для $r = n$ и рассмотрим подалгебру $[g], g(x) = 1$, такую, что $[g^n] = [f^m]$, или, что по предложению 11 равносильно, подалгебру $[g] = \left[f^{m/n}\right]$. □

Предложение 28. *Для любой подалгебры* $[f]$, $|\operatorname{Im} f| = 3$, *с. р. х. подалгебр* $[r \vee f]$, $\operatorname{mid} f > r \geq \min f$.

Доказательство. Положим $M = \{[g] \colon [g] \subseteq [f], |\operatorname{Im} g| = 3\}$ и, для определенности, $1 = f(x) > f(y) > f(z)$ и $1 = g(x) > g(y) > g(z)$ для всех $[g] \in M$. Докажем, что для любой подалгебры $[g] \in M$ равносильны следующие условия:

1) $[g] = [r \vee f]$ для некоторого r, $f(y) > r \geq f(z)$;

2) $[g^m] \nsubseteq [f^n]$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ (см. предложение 27).

Пусть условие 1) выполняется. Тогда $g = r \vee f$ по предложению 11. Поэтому если $[g^m] \subseteq [f^n]$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$, то $(r \vee f)^m(y) \leq f^n(y)$ по предложению 24. Значит, $m \geq n$, так как $(r \vee f)(y) = f(y) < 1$.

Обратно, пусть условие 2) выполняется. Из $[g] \subseteq [f]$ и предложения 24 находим, что $g \geq a_i f^i$ и $g(y) = a_i f^i(y)$ для некоторых $i \in \mathbb{N}$ и a_i, $1 \geq a_i > 0$.

Допустим, $i \geq 2$. Поскольку $1 = f(x) > f(y) > f(z)$, найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что $(f^i)^k \leq a_i f^i$ на $\{y, z\}$. Тогда $[g] \subseteq [f^i]$, так как $g = g(z) \vee a_i f^i \vee (f^i)^k \in [f^i]$; противоречие с условием 2). Значит, $i = 1$.

Допустим, $a_1 < 1$. Тогда $a_1 = f^l(y)$ для некоторого $l > 0$. Выберем $m, n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $1 < n/m < 1 + l$, и положим $a = (a_1 f(y))^m / f^n(y)$. Тогда $a < 1$, так как $a = f^{m(l+1)-n}(y)$, $1 > f(y)$ и $m(l+1) - n > 0$. Кроме того,

$$g^m(z) \geq (a_1 f(z))^m \geq \frac{(a_1 f(y))^m}{f^n(y)} \cdot f^n(z) = a f^n(z),$$

так как $g \geq a_1 f$, $m < n$ и $1 > f(z)/f(y)$. Следовательно, $[g^m] \subseteq [f^n]$, так как $g^m = g^m(z) \vee a f^n \vee (f^n)^k \in [f^n]$, где $k \in \mathbb{N}$ такое, что $(f^n)^k \leq a f^n$ на $\{y, z\}$; противоречие с условием 2). Значит, $a_1 = 1$, т.е. $g = g(z) \vee f$, причем $f(y) > g(z) \geq f(z)$, так как $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 3$. □

Предложение 29. *Для любой подалгебры* $[f]$ *и* r_1, r_2, $\operatorname{mid} f > r_1, r_2 \geq \min f$,

$$r_1 > r_2 \Longleftrightarrow [r_1 \vee f] \subset [r_2 \vee f]. \tag{29}$$

Доказательство. Достаточно установить необходимость.

Пусть $\operatorname{mid} f > r_1 > r_2 \geq \min f$. Тогда $r_1 \vee f = r_1 \vee (r_2 \vee f) \in [r_2 \vee f]$. Кроме того, $[r_1 \vee f] \neq [r_2 \vee f]$ по предложению 11. Значит, $[r_1 \vee f] \subset [r_2 \vee f]$. □

Предложение 30. *Для любых подалгебр* $[f]$ *и* $[g]$, *где* $1 = f(x) > f(y) > f(z)$ *и* $1 = g(x) > g(y) > g(z)$, *с. р. х. неравенства* $f(y) \leq g(y)$.

Доказательство. В силу предложения 28 достаточно показать, что неравенство $f(y) \le g(y)$ равносильно условию

$$[r \vee f] \subseteq [g] \text{ для некоторой подалгебры } [r \vee f], f(y) > r \ge f(z). \tag{30}$$

Пусть $f(y) \le g(y)$. Выберем r и $k \in \mathbb{N}$ такие, что

$$f(y) > r \ge f(z) \vee \frac{f(y)}{g(y)} \cdot g(z), \quad g^k \le \frac{f(y)}{g(y)} \cdot g \text{ на } \{y, z\}.$$

Тогда $[r \vee f] \subseteq [g]$, так как $r \vee f = r \vee (f(y)/g(y))g \vee g^k \in [g]$.

Обратно, пусть условие (30) выполняется. Тогда $(r \vee f)(y) \le g(y)$ по предложению 24. Значит, $f(y) \le g(y)$, так как $f(y) = (r \vee f)(y)$. $\square$

Для подалгебры $[f]$, где $|\operatorname{Im} f| = 3$ и $\max f = 1$, и показателя $r \in \mathbb{P}$ обозначим через Mid_f^r множество подалгебр, заданное равенством

$$\operatorname{Mid}_f^r = \bigl\{[g]\colon \operatorname{Max} f = \operatorname{Max} g,\ \operatorname{Min} f = \operatorname{Min} g,\ \max g = 1,\ \operatorname{mid} g = \operatorname{mid} f^r\bigr\}.$$

Предложение 31. *Для любой подалгебры* $[f]$, *где* $|\operatorname{Im} f| = 3$ *и* $\max f = 1$, *и показателя* $r \in \mathbb{P}$ *с. р. х. множества* Mid_f^r.

Доказательство. Пусть, для определенности, $1 = f(x) > f(y) > f(z)$. Рассмотрим (см. предложение 27) множество $M = \{[f^s]\colon s \in \mathbb{Q}, s > 0\}$ произвольную подалгебру $[g]$, $1 = g(x) > g(y) > g(z)$. По предложению 30 для любых подалгебр $[f^s] \in M$ и с. р. х. неравенства $f^s(y) \le g(y)$, т. е. неравенства $s \ge l$, где $g(y) = f^l(y)$. Поэтому с. р. х. последовательности $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$, где $s_i \in \mathbb{Q}$, $s_i > 0$ и $s_i \to l$ при $i \to +\infty$, а значит, и условия $l = r$, равносильного $[g] \in \operatorname{Mid}_f^r$. $\square$

Предложение 32. *Для любой подалгебры* $[f]$, $|\operatorname{Im} f| = 3$, *и показателя* $r \in \mathbb{P}$ *с. р. х. подалгебры* $[f^r]$.

Доказательство. Пусть, для определенности, $1 = f(x) > f(y) > f(z)$. Рассмотрим (см. предложение 31) множество Mid_f^r. Выберем возрастающую последовательность $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$, где $r_i \in \mathbb{Q}$, $0 < r_i < r < 2r_i$ и $r_i \to r$ при $i \to +\infty$. Рассмотрим (см. предложение 27) множество M подалгебр $[h] \in \operatorname{Mid}_f^r$ таких, что $[h] \subseteq [f^{r_i}]$ для всех $i \ge i_0$ и некоторого $i_0 \in \mathbb{N}$. Докажем, что для любой подалгебры $[h] \in \operatorname{Mid}_f^r$

$$h(z) > f^r(z) \Longleftrightarrow [h] \in M. \tag{31}$$

Пусть $h(z) > f^r(z)$. Поскольку $r_i < r$ и $r_i \to r$ при $i \to +\infty$, найдется $i_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{r-r_i}(y) f^{r_i}(z) \le h(z)$ для всех $i \ge i_0$. Поскольку $[h] \in \operatorname{Mid}_f^r$, будем считать, что $h = (1, f^r(y), h(z))$, $f^r(y) > h(z)$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $(f^{r_i})^k \le h$. Тогда $h = h(z) \vee f^{r-r_i}(y) f^{r_i} \vee (f^{r_i})^k$. Значит, $[h] \subseteq [f^{r_i}]$.

Обратно, пусть $[h] \in M$. Поскольку $f(x) = h(x) = 1$ и $[h] \subseteq [f^{r_i}]$ для всех $i \ge i_0$ и некоторого $i_0 \in \mathbb{N}$, в силу предложения 24 для каждого $i \ge i_0$ найдутся $j \in \mathbb{N}$ и a, $1 \ge a > 0$, такие, что $h \ge a(f^{r_i})^j$ и $h(y) = a(f^{r_i}(y))^j$. Отсюда $a = f^{r - j r_i}(y)$ и $j = 1$, так как $h(y) = f^r(y)$, $1 > f(y)$, $1 \ge a > 0$ и $r < 2r_i$. Значит, $h(z) > f^r(z)$, так как

$$\frac{h(z)}{f^r(z)} \ge \frac{a f^{r_i}(z)}{f^r(z)} = \frac{f^{r-r_i}(y) f^{r_i}(z)}{f^r(z)} = \left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{r-r_i} > 1.$$

Докажем, что для произвольной подалгебры $[w] \in \mathrm{Mid}_f^r$, $w(x) = 1$, равенство $[w] = [f^r]$ равносильно условию (см. предложение 28)

$$[w] \notin M, \quad [a \vee w] \in M \text{ для всех } a,\ w(y) > a > w(z). \tag{32}$$

Пусть $[w] = [f^r]$. Тогда $w = f^r$ по предложению 11. Поскольку $[w] \in \mathrm{Mid}_f^r$ и $w(z) = f^r(z)$, в силу (31) $[w] \notin M$ и $[a \vee w] \in M$ для всех $a, w(y) > a > w(z)$.

Обратно, пусть условие (32) выполняется. Тогда $w(z) \le f^r(z)$ в силу (31). Если $w(z) < f^r(z)$, то $(a \vee w)(z) < f^r(z)$ для любого a, $f^r(z) > a > w(z)$, т.е. $[a \vee w] \notin M$ в силу (31); противоречие с условием (32). Поэтому $w(z) = f^r(z)$. Кроме того, $w = f^r$ на $\{x, y\}$ в силу $[w] \in \mathrm{Mid}_f^r$. Значит, $[w] = [f^r]$. □

Предложение 33. *Для любой подалгебры* $[f]$, *где* $f = (1, a, a^s)$ *и* $s > 1 > a$, *и любых показателей* $r, p \in \mathbb{P}$ *с. р. х. подалгебры* $[g]$, $g = \big(1, a^r, (a^r)^{1+p(s-1)}\big)$.

Доказательство. Заметим, что $\big(1, a^r, (a^r)^{1+p(s-1)}\big) = \big(1, a, a^{1+p(s-1)}\big)^r$. Поэтому в силу предложения 32 достаточно рассмотреть случай $r = 1$.

Случай 1: $p = m/n$, где $1 > m/n > 1/2$, $m, n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим (см. предложения 31 и 32) множество Mid_f^n и подалгебру $[f^m]$. Докажем, что для любой подалгебры $[g] \in \mathrm{Mid}_f^n$, $g(x) = 1$, равносильны следующие условия:

1) $g = \big(1, a^n, a^{n+m(s-1)}\big)$;

2) $[g] \subseteq [f^m]$ и $[h] \subseteq [g]$ для любой подалгебры $[h] \in \mathrm{Mid}_f^n$, $[h] \subseteq [f^m]$.

Пусть $g = \big(1, a^n, a^{n+m(s-1)}\big)$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $(f^m)^k \le g$. Тогда $[g] \subseteq [f^m]$, так как $g = a^{n-m} f^m \vee (f^m)^k \in [f^m]$.

Далее, пусть $[h] \in \mathrm{Mid}_f^n$, $h(x) = 1$ и $[h] \subseteq [f^m]$. Тогда $h = (1, a^n, h(z))$ и согласно предложению 24 найдутся b, $1 \ge b > 0$, и $j \in \mathbb{N}$ такие, что $h \ge b(f^m)^j$ и $h(y) = b(f^m(y))^j$. Отсюда $b = a^{n-jm}$, так как $h(y) = a^n$ и $f(y) = a$. При этом $j = 1$: если $j \ge 2$, то $n - jm < 0$ в силу $m/n > 1/2$, а значит, $b > 1$, так как $1 > a$; противоречие с $1 \ge b$. Отсюда $h(z) \ge g(z)$, так как

$$\frac{h(z)}{g(z)} \ge \frac{bf^m(z)}{g(z)} = \frac{a^{n-m}a^{ms}}{a^{n+m(s-1)}} = 1.$$

Значит, $[h] \subseteq [g]$, так как $h = h(z) \vee g \in [g]$.

Обратно, пусть условие 2) выполняется. Из $[g] \subseteq [f^m]$ и предложения 24 получаем, что $g \ge b(f^m)^j$ и $g(y) = b(f^m(y))^j$ для некоторых b, $1 \ge b > 0$, и $j \in \mathbb{N}$. Отсюда $b = a^{n-jm}$, так как $g(y) = a^n$ и $f(y) = a$. При этом $j = 1$: если $j \ge 2$, то $n - jm < 0$ в силу $m/n > 1/2$, а значит, $b > 1$, так как $1 > a$; противоречие с $1 \ge b$. Значит, $g(z) \ge bf^m(z) = a^{n-m}a^{sm} = a^{n+m(s-1)}$.

Докажем, что $g(z) \le a^{n+m(s-1)}$. Положим $h = \big(1, a^n, a^{n+m(s-1)}\big)$. Тогда $[h] \in \mathrm{Mid}_f^n$ и $[h] \subseteq [f^m]$, так как $h = a^{n-m} f^m \vee (f^m)^k \in [f^m]$, где $k \in \mathbb{N}$ такое, что $(f^m)^k \le h$. Отсюда $[h] \subseteq [g]$ по условию 2). Значит, $g(z) \le h(z) = a^{n+m(s-1)}$ в силу предложения 29, так как $g = h$ на $\{x, y\}$. Отсюда и из $g(z) \ge a^{n+m(s-1)}$ находим, что $g(z) = a^{n+m(s-1)}$.

Итак, с. р. х. подалгебры $[g]$, $g = \big(1, a^n, a^{n+m(s-1)}\big)$. Для $[g]$ и $r = 1/n$ по предложению 32 с. р. х. искомой подалгебры $\big[\big(1, a, a^{1+p(s-1)}\big)\big]$, где $p = m/n$.

Случай 2: $p = m/n$, где $1/2 \ge m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Положим $p_1 = (3/2)^k (m/n)$, где $k \in \mathbb{N}$ такое, что $1 > p_1 > 1/2$. Тогда (см. случай 1) с. р. х. подалгебры $[g_1]$, где $g_1 = \big(1, a, a^{s_1}\big)$ и $s_1 = 1 + p_1(s-1)$. Положим $p_2 = 2/3$ и для подалгебры $[g_1]$ рассмотрим подалгебру $[g_2]$, где $g_2 = \big(1, a, a^{1+p_2(s_1-1)}\big)$, которая имеет р. х.

(см. случай 1). Легко видеть, что $g_2 = \bigl(1, a, a^{1+p_2p_1(s-1)}\bigr)$. Рассуждая аналогично для подалгебр $[g_2], \dots, [g_k]$ и показателей $p_3 = \ldots = p_{k+1} = 2/3$, получим подалгебру $[g_{k+1}]$, $g_{k+1} = \bigl(1, a, a^{p_{k+1}\cdot\ldots\cdot p_2p_1(s-1)}\bigr)$, которая является искомой, так как $p_{k+1}\cdot\ldots\cdot p_2p_1 = m/n$.

Случай 3: $p = m/n$, где $m/n \geq 1$, $m, n \in \mathbb{N}$. Для $m/n = 1$ подалгебра $[f]$ — искомая. Пусть $m/n > 1$. Рассмотрим (см. предложение 31) подалгебру $[g] \in \mathrm{Min}^1_f$, где $g = (1, a, a^l)$ и $l > 1 > a$, такую, что $\bigl[\bigl(1, a, a^{1+n/m\cdot(l-1)}\bigr)\bigr] = [f]$. Подалгебра $\bigl[\bigl(1, a, a^{1+n/m\cdot(l-1)}\bigr)\bigr]$ имеет р. х. для подалгебры $[g]$ (см. случаи 1 и 2 для $p = n/m < 1$). По предложению 11 равенства $\bigl[\bigl(1, a, a^{1+n/m\cdot(l-1)}\bigr)\bigr] = [f]$ и $1+n(l-1)/m = s$ равносильны. В свою очередь, $1+n(l-1)/m = s$ эквивалентно $1+m(s-1)/n = l$. Значит, подалгебра $[g]$ — искомая, т. е. $[g] = \bigl[\bigl(1, a, a^{1+p(s-1)}\bigr)\bigr]$.

Случай 4: $p \in \mathbb{P}$. Выберем последовательности $(p_i^+)_{i\in\mathbb{N}}$ и $(p_i^-)_{i\in\mathbb{N}}$ рациональных чисел такие, что

$$\lim_{i\to+\infty} p_i^+ = \lim_{i\to+\infty} p_i^- = p, \quad p_i^+ > p > p_i^- > 0. \tag{33}$$

Тогда (см. случаи 1–3) с. р. х. подалгебр

$$\bigl[g_i^+\bigr],\ g_i^+ = \bigl(1, a, a^{1+p_i^+(s-1)}\bigr), \quad \bigl[g_i^-\bigr],\ g_i^- = \bigl(1, a, a^{1+p_i^-(s-1)}\bigr).$$

Рассмотрим (см. предложение 31) множество Min^1_f. Для подалгебры $[g] \in \mathrm{Min}^1_f$, где $g = \bigl(1, a, a^{1+q(s-1)}\bigr)$ и $q \in \mathbb{P}$, равенство $q = p$ равносильно условию

$$\bigl[g_i^-\bigr] \subset [g] \subset \bigl[g_i^+\bigr] \text{ для всех } i \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

Действительно, поскольку $[g], [g_i^+], [g_i^-] \in \mathrm{Min}^1_f$, в силу предложения 29 условие (34) равносильно неравенствам $g_i^-(z) > g(z) > g_i^+(z)$, или, что то же самое, $p_i^+ > q > p_i^-$. Отсюда и из (33) получаем $p = q$. □

5.3. **Подалгебра** $[1/f]$**.** Докажем, что для любой подалгебры $[f], |\operatorname{Im} f| = 3$, с. р. х. подалгебры $[1/f]$.

Предложение 34. *Для любых подалгебр* $[f]$ *и* $[g]$, *где* $1 = f(x) > f(y) > f(z)$ *и* $1 = g(z) > g(y) > g(x)$, *равносильны следующие условия*:

1) $[f] \vee [g] = U^\vee(X)$;

2) $\mathrm{Max}\, h = \{y\}$ *для некоторой* $h \in [f] \vee [g]$;

3) $\mathrm{Max}\, f^ig^j = \{y\}$ *для некоторых* $i, j \in \mathbb{N}$;

4) $[e_x] \subseteq [f] \vee [g]$ *или* $[e_z] \subseteq [f] \vee [g]$.

Доказательство. Импликации 1) ⇒ 2), 1) ⇒ 4) и 3) ⇒ 2) очевидны.

2) ⇒ 1). Пусть $\mathrm{Max}\, h = \{y\}$ для некоторой $h \in [f] \vee [g]$. Докажем, что $[f] \vee [g] = U^\vee(X)$ или, что равносильно, $w \in [f] \vee [g]$ для любой $w \in U^\vee(X)$. Не умаляя общности, будем считать, что $h(y) = 1$ и $w \leq 1$. Выберем $k, m, n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $w(x)f^k \leq w$ на $\{y, z\}$, $w(y)g^m \leq w$ на $\{x, y\}$ и $w(z)h^k \leq w$ на $\{x, z\}$. Тогда $w = w(x)f^k \vee w(y)g^m \vee w(z)h^n \in [f] \vee [g]$.

2) ⇒ 3). Пусть $\mathrm{Max}\, h = \{y\}$ для некоторой $h \in [f] \vee [g]$. Поскольку $h \in [f] \vee [g]$, функция h имеет вид $h = a_{00} \vee a_{10}f \vee a_{01}g \vee \ldots \vee a_{mn}f^mg^n$. Поэтому $h \geq a_{ij}f^ig^j$ и $h(y) = a_{ij}f^i(y)g^j(y)$ для некоторых $i, j \in \mathbb{N}_0$, причем $i, j \neq 0$, так как $\mathrm{Max}\, h = \{y\}$. Отсюда и из $\mathrm{Max}\, h = \{y\}$ находим, что $\mathrm{Max}\, f^ig^j = \{y\}$.

4) ⇒ 2). Пусть $[e_x] \subseteq [f] \vee [g]$ (случай $[e_z] \subseteq [f] \vee [g]$ аналогичен). Не умаляя общности, будем считать, что $e_x(x) = f(z)$ и $e_x(y) = e_x(z) = 1$. Положим $h = e_xf$. Тогда $h \in [f] \vee [g]$ и $\mathrm{Max}\, h = \{y\}$, так как $h = (f(z), f(y), f(z))$. □

Предложение 35. *Для любых подалгебр* $[f]$ *и* $[g]$, *где*

$$f = (1, a, a^t),\ t > 1 > a, \quad g = (b^l, b, 1),\ l > 1 > b,$$

условия $(t-1)(l-1) > 1$ *и* $(t-1)(l-1) = 1$ *имеют р. х.*:

1) $(t-1)(l-1) > 1$ *тогда и только тогда, когда* $[f] \vee [g] = U^{\vee}(X)$;

2) $(t-1)(l-1) = 1$ *тогда и только тогда, когда* (*см. предложения* 29, 31)

$$[f] \vee [g] \subset U^{\vee}(X), \quad [f] \vee [h] = U^{\vee}(X) \text{ для всех } [h] \in \mathrm{Mid}_g^1, g(x) > h(x). \tag{35}$$

Доказательство. 1) В силу предложения 34 достаточно показать, что

$$(t-1)(l-1) > 1 \Longleftrightarrow \operatorname{Max} f^i g^j = \{y\} \text{ для некоторых } i, j \in \mathbb{N}.$$

Пусть $b = a^s, s > 0$. Тогда для любых $i, j \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{Max} f^i g^j = \{y\} \Longleftrightarrow \begin{cases} f^i(y)g^j(y) > f^i(x)g^j(x), \\ f^i(y)g^j(y) > f^i(z)g^j(z) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^{i+js} > a^{jls}, \\ a^{i+js} > a^{it} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} i + js < jls, \\ i + js < it \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} i < js(l-1), \\ js < i(t-1) \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{s}{t-1} < \frac{i}{j} < s(l-1).$$

Остается заметить, что $s/(t-1) < i/j < s(l-1)$ для некоторых $i, j \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $s/(t-1) < s(l-1)$, т. е. $(t-1)(l-1) > 1$.

2) Пусть $(t-1)(l-1) = 1$. Тогда $[f] \vee [g] \subset U^{\vee}(X)$ в силу утверждения 1).

Далее, если $[h] \in \mathrm{Mid}_g^1$, $g(x) > h(x)$, то $h = (b^s, b, 1)$ для некоторого $s > l$. Отсюда $(t-1)(s-1) > 1$. Значит, $[f] \vee [h] = U^{\vee}(X)$ в силу утверждения 1).

Обратно, пусть условие (35) выполняется. Тогда $(t-1)(l-1) \le 1$ по утверждению 1). Допустим, $(t-1)(l-1) < 1$. Тогда $(t-1)(s-1) = 1$ для некоторого $s > l$. Положим $h = (b^s, b, 1)$. Тогда $[h] \in \mathrm{Mid}_g^1$, $g(x) > h(x)$ и $[f] \vee [h] \subset U^{\vee}(X)$ по утверждению 1); противоречие с (35). Значит, $(t-1)(l-1) = 1$. □

Предложение 36. *Для произвольной подалгебры* $[f]$, $|\operatorname{Im} f| = 3$, *с. р. х. подалгебры* $[1/f]$.

Доказательство. Пусть, для определенности, $f = (1, a, a^t), t > 1 > a$. Рассмотрим (см. замечание 4 и предложение 35) множество M подалгебр $[g]$ таких, что $g = (b^l, b, 1)$, $l > 1 > b$ и $(t-1)(l-1) = 1$. Докажем, что для любой подалгебры $[g] \in M$, где $g = (b^l, b, 1)$ и $b = a^s$, $s > 0$, равносильны следующие условия:

1) $s/(t-1) \in \mathbb{N}$;

2) если $[h] \subseteq [f] \vee [g]$ и $[h] \in \mathrm{Mid}_f^u$ для некоторого u, то $u \ge 1$.

Пусть $s = (t-1)k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и $[h] \subseteq [f] \vee [g]$, где $h = (1, a^u, a^v)$ и $v > u > 0$. Поскольку $[h] \subseteq [f] \vee [g]$, функция h имеет вид

$$h = a_{00} \vee a_{10} f \vee a_{01} g \vee \ldots \vee a_{mn} f^m g^n.$$

Поэтому найдутся $i, j \in \mathbb{N}_0$ такие, что $h \ge a_{ij} f^i g^j$ и $h(y) = a_{ij} f^i(y) g^j(y)$. Тогда

$$a_{ij} f^i(y) g^j(y) = h(y) > h(z) \ge a_{ij} f^i(z) g^j(z).$$

Допустим, $a_{ij} f^i(y) g^j(y) \ge a_{ij} f^i(x) g^j(x)$. Тогда $\operatorname{Max} f^i g^j = \{y\}$ или $\left[f^i g^j\right] = [e_z]$. Следовательно, $[f] \vee [g] = U^{\vee}(X)$ в силу предложения 34. С другой стороны, $[f] \vee [g] \subset U^{\vee}(X)$ в силу предложения 35, так как $(t-1)(l-1) = 1$; противоречие. Значит, $a_{ij} f^i(y) g^j(y) < a_{ij} f^i(x) g^j(x)$.

Итак, если $a_{ij} = a^r$, $r \in \mathbb{R}$, то

$$1 = h(x) \ge a^r f^i(x) g^j(x) > a^r f^i(y) g^j(y) > a^r f^i(z) g^j(z)$$

или, что равносильно, $1 \geq a^{r+jsl} > a^{r+i+js} > a^{r+it}$, т. е.

$$r + jsl \geq 0, \quad i > js(l-1), \quad i(t-1) > js. \tag{36}$$

Поскольку $(t-1)(l-1) = 1$, неравенства $i > js(l-1)$ и $i(t-1) > js$ равносильны. Кроме того, $s = (t-1)k$ и $(t-1)l = t$. Значит, неравенства (36) равносильны неравенствам $r+jkt \geq 0$ и $i > jk$, причем $i-jk \geq 1$, так как $i, j, k \in \mathbb{N}_0$. Отсюда

$$u = r + i + js = r + i + j(t-1)k = (r + jkt) + (i - jk) \geq 1.$$

Обратно, пусть условие 2) выполняется, но $s/(t-1) \notin \mathbb{N}$. Тогда

$$i - 1 < \frac{s}{t-1} < i \text{ для некоторого } i \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

Положим $h = a^{-ls} f^i g$. Тогда $h \in [f] \vee [g]$ и $h = \big(1, a^{i-s(l-1)}, a^{it-ls}\big)$. Поскольку $(t-1)(l-1) = 1$, имеем

$$l = \frac{t}{t-1}, \quad h = \Big(1, a^{i-\frac{s}{t-1}}, a^{t\left(i-\frac{s}{t-1}\right)}\Big).$$

Положим $u = i - s/(t-1)$. Тогда $1 > u > 0$ в силу (37) и $[h] \in \mathrm{Mid}_f^u$; противоречие с условием 2). Значит, $s/(t-1) \in \mathbb{N}$.

Итак, получена р. х. подалгебр $[g] \in M$ таких, что

$$g = (b^l, b, 1), \quad (t-1)(l-1) = 1, \quad l > 1 > b = a^{(t-1)k}, \ k \in \mathbb{N},$$

или, что равносильно, подалгебр $[g]$, $g = \big(a^{tk}, a^{(t-1)k}, 1\big)$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим (см. предложение 30) подалгебру $[g]$, $g = \big(a^t, a^{t-1}, 1\big)$, с наибольшим значением $g(y)$. Данная подалгебра равна подалгебре $[1/f]$, так как $1/f = a^{-t}g$. $\square$

5.4. **Доказательство предложения 8.** Рассмотрим произвольное преобразование ψ_T. Для любых $f \in U^\vee(X)$ и $A \subseteq U^\vee(X)$ образы $\psi_T(f)$ и $\psi_T(A)$, для краткости, будем обозначать через f' и A'.

Поскольку ψ_T — преобразование полуполя $U^\vee(X)$,

$$(A \cap B)' = A \cap B \text{ и } A \subseteq B \Longleftrightarrow A' \subseteq B' \text{ для любых } A, B \subseteq U^\vee(X). \tag{38}$$

Из определения ψ_T получаем, что неравенства $f(x') < f(y')$ и $f'(x') < f'(y')$ равносильны для любых $f \in U^\vee(X)$ и $x', y' \in X$. Отсюда, как легко видеть, следует, что ψ_T — $*$-преобразование и

$$([e_Z])' = [e_Z] \text{ для любого непустого } Z \subset X. \tag{39}$$

Кроме того, из определения преобразования ψ_T получаем

Предложение 37. *Для произвольного преобразования ψ_T, где*

$$T\colon T_x = (a_x, b_x, s_x, t_x),\ T_y = (a_y, b_y, s_y, t_y),\ T_z = (a_z, b_z, s_z, t_z),$$

обратное преобразование ψ_T^{-1} совпадает с преобразованием $\psi_{T'}$, где

$$T'\colon T'_x = (b_x, a_x, t_x, s_x),\ T'_y = (b_y, a_y, t_y, s_y),\ T'_z = (b_z, a_z, t_z, s_z).$$

Из (38) и предложения 37 следует, что если для любой подалгебры A ее образ A' является подалгеброй, то $*$-преобразование ψ_T индуцирует $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Поэтому для завершения доказательства предложения 8 покажем, что для любой подалгебры A ее образ A' будет подалгеброй.

Предложение 38. *Для любых подалгебр* $[f]$ *и* $[g]$

1) *если* $f(x) = f(y) > f(z)$ *и* $g(x) > g(y) \geq g(z)$, *то* $[f] \vee [g] = \mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_z$,
2) *если* $f(x) > f(y) > f(z)$ *и* $g(x) > g(z) \geq g(y)$, *то* $fg, f \vee g \in [f] \cup [g]$,
3) *если* $f(x) > f(y) \geq f(z)$ *и* $g(y) > g(x) \geq g(z)$, *то* $[f] \vee [g] = \mathrm{Min}_z$,
4) *если* $f(x) > f(y) > f(z)$ *и* $g(y) > g(z) > g(x)$, *то*
$$\mathrm{Min}_z \subseteq [f] \vee [g], \quad fg, f \vee g \in [g] \cup \mathrm{Min}_z,$$
5) *если* $f(x) > f(y) > f(z)$ *и* $g(z) > g(y) > g(x)$, *то*
$$\mathrm{Min}_y \subseteq [f] \vee [g], \quad f \vee g \in [f] \cup [g] \cup \mathrm{Min}_y,$$
6) *если* $f(x) > f(y) > f(z)$ *и* $g(z) > g(x) > g(y)$, *то*
$$\mathrm{Min}_y \subseteq [f] \vee [g], \quad fg, f \vee g \in [f] \cup \mathrm{Min}_y,$$
7) *если* $f(x) > f(y) > f(z)$ *и* $g(z) = g(y) > g(x)$, *то*
$$\mathrm{Min}_z, \mathrm{Min}_x \cap \mathrm{Max}_y \subseteq [f] \vee [g],$$
8) *если* $f(x) > f(y) > f(z)$ *и* $g(z) > g(x) = g(y)$, *то* $\mathrm{Min}_y \subseteq [f] \vee [g]$.

Доказательство. 1) Пусть $f(x) = f(y) > f(z)$ и $g(x) > g(y) \geq g(z)$. Тогда $[f] \vee [g] \subseteq \mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_z$, так как $f, g \in \mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_z$, и $\mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_z \subseteq [f] \vee [g]$, так как $[e_z] = [f]$, $[e_{y,z}] = [g \vee g(y)] \subseteq [g]$ и $[e_z] \vee [e_{y,z}] = \mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_z$ в силу (25).

2) Пусть $f(x) > f(y) > f(z)$ и $g(x) > g(z) \geq g(y)$. Если $g(y) = g(z)$, то $fg, f \vee g \in [f]$, так как $[g] = [e_{y,z}] = [f(y) \vee f] \subseteq [f]$.

Пусть $g(z) > g(y)$. Докажем, что $fg \in [f] \cup [g]$. Без ограничения общности, будем считать, что $f(x) = g(x) = 1 > f(y)g(y) \geq f(z)g(z)$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $f^n \leq fg$. Тогда $fg \in [f] \cup [g]$, так как $fg = f(z)g(z) \vee g(y)f \vee f^n \in [f]$.

Докажем, что $f \vee g \in [f] \cup [g]$. Без ограничения общности, будем считать, что $1 = f(x) \geq g(x)$. Если $f(y) \geq g(z)$, то $f \vee g \in [f] \cup [g]$, так как $f \vee g = g(z) \vee f \in [f]$.

Пусть $f(y) < g(z)$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $(g/g(x))^n \leq g$ на $\{y, z\}$. Тогда $f \vee g \in [f] \vee [g]$, так как $f \vee g = f(y) \vee g \vee (g/g(x))^n \in [g]$.

3) Пусть $f(x) > f(y) \geq f(z)$ и $g(y) > g(x) \geq g(z)$. Тогда $[f] \vee [g] \subseteq \mathrm{Min}_z$, так как $f, g \in \mathrm{Min}_z$. Кроме того, $\mathrm{Min}_z \subseteq [f] \vee [g]$, так как $[e_{y,z}] = [f(y) \vee f] \subseteq [f]$, $[e_{x,z}] = [g(x) \vee g] \subseteq [g]$ и $[e_{y,z}] \vee [e_{x,z}] = \mathrm{Min}_z$ в силу (25).

4) Пусть $f(x) > f(y) > f(z)$ и $g(y) > g(z) > g(x)$. Тогда, принимая во внимание (25), имеем $\mathrm{Min}_z = [e_{y,z}] \vee [e_{x,z}] = [f(y) \vee f] \vee [g(z) \vee g] \subseteq [f] \vee [g]$.

Докажем, что $fg \in [g] \vee \mathrm{Min}_z$. Не умаляя общности, будем считать, что $f(x) = g(y) = 1$. Поскольку $f(y) > f(z)$ и $g(y) > g(z)$, $f(y)g(y) > f(z)g(z)$. Если $f(x)g(x) \geq f(z)g(z)$, то $fg \in \mathrm{Min}_z$. Если $f(x)g(x) < f(z)g(z)$, то $fg = f(x)g(x) \vee f(z)g \vee f(y)g^n \in [g]$, где $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f(y)g^n < f(z)g$ на $\{x, z\}$.

Докажем, что $f \vee g \in [g] \cup \mathrm{Min}_z$. Если $f(x) < g(z)$, то $f \vee g = f(x) \vee g \in [g]$.

Если $f(x) \geq g(z)$, то $f \vee g \in \mathrm{Min}_z$.

5) Пусть $f(x) > f(y) > f(z)$ и $g(z) > g(y) > g(x)$. Тогда, принимая во внимание (25), имеем $\mathrm{Min}_y = [e_{y,z}] \vee [e_{x,y}] = [f(y) \vee f] \vee [g(y) \vee g] \subseteq [f] \vee [g]$.

Докажем, что $f \vee g \in [f] \cup [g] \cup \mathrm{Min}_y$. Если $g(z) \leq f(y)$, то $f \vee g = g(z) \vee f \in [f]$. Если $g(z) > f(y)$ и $g(y) \leq f(x)$, то $f \vee g \in \mathrm{Min}_y$. Наконец, если $g(z) > f(y)$ и $g(y) > f(x)$, то $f \vee g = f(x) \vee g \in [g]$.

6) Утверждение 6) получается из утверждения 4) заменой функций f, g и точек x, y, z на функции g, f и точки z, x, y соответственно.

7) Пусть $f(x) > f(y) > f(z)$ и $g(z) = g(y) > g(x)$. Тогда $[e_{y,z}] = [f(y) \vee f] \subseteq [f]$ и $[e_x] = [g]$. Докажем, что $[e_{x,z}] \subseteq [f] \vee [g]$. Без ограничения общности, будем

считать, что $f(x) = g(y) = g(z) = 1$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $g^n(x) < f(y)$. Тогда $\operatorname{Max} fg^n = \{y\}$. Значит, $[e_{x,z}] = [f(x)g^n(x) \vee f(z)g^n(z) \vee fg^n] \subseteq [f] \vee [g]$.

Итак, $[e_{x,z}], [e_{y,z}], [e_x] \subseteq [f] \vee [g]$. Отсюда и из (25) находим, что

$$\mathrm{Min}_z = [e_{x,z}] \vee [e_{y,z}] \subseteq [f] \vee [g], \quad \mathrm{Min}_x \cap \mathrm{Max}_y = [e_{x,z}] \vee [e_x] \subseteq [f] \vee [g].$$

8) Пусть $f(x) > f(y) > f(z)$ и $g(z) > g(x) = g(y)$. Тогда $[e_{y,z}] = [f(y) \vee f] \subseteq [f]$ и $[g] = [e_{x,y}]$. Значит, $\mathrm{Min}_y \subseteq [f] \vee [g]$, так как $\mathrm{Min}_y = [e_{y,z}] \vee [e_{x,y}]$ в силу (25). $\square$

Предложение 39. *Для любой подалгебры A и любых функций $f_1, f_2 \in A$, где $f_1(x) \geq f_1(y) \geq f_1(z)$ и $f_2(x) \geq f_2(y) \geq f_2(z)$, имеем $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in A'$.*

Доказательство. Пусть (см. (6)) $T_y = (a, b, s, t)$.

Случай 1: $|\operatorname{Im} f_1| = 3$. Тогда функция f_1 имеет вид

$$f_1 = a^{k_1}\bigl(1, a^{r_1}, (a^{r_1})^{1+p_1(s-1)}\bigr), \ k_1 \in \mathbb{R}, \ r_1, p_1 \in \mathbb{P},$$

а значит, $f_1' = b^{k_1}\bigl(1, b^{r_1}, (b^{r_1})^{1+p_1(t-1)}\bigr)$.

Случай 1.1: $f_2 \in \mathbb{P}^\vee$. Докажем, что $f_1'f_2' \in A'$. Поскольку $f_2 \in \mathbb{P}^\vee$, $f_2' = b^{k_2}$ для некоторого $k_2 \in \mathbb{R}$. Значит, $f_1'f_2' \in A'$, так как $a^{k_2} f_1 \in A$ и

$$\bigl(a^{k_2} f_1\bigr)' = b^{k_1+k_2}\bigl(1, b^{r_1}, (b^{r_1})^{1+p_1(t-1)}\bigr) = f_1'f_2'.$$

Докажем, что $f_1' \vee f_2' \in A'$. Если $f_1'(z) \geq f_2'$, то $f_1' \vee f_2' = f_1' \in A'$.

Если $f_1'(y) > f_2' > f_1'(z)$, то $f_2' = b^{k_1}\bigl(b^{r_1}\bigr)^{1+p_2(t-1)}$, где $p_1 > p_2 > 0$. Положим $f = a^{k_1}\bigl(a^{r_1}\bigr)^{1+p_2(s-1)} \in \mathbb{P}^\vee$. Тогда $f_1' \vee f_2' \in A'$, так как $f \vee f_1 \in A$ и

$$(f \vee f_1)' = b^{k_1}\bigl(1, b^{r_1}, (b^{r_1})^{1+p_2(t-1)}\bigr) = f_1' \vee f_2'.$$

Если $f_1'(x) > f_2' \geq f_1'(y)$, то $f_1' \vee f_2' \in [e_{y,z}]$, а значит, $f_1' \vee f_2' \in A'$, так как $[e_{y,z}] = [f_1(y) \vee f_1] \subseteq A$ и $([e_{y,z}])' = [e_{y,z}]$ в силу (39).

Наконец, если $f_2' \geq f_1'(x)$, то $f_1' \vee f_2' = f_2' \in A'$.

Случай 1.2: $f_2(x) = f_2(y) > f_2(z)$. Тогда $f_2' = f_2$. В силу (*), (38) и утверждения 1) предложения 38

$$\bigl(\mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_z\bigr)' = \mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_z, \quad [f_1'] \vee [f_2'] = \mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_z = [f_1] \vee [f_2] \subseteq A.$$

Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \vee [f_2'] = \mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_z \subseteq A'$.

Случай 1.3: $f_2(x) > f_2(y) = f_2(z)$. Тогда $f_2' = f_2$ и $f_2 = b^{k_2}\bigl(1, b^{r_2}, b^{r_2}\bigr)$ для некоторых $k_2 \in \mathbb{R}$ и $r_2 \in \mathbb{P}$. Кроме того, $ff_1 \in A$, где

$$f = a^{k_2}\bigl(1, a^{r_2}, a^{r_2}\bigr) \in [e_{y,z}] = [f_1(y) \vee f_1] \subseteq A.$$

Значит, $f_1'f_2' \in A'$, так как

$$(ff_1)' = b^{k_1+k_2}\left(1, b^{r_1+r_2}, \bigl(b^{r_1+r_2}\bigr)^{1+\frac{r_1p_1}{r_1+r_2}\cdot(t-1)}\right) = f_1'f_2'.$$

Докажем, что $f_1' \vee f_2' \in A'$.

Случай 1.3.1: $f_1'(x) \geq f_2'(x)$. Тогда (см. случай 1.1) $f_1' \vee f_2' = f_2'(y) \vee f_1' \in A'$.

Случай 1.3.2: $f_2'(x) > f_1'(x)$ и $f_1'(z) \geq f_2'(y)$. Тогда

$$f_2'(x) = b^{k_1+k}, k < 0, \quad f_1' \vee f_2' = b^{k_1+k}\left(1, b^{r_1-k}, \bigl(b^{r_1-k}\bigr)^{1+\frac{r_1p_1}{r_1-k}\cdot(t-1)}\right).$$

Кроме того, $f = \bigl(a^{k_1+k}, f_1(z), f_1(z)\bigr) \in [e_{y,z}] = [f_2] \subseteq A$, а значит,

$$f \vee f_1 = a^{k_1+k}\left(1, a^{r_1-k}, \bigl(a^{r_1-k}\bigr)^{1+\frac{r_1p_1}{r_1-k}\cdot(s-1)}\right) \in A.$$

Таким образом, $f_1' \vee f_2' = (f \vee f_1)' \in A'$.

Случай 1.3.3: $f_2'(x) > f_1'(x)$ и $f_2'(y) > f_1'(z)$. Тогда $[e_{y,z}] = [f_2] \subseteq A$ и найдется функция $f \in [e_{y,z}]$ такая, что $f(x) = f_2'(x)$ и $f(y) = f(z) = f_1'(z)$. Имеем $f = f' \in A'$ и $f_1' \vee f' \in A'$ (см. случай 1.3.2). Значит, $f_1' \vee f_2' = f_2'(y) \vee (f_1' \vee f') \in A'$ (см. случай 1.1).

Случай 1.4: $|\operatorname{Im} f_2| = 3$. Тогда функция f_2 имеет вид

$$f_2 = a^{k_2}\left(1, a^{r_2}, \left(a^{r_2}\right)^{1+p_2(s-1)}\right),\ k_2 \in \mathbb{R},\ r_2, p_2 \in \mathbb{P}.$$

Заметим, что

$$a^{k_1+k_2}\left(1, a^{r_1+r_2}, \left(a^{r_1+r_2}\right)^{1+\frac{p_1 r_1 + p_2 r_2}{r_1+r_2}\cdot(s-1)}\right) = f_1 f_2 \in A.$$

Поэтому

$$f_1' f_2' = b^{k_1+k_2}\left(1, b^{r_1+r_2}, \left(b^{r_1+r_2}\right)^{1+\frac{p_1 r_1 + p_2 r_2}{r_1+r_2}\cdot(t-1)}\right) = (f_1 f_2)' \in A'.$$

В частности,

$$(f_1')^n \in A' \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

Докажем, что $f_1' \vee f_2' \in A'$. Не умаляя общности, будем считать, что $1 = f_1'(x) \geq f_2'$, так как $\mathbb{P}^\vee \subseteq A'$ и (см. случай 1.1) $r'f' \in A'$ для всех $f' \in A', r' \in \mathbb{P}^\vee$.

Случай 1.4.1: $f_2'(y) \leq f_1'(y)$. Тогда $f_1' \vee f_2' = f_2'(z) \vee f_1' \in A'$ (см. случай 1.1).

Случай 1.4.2: $f_2'(y) > f_1'(y)$ и $f_2'(z) \geq f_1'(z)$. Тогда

$$f_1' \vee f_2' = \left(1, b^{k_2+r_2}, \left(b^{k_2+r_2}\right)^{1+\frac{r_2 p_2}{k_2+r_2}\cdot(t-1)}\right).$$

Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $f_1^n \leq f_2(z)$ на $\{y, z\}$. Тогда

$$\left(1, a^{k_2+r_2}, \left(a^{k_2+r_2}\right)^{1+\frac{r_2 p_2}{k_2+r_2}\cdot(s-1)}\right) = f_1^n \vee f_2 \in A.$$

Значит, $f_1' \vee f_2' = (f_1^n \vee f_2)' \in A'$.

Случай 1.4.3: $f_2'(y) > f_1'(y)$ и $f_2'(z) < f_1'(z)$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $(f_1')^n(z) \leq f_2'(z)$. Тогда (см. случай 1.4.2) $(f_1')^n \vee f_2' \in A'$, так как $(f_1')^n, f_2' \in A'$ в силу (40). Значит (см. случай 1.1), $f_1' \vee f_2' = f_1'(z) \vee ((f_1')^n \vee f_2') \in A'$.

Случай 2: $|\operatorname{Im} f_1| = 2$ и $|\operatorname{Im} f_2| \leq 2$. Тогда $f_1 = f_1'$, $f_2 = f_2'$ и $g = g'$ для любой $g \in [f_1] \cup [f_2]$, так как $|\operatorname{Im} g| \leq 2$. Следовательно, $([f_1])' = [f_1]$ и $([f_2])' = [f_2]$. Значит, $[f_1], [f_2] \subseteq A'$, так как $[f_1], [f_2] \subseteq A$.

Если $f_2 \in \mathbb{P}^\vee$, то $f_1' f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1] \subseteq A'$.

Если $|\operatorname{Im} f_2| = 2$ и $\operatorname{Min} f_1 = \operatorname{Min} f_2$, то $[f_1] = [f_2]$ и $f_1' f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1] \subseteq A'$.

Пусть $|\operatorname{Im} f_2| = 2$ и $\operatorname{Min} f_1 \neq \operatorname{Min} f_2$. Не умаляя общности, будем считать, что $[f_1] = [e_z]$, $[f_2] = [e_{y,z}]$. Тогда $\operatorname{Max}_x \cap \operatorname{Min}_z = [f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ в силу (25). Кроме того, $(\operatorname{Max}_x \cap \operatorname{Min}_z)' = \operatorname{Max}_x \cap \operatorname{Min}_z$ в силу (*) и (38). Отсюда и из $f_1 = f_1', f_2 = f_2'$ находим, что $f_1' f_2', f_1' \vee f_2' \in \operatorname{Max}_x \cap \operatorname{Min}_z \subseteq A'$. □

Опираясь на предложения 37 и 39, докажем

Предложение 40. $([f])' = [f']$ *для любой подалгебры* $[f]$.

Доказательство. $([f])'$ — подалгебра, так как $\mathbb{P}^\vee \subseteq ([f])'$ и $f_1' f_2', f_1' \vee f_2' \in ([f])'$ для любых $f_1', f_2' \in ([f])'$ в силу (*) и предложения 39. Отсюда $[f'] \subseteq ([f])'$, так как $f' \in ([f])'$. Аналогично (см. предложение 37) $[f] \subseteq \psi_T^{-1}([f'])$. Поэтому $([f])' \subseteq [f']$. Значит, $([f])' = [f']$. □

Наконец, докажем

Предложение 41. *Если A — подалгебра, то A' — подалгебра.*

Доказательство. Заметим, что $\mathbb{P}^{\vee} \subseteq A'$ в силу (*), так как $\mathbb{P}^{\vee} \subseteq A$. Поэтому достаточно показать, что $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in A'$ для любых функций $f_1', f_2' \in A'$. Отметим, что $[f_1], [f_2] \subseteq A$, так как $f_1, f_2 \in A$ и A — подалгебра. Следовательно, $[f_1'], [f_2'] \subseteq A'$ по предложению 40. В частности, $[f_1'] \vee [f_2'] \subseteq A'$.

Не умаляя общности, будем считать, что $f_1'(x) \geq f_1'(y) \geq f_1'(z)$.

Если $f_2'(x) \geq f_2'(y) \geq f_2'(z)$, то $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in A'$ по предложению 39.

Допустим, $f_2'(x) < f_2'(y)$ или $f_2'(y) < f_2'(z)$.

Случай 1: $f_1'(x) > f_1'(y) > f_1'(z)$. Тогда $f_1(x) > f_1(y) > f_1(z)$.

Случай 1.1: $f_2'(x) > f_2'(z) > f_2'(y)$. Тогда $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \cup [f_2']$ по утверждению 2) предложения 38. Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in A'$, так как $[f_1'] \cup [f_2'] \subseteq A'$.

Случай 1.2: $f_2'(y) > f_2'(x) > f_2'(z)$. Тогда $[f_1] \vee [f_2] = [f_1'] \vee [f_2'] = \mathrm{Min}_z$ по утверждению 3) предложения 38. Отсюда $\mathrm{Min}_z \subseteq A'$, так как $[f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ и $(\mathrm{Min}_z)' = \mathrm{Min}_z$ в силу (*). Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \vee [f_2'] = \mathrm{Min}_z \subseteq A'$.

Случай 1.3: $f_2'(y) > f_2'(z) > f_2'(x)$. Тогда $f_2(y) > f_2(z) > f_2(x)$. Поэтому $\mathrm{Min}_z \subseteq [f_1] \vee [f_2]$ и $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_2'] \cup \mathrm{Min}_z$ по утверждению 4) предложения 38. Отсюда $\mathrm{Min}_z \subseteq A'$, так как $[f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ и $(\mathrm{Min}_z)' = \mathrm{Min}_z$ в силу (*). Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in A'$, так как $[f_2'], \mathrm{Min}_z \subseteq A'$.

Случай 1.4: $f_2'(z) > f_2'(x) > f_2'(y)$. Тогда $f_2(z) > f_2(x) > f_2(y)$. Поэтому $\mathrm{Min}_y \subseteq [f_1] \vee [f_2]$ и $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \cup \mathrm{Min}_y$ по утверждению 6) предложения 38. Отсюда $\mathrm{Min}_y \subseteq A'$, так как $[f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ и $(\mathrm{Min}_y)' = \mathrm{Min}_y$ в силу (*). Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in A'$, так как $[f_1'], \mathrm{Min}_y \subseteq A'$.

Случай 1.5: $f_2'(z) > f_2'(y) > f_2'(x)$. Тогда $f_2(z) > f_2(y) > f_2(x)$. Поэтому $\mathrm{Min}_y \subseteq [f_1] \vee [f_2]$ и $f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \cup [f_2'] \cup \mathrm{Min}_y$ по утверждению 5) предложения 38. Отсюда $\mathrm{Min}_y \subseteq A'$, так как $[f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ и $(\mathrm{Min}_y)' = \mathrm{Min}_y$ в силу (*). Значит, $f_1' \vee f_2' \in A'$, так как $[f_1'], [f_2'], \mathrm{Min}_y \subseteq A'$.

Докажем, что $f_1'f_2' \in A'$. Поскольку $r'f' \in A'$ для любых $r' \in \mathbb{P}^{\vee} \subseteq A'$ и $f' \in A'$ (см. случай 1.1), не умаляя общности, будем считать, что $f_1'(x) = f_2'(z) = 1$.

Пусть, для определенности, $T_y = (a, b, s, t)$ и

$$f_1 = \Big(1, a^{r_1}, \big(a^{r_1}\big)^{1+p_1(s-1)}\Big), \quad f_2 = \Big(\big(c^{r_2}\big)^{1+p_2(l-1)}, c^{r_2}, 1\Big),$$
$$f_1' = \Big(1, b^{r_1}, \big(b^{r_1}\big)^{1+p_1(t-1)}\Big), \quad f_2' = \Big(\big(d^{r_2}\big)^{1+p_2(q-1)}, d^{r_2}, 1\Big),$$

где $r_1, r_2, p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, $c = a^{s-1}$, $d = b^{t-1}$ и $(s-1)(l-1) = (t-1)(q-1) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} f_1f_2 &= \big(a^{r_2(s-1)+r_2p_2}, a^{r_1+r_2(s-1)}, a^{r_1+r_1p_1(s-1)}\big),\\ f_1'f_2' &= \big(b^{r_2(t-1)+r_2p_2}, b^{r_1+r_2(t-1)}, b^{r_1+r_1p_1(t-1)}\big). \end{aligned} \tag{41}$$

Поэтому в силу предложения 35

$$\begin{aligned} &[f_1] \vee [f_2] \subset U^{\vee}(X) \Longleftrightarrow \\ &\quad (1 + p_1(s-1) - 1)(1 + p_2(l-1) - 1) \leq 1 \Longleftrightarrow p_1p_2 \leq 1 \Longleftrightarrow \\ &\quad\quad (1 + p_1(t-1) - 1)(1 + p_2(q-1) - 1) \leq 1 \Longleftrightarrow [f_1'] \vee [f_2'] \subset U^{\vee}(X). \end{aligned} \tag{42}$$

Отсюда и из (41) получаем, что

$$(43)\quad \begin{cases} [f_1]\vee[f_2]\subset U^\vee(X),\\ f_1(x)f_2(x)>f_1(y)f_2(y)>f_1(z)f_2(z)\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} p_1p_2\le 1,\\ r_2p_2<r_1,\\ r_2<r_1p_1\end{cases}\Longleftrightarrow \begin{cases} [f_1']\vee[f_2']\subset U^\vee(X),\\ f_1'(x)f_2'(x)>f_1'(y)f_2'(y)>f_1'(z)f_2'(z).\end{cases}$$

Аналогично,

$$\begin{cases} [f_1]\vee[f_2]\subset U^\vee(X),\\ f_1(x)f_2(x)<f_1(y)f_2(y)<f_1(z)f_2(z)\end{cases}\Longleftrightarrow \begin{cases} [f_1']\vee[f_2']\subset U^\vee(X),\\ f_1'(x)f_2'(x)<f_1'(y)f_2'(y)<f_1'(z)f_2'(z).\end{cases}$$

Значит,

$$(44)\quad \begin{cases} [f_1]\vee[f_2]\subset U^\vee(X),\\ \operatorname{Mid} f_1f_2=\{y\}\end{cases}\Longleftrightarrow \begin{cases} [f_1']\vee[f_2']\subset U^\vee(X),\\ \operatorname{Mid} f_1'f_2'=\{y\}.\end{cases}$$

Случай 1.5.1: $[f_1']\vee[f_2']=U^\vee(X)$. Тогда $[f_1]\vee[f_2]=U^\vee(X)$ в силу (42). Отсюда $A=A'=U^\vee(X)$. Значит, $f_1'f_2'\in A'$.

Случай 1.5.2: $[f_1']\vee[f_2']\subset U^\vee(X)$ и $y\in\operatorname{Max} f_1'f_2'$. Тогда $\operatorname{Max} f_1'f_2'=X$, т. е. $f_1'f_2'\in\mathbb{P}^\vee$, так как в противном случае $[f_1']\vee[f_2']=U^\vee(X)$ по предложению 34. Значит, $f_1'f_2'\in A'$, так как $\mathbb{P}^\vee\subseteq A'$.

Случай 1.5.3: $[f_1']\vee[f_2']\subset U^\vee(X)$ и $y\notin\operatorname{Max} f_1f_2$.

Допустим, $y\in\operatorname{Min} f_1f_2$. Заметим, что $\operatorname{Min}_y\subseteq[f_1]\vee[f_2]$ по утверждению 5) предложения 38. Поэтому $\operatorname{Min}_y\subseteq A'$, так как $[f_1]\vee[f_2]\subseteq A$ и $(\operatorname{Min}_y)'=\operatorname{Min}_y$ в силу (*). Значит, $f_1'f_2'\in A'$, так как $f_1'f_2'\in\operatorname{Min}_y$.

Допустим, $y\in\operatorname{Mid} f_1f_2$. Не умаляя общности, будем считать, что $f_1(x)f_2(x)>f_1(y)f_2(y)>f_1(z)f_2(z)$. Тогда $r_1-r_2p_2>0$, $r_1p_1-r_2>0$ в силу (43) и

$$f=\left(1,a^{r_1-r_2p_2},\left(a^{r_1-r_2p_2}\right)^{1+\frac{r_1p_1-r_2}{r_1-r_2p_2}\cdot(s-1)}\right)=a^{-r_2(s-1)-r_2p_2}f_1f_2\in A$$

Кроме того, $f_1'f_2'=b^{r_2(t-1)+r_2p_2}f'$. Значит (см. случай 1.1), $f_1'f_2'\in A'$, так как $\mathbb{P}^\vee\subseteq A'$ и $f'\in A'$.

Случай 1.6: $f_2'(x)=f_2'(z)>f_2'(y)$. Тогда $\operatorname{Max}_x\cap\operatorname{Min}_y\subseteq A$, так как $[e_y]=[f_2]\subseteq A$, $[e_{y,z}]=[f_1(y)\vee f_1]\subseteq A$ и $\operatorname{Max}_x\cap\operatorname{Min}_y=[e_y]\vee[e_{y,z}]$ в силу (25). Отсюда $\operatorname{Max}_x\cap\operatorname{Min}_y\subseteq A'$, так как $(\operatorname{Max}_x\cap\operatorname{Min}_y)'=\operatorname{Max}_x\cap\operatorname{Min}_y$ в силу (*).

Докажем, что $f_1'\vee f_2'\in A'$.

Если $f_2'(z)>f_1'(y)$, то $f_1'\vee f_2'\in\operatorname{Max}_x\cap\operatorname{Min}_y\subseteq A'$.

Если $f_2'(z)\le f_1'(y)$, то $f_1'\vee f_2'=f_2'(z)\vee f_1'\in[f_1']\subseteq A'$.

Докажем, что $f_1'f_2'\in A'$. Поскольку (см. случай 1.1) $r'f'\in A'$ для любых $f'\in A', r'\in\mathbb{P}^\vee\subseteq A'$, не умаляя общности, будем считать, что $f_1'(x)=f_2'(x)=1$.

Заметим, что $f_1'(x)f_2'(x)>f_1'(z)f_2'(z)$. Поэтому если $f_1'(y)f_2'(y)\le f_1'(z)f_2'(z)$, то $f_1'f_2'\in\operatorname{Max}_x\cap\operatorname{Min}_y\subseteq A'$. Пусть $f_1'(y)f_2'(y)>f_1'(z)f_2'(z)$. Выберем $n\in\mathbb{N}$ так, чтобы $(f_1')^n\le f_1'f_2'$ на $\{y,z\}$. Тогда $f_1'f_2'=f_1'(z)f_2'(z)\vee f_2'(y)f_1'\vee(f_1')^n\in[f_1']\subseteq A'$.

Случай 1.7: $f_2'(x)<f_2'(y)=f_2'(z)$.

Если $f_1'(x)\ge f_2'(y)$, то $f_1'\vee f_2'=f_2'(y)\vee f_1'\in[f_1']\subseteq A'$.

Если $f_1'(x)<f_2'(y)$, то $f_1'\vee f_2'=f_1'(x)\vee f_2'\in[f_2']\subseteq A'$.

Докажем, что $f_1'f_2' \in A'$. Заметим, что $\mathrm{Min}_z, \mathrm{Min}_x \cap \mathrm{Max}_y \subseteq [f_1] \vee [f_2]$ по утверждению 7) предложения 38 и $f_1'(y)f_2'(y) > f_1'(z)f_2'(z)$. Кроме того, $(\mathrm{Min}_z)' = \mathrm{Min}_z$ и $(\mathrm{Min}_x \cap \mathrm{Max}_y)' = \mathrm{Min}_x \cap \mathrm{Max}_y$ в силу (*). Значит, $\mathrm{Min}_z, \mathrm{Min}_x \cap \mathrm{Max}_y \subseteq A'$.

Если $f_1'(x)f_2'(x) \geq f_1'(z)f_2'(z)$, то $f_1'f_2' \in \mathrm{Min}_z \subseteq A'$.

Если $f_1'(x)f_2'(x) < f_1'(z)f_2'(z)$, то $f_1'f_2' \in \mathrm{Min}_x \cap \mathrm{Max}_y \subseteq A'$.

Случай 1.8: $f_2'(y) > f_2'(x) = f_2'(z)$. Тогда $[f_1] \vee [f_2] = [f_1'] \vee [f_2'] = \mathrm{Min}_z$ по утверждению 3) предложения 38. Отсюда $\mathrm{Min}_z \subseteq A'$, так как $[f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ и $(\mathrm{Min}_z)' = \mathrm{Min}_z$ в силу (*). Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in \mathrm{Min}_z \subseteq A'$.

Случай 1.9: $f_2'(z) > f_2'(x) = f_2'(y)$. Тогда $f_1'(x)f_2'(x) > f_1'(y)f_2'(y)$ и $\mathrm{Min}_y \subseteq [f_1] \vee [f_2]$ по утверждению 8) предложения 38. Отсюда $\mathrm{Min}_y \subseteq A'$, так как $[f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ и $(\mathrm{Min}_y)' = \mathrm{Min}_y$ в силу (*).

Докажем, что $f_1' \vee f_2' \in A'$.

Если $f_1'(y) \geq f_2'(z)$, то $f_1' \vee f_2' = f_2'(z) \vee f_1' \in [f_1'] \subseteq A'$.

Если $f_2'(z) > f_1'(y)$ и $f_1'(x) \geq f_2'(y)$, то $f_1' \vee f_2' \in \mathrm{Min}_y \subseteq A'$.

Если $f_2'(z) > f_1'(y)$ и $f_1'(x) < f_2'(y)$, то $f_1' \vee f_2' = f_2' \in A'$.

Докажем, что $f_1'f_2' \in A'$. Поскольку (см. случай 1.1) $r'f' \in A'$ для любых $f' \in A', r' \in \mathbb{P}^\vee \subseteq A'$, не умаляя общности, будем считать, что $f_1'(x) = f_2'(z) = 1$.

Если $f_1'(y)f_2'(y) \leq f_1'(z)f_2'(z)$, то $f_1'f_2' \in \mathrm{Min}_y \subseteq A'$.

Если $f_1'(y)f_2'(y) > f_1'(z)f_2'(z)$, то $f_1'f_2' = f_1'(z) \vee f_2'(x)f_1' \in [f_1'] \subseteq A'$.

Случай 2: $f_1'(x) = f_1'(y) > f_1'(z)$ и $|\operatorname{Im} f_2'| = 2$. Тогда $[f_1'] = [f_1] = [e_z]$.

Случай 2.1: $f_2'(x) = f_2'(z) > f_2'(y)$. Тогда $[f_2'] = [f_2] = [e_y]$ и $[f_1] \vee [f_2] = [f_1'] \vee [f_2'] = \mathrm{Max}_x$ по утверждению 1) предложения 23. Отсюда $\mathrm{Max}_x \subseteq A'$, так как $[f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ и $(\mathrm{Max}_x)' = \mathrm{Max}_x$ в силу (*). Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \vee [f_2'] \subseteq A'$.

Случай 2.2: $f_2'(x) < f_2'(y) = f_2'(z)$. Тогда $[f_2'] = [f_2] = [e_x]$ и $[f_1] \vee [f_2] = [f_1'] \vee [f_2'] = \mathrm{Max}_y$ по утверждению 1) предложения 23. Отсюда $\mathrm{Max}_y \subseteq A'$, так как $[f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ и $(\mathrm{Max}_y)' = \mathrm{Max}_y$ в силу (*). Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \vee [f_2'] \subseteq A'$.

Случай 2.3: $f_2'(y) > f_2'(x) = f_2'(z)$. Тогда $[f_2'] = [f_2] = [e_{x,z}]$ и $[f_1] \vee [f_2] = [f_1'] \vee [f_2'] = \mathrm{Max}_y \cap \mathrm{Min}_z$ по утверждению 4) предложения 23. Отсюда $\mathrm{Max}_y \cap \mathrm{Min}_z \subseteq A'$, так как $[f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ и $(\mathrm{Max}_y \cap \mathrm{Min}_z)' = \mathrm{Max}_y \cap \mathrm{Min}_z$ в силу (*). Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \vee [f_2'] \subseteq A'$.

Случай 2.4: $f_2'(z) > f_2'(x) = f_2'(y)$. Тогда $[f_2'] = [e_{x,y}]$ и $[f_1'] \vee [f_2'] = [f_1'] \cup [f_2']$ по утверждению 3) предложения 23. Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \cup [f_2'] \subseteq A'$.

Случай 3: $f_1'(x) > f_1'(y) = f_1'(z)$ и $|\operatorname{Im} f_2'| = 2$. Тогда $[f_1'] = [f_1] = [e_{y,z}]$.

Случай 3.1: $f_2'(x) = f_2'(z) > f_2'(y)$. Тогда $[f_2'] = [f_2] = [e_y]$ и $[f_1] \vee [f_2] = [f_1'] \vee [f_2'] = \mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_y$ по утверждению 4) предложения 23. Отсюда $\mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_y \subseteq A'$, так как $[f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ и $(\mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_y)' = \mathrm{Max}_x \cap \mathrm{Min}_y$ в силу (*) и (38). Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \vee [f_2'] \subseteq A'$.

Случай 3.2: $f_2'(y) = f_2'(z) > f_2'(x)$. Тогда $[f_2'] = [e_x]$ и $[f_1] \vee [f_2] = [f_1'] \cup [f_2']$ по утверждению 3) предложения 23. Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \cup [f_2'] \subseteq A'$.

Случай 3.3: $f_2'(y) > f_2'(x) = f_2'(z)$. Тогда $[f_2'] = [f_2] = [e_{x,z}]$ и $[f_1] \vee [f_2] = [f_1'] \vee [f_2'] = \mathrm{Min}_z$ по утверждению 2) предложения 23. Отсюда $\mathrm{Min}_z \subseteq A'$, так как $[f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ и $(\mathrm{Min}_z)' = \mathrm{Min}_z$ в силу (*). Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \vee [f_2'] \subseteq A'$.

Случай 3.4: $f_2'(z) > f_2'(x) = f_2'(y)$. Тогда $[f_2'] = [f_2] = [e_{x,y}]$ и $[f_1] \vee [f_2] = [f_1'] \vee [f_2'] = \mathrm{Min}_y$ согласно утверждению 2) предложения 23. Следовательно, $\mathrm{Min}_y \subseteq A'$, так как $[f_1] \vee [f_2] \subseteq A$ и $(\mathrm{Min}_y)' = \mathrm{Min}_y$ в силу (*). Значит, $f_1'f_2', f_1' \vee f_2' \in [f_1'] \vee [f_2'] \subseteq A'$. $\square$

5.5. **Доказательство предложения 9.** Пусть $\alpha_{1,\psi_t} = \alpha_{1,\psi_T}$. Тогда

$$\alpha_{1,\psi_t}([f]) = \left[\left(1, a_y^t, a_y^{t(1+p(s_y-1))}\right)\right], \quad \alpha_{1,\psi_T}([f]) = \left[\left(1, b_y, b_y^{1+p(t_y-1)}\right)\right],$$

где $f = \left(1, a_y, a_y^{1+p(s_y-1)}\right)$, $p \in \mathbb{P}$. Тогда $b_y = a_y^t$ и $b_y^{1+p(t_y-1)} = a_y^{t(1+p(s_y-1))}$ по предложению 11. Отсюда $b_y = a_y^t$ и $t_y = s_y$.

Равенства $b_x = a_x^t, t_x = s_x$ и $b_z = a_z^t, t_z = s_z$ доказываются аналогично.

Обратно, пусть условие (8) выполняется. Заметим, что $\alpha_{1,\psi_T}([f]) = [f']$ по предложению 40 для любой подалгебры $[f]$. Поэтому $\alpha_{1,\psi_T}([f]) = [f^t]$ в случае $|\operatorname{Im} f| = 3$ и $\alpha_{1,\psi_T}([f]) = [f]$ в случае $|\operatorname{Im} f| \le 2$. Кроме того, $[f^t] = [f]$ по предложению 11 в случае $|\operatorname{Im} f| \le 2$ и $\alpha_{1,\psi_t}([f]) = [f^t]$. Следовательно, $\alpha_{1,\psi_t}([f]) = \alpha_{1,\psi_T}([f])$. Значит, $\alpha_{1,\psi_t} = \alpha_{1,\psi_T}$ в силу (1).

5.6. **Доказательство теоремы 3 для случая $|X| = 3$.** Пусть α_1 — $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Тогда, напомним, выполняется условие (18). В частности, условие (18) выполняется для любого $*$-автоморфизма α_{1,ψ_T}.

Рассмотрим произвольные подалгебры

$$[f_x] = \left[\left(a_x, a_x^{1+1(s_x-1)}, 1\right)\right], \ [f_y] = \left[\left(1, a_y, a_y^{1+(s_y-1)}\right)\right], \ [f_z] = \left[\left(a_z^{1+(s_z-1)}, 1, a_z\right)\right]$$

где $a_x, a_y, a_z, s_x, s_y, s_z \in \mathbb{P}$ и $s_x, s_y, s_z > 1 > a_x, a_y, a_z$. Тогда

$$\begin{aligned} &\alpha_1([f_x]) = [f_x''], \text{ где } [f_x''] = \left[\left(b_x, b_x^{1+(t_x-1)}, 1\right)\right], \\ &\alpha_1([f_y]) = [f_y''], \text{ где } [f_y''] = \left[\left(1, b_y, b_y^{1+(t_y-1)}\right)\right], \\ &\alpha_1([f_z]) = [f_z''], \text{ где } [f_z''] = \left[\left(b_z^{1+(t_z-1)}, 1, b_z\right)\right], \end{aligned} \tag{45}$$

для некоторых $b_x, b_y, b_z, t_x, t_y, t_z \in \mathbb{P}$, где $t_x, t_y, t_z > 1 > b_x, b_y, b_z$. Положим

$$T\colon T_x = (a_x, b_x, s_x, t_x), \ T_y = (a_y, b_y, s_y, t_y), \ T_z = (a_z, b_z, s_z, t_z).$$

Докажем, что $\alpha_1 = \alpha_{1,\psi_T}$. В силу (1) достаточно показать, что для любой подалгебры $[f]$ имеем $[f'] = [f'']$, где $[f'] = \alpha_{1,\psi_T}([f])$ и $[f''] = \alpha_1([f])$.

Если $|\operatorname{Im} f| \le 2$, то $\operatorname{Max} f' = \operatorname{Max} f'' = \operatorname{Max} f$ в силу (18). Поэтому $[f'] = [f'']$ по предложению 11.

Пусть $|\operatorname{Im} f| = 3$. Не умаляя общности, будем считать, что $f \in \operatorname{Mid}_y$ и $\max f = \max f' = \max f'' = 1$.

Допустим, $f(x) > f(y) > f(z)$. Тогда функция f имеет вид

$$f = \left(1, a_y^{r_y}, \left(a_y^{r_y}\right)^{1+p_y(s_y-1)}\right), \ r_y, p_y \in \mathbb{P}.$$

По предложению 33 для подалгебр $[f]$ и $[f_y]$ с. р. х. показателей r_y и p_y. Вместе с (45) и предложением 33 это означает, что

$$[f''] = \left[\left(1, b_y^{r_y}, \left(b_y^{r_y}\right)^{1+p_y(t_y-1)}\right)\right].$$

Значит, $[f'] = [f'']$, так как $\psi_T(f) = f''$.

Наконец, если $f(x) < f(y) < f(z)$, то $(1/f)(x) > (1/f)(y) > (1/f)(z)$. Поэтому, как было доказано выше, $\alpha_1([1/f]) = \alpha_{1,\psi_T}([1/f])$. Кроме того, $\alpha_{1,\psi_T}([1/f]) = [1/f']$ и $\alpha_1([1/f]) = [1/f'']$ в силу предложения 36. Значит, $[f'] = [f'']$, так как по предложению 11 равенства $[f'] = [f'']$ и $[1/f'] = [1/f'']$ равносильны.

6. $*$-АВТОМОРФИЗМЫ РЕШЕТКИ $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$, $|X| = 3$

Будем работать в решетке $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$, $X = \{x, y, z\}$. Перечислим ряд утверждений, которые нам понадобятся для описания ее $*$-автоморфизмов.

Утв. 1. Для любой подалгебры $[f], |\operatorname{Im} f| = 3$, с. р. х. подалгебры $\langle f\rangle$: по предложению 11 искомой будет подалгебра $\langle g\rangle$ такая, что $[g] = [f]$.

Утв. 2. В силу предложений 28, 29 и утверждения 1 для любой подалгебры $\langle f\rangle, |\operatorname{Im} f| = 3$, с. р. х. подалгебр $\langle r \vee f\rangle$, $\operatorname{mid} f > r \geq \min f$, и для любых подалгебр $\langle r_1 \vee f\rangle$ и $\langle r_2 \vee f\rangle$, $\operatorname{mid} f > r_1, r_2 \geq \min f$, с. р. х. неравенства $r_1 < r_2$.

Утв. 3. В силу предложения 33 и утверждения 1 для любой подалгебры $\langle(1, a, a^s)\rangle$, $s > 1 > a$, и любых $r, p \in \mathbb{P}$ с. р. х. подалгебры $\big\langle\big(1, a^r, \big(a^r\big)^{1+p(s-1)}\big)\big\rangle$.

Утв. 4. Из предложения 36 и утверждения 1 получаем, что для любой подалгебры $\langle f\rangle$, $|\operatorname{Im} f| = 3$, с. р. х. подалгебры $\langle 1/f\rangle$.

Утв. 5. Рассмотрим (см. предложение 3) подалгебры Min_x, Min_y и Min_z, порядок которых зафиксируем до конца раздела. Тогда из предложений 3, 20 и утверждения 1 следует, что с. р. х. подалгебр $\langle f\rangle$ с любым наперед заданным порядком значений $f(x), f(y)$ и $f(z)$.

Докажем еще несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 42. *Для любых подалгебр* $\langle f\rangle, \langle g\rangle \subseteq \mathrm{Max}_x$ *и* $\langle h\rangle \subseteq \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$, *где* $f(x) = g(x) = h(x) = 1$, *справедливо неравенство* $h \leq f \vee g$.

Доказательство. Поскольку $\langle h\rangle \subseteq \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$, функция h имеет вид

$$h = a_{10} f \vee a_{01} g \vee \ldots \vee a_{mn} f^m g^n,$$

причем $f, g \leq 1$ и $a_{10} \vee a_{01} \vee \ldots \vee a_{mn} = 1$, так как $\langle f\rangle, \langle g\rangle \subseteq \mathrm{Max}_x$ и $f(x) = g(x) = h(x) = 1$. Кроме того, $f^i g^j \leq f$ при $i \geq 1$ и $f^i g^j \leq g$ при $j \geq 1$, $i, j \in \mathbb{N}_0$. Значит, $h \leq f \vee g \vee \ldots \vee f^m g^n \leq f \vee g$. □

Предложение 43. *Для произвольных подалгебр* $\langle f\rangle$, $\langle(1, c, c)\rangle$ *и* $\langle(1, 1, d)\rangle$, *где* $f = (1, a, b)$, $1 > a > b$ *и* $1 > c, d$, *с. р. х. равенств* $a = c$, $b = c$ *и* $b = d$.

Доказательство. 1. Докажем, что $a = c$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия (см. утверждение 2):

1.1) $\langle r \vee f\rangle \subseteq \langle f\rangle \vee \langle(1, c, c)\rangle$ для любой подалгебры $\langle r \vee f\rangle$, $a > r \geq b$;

1.2) если $\langle(1, e, e)\rangle \subset \langle(1, c, c)\rangle$, $1 > e$, то $\langle r \vee f\rangle \nsubseteq \langle f\rangle \vee \langle(1, e, e)\rangle$ для некоторой подалгебры $\langle r \vee f\rangle$, $a > r \geq b$.

Заметим, что в силу предложений 12 и 42 условие 1.1) равносильно $c \geq a$, а условие 1.2) равносильно тому, что $e < a$ для всех $e < c$, т. е. $a \geq c$.

2. Равенство $b = c$ равносильно следующим условиям (см. утверждение 2):

2.1) $\langle r \vee f\rangle \nsubseteq \langle f\rangle \vee \langle(1, c, c)\rangle$ для любой подалгебры $\langle r \vee f\rangle \neq \langle f\rangle$, $a > r \geq b$;

2.2) если $\langle(1, c, c)\rangle \subset \langle(1, e, e)\rangle$, $1 > e$, то $\langle r \vee f\rangle \subseteq \langle f\rangle \vee \langle(1, e, e)\rangle$ для некоторой подалгебры $\langle r \vee f\rangle \neq \langle f\rangle$, $a > r \geq b$.

Действительно, в силу предложений 12 и 42 условие 2.1) равносильно $b \geq c$, а условие 2.2) равносильно тому, что $e > b$ для всех $e > c$, т. е. $c \geq b$.

3. Равенство $b = d$ равносильно следующим условиям (см. утверждение 2):

3.1) если $\langle(1, 1, e)\rangle \nsubseteq \langle(1, 1, d)\rangle$, $1 > e$, то $\langle(1, 1, e)\rangle \nsubseteq \langle f\rangle \vee \langle(1, 1, d)\rangle$;

3.2) если $\langle(1, 1, e)\rangle \subset \langle(1, 1, d)\rangle$, $1 > e$, то $\langle(1, 1, r)\rangle \subseteq \langle f\rangle \vee \langle(1, 1, e)\rangle$ для некоторой подалгебры $\langle(1, 1, r)\rangle \nsubseteq \langle(1, 1, e)\rangle$, $1 > r$.

Действительно, в силу предложений 12 и 42 условие 3.1) означает, что если $e > d$, то $e > b \vee d$, т. е. $d \geq b$, а условие 3.2) означает, что если $e < d$, то $r \leq b \vee e$ для некоторого $r > e$, т. е. $b \geq d$. $\square$

Предложение 44. *Для любой подалгебры* $\langle f \rangle$, $f = \bigl(1, a, a^{1+(s-1)}\bigr)$, $s > 1 > a$, *с. р. х. подалгебр*

$$\langle (1, a, a^2) \rangle,\ \langle (1, a^2, a) \rangle,\ \langle (a, 1, a^2) \rangle,\ \langle (a^2, 1, a) \rangle,\ \langle (a, a^2, 1) \rangle,\ \langle (a^2, a, 1) \rangle. \tag{46}$$

Доказательство. 1. Дадим р. х. подалгебры $\langle (1, a, a^2) \rangle$. Для подалгебры $\langle f \rangle$ по утверждению 3 с. р. х. подалгебры $\langle f^2 \rangle$ и множества подалгебр $\langle g \rangle$, где $g = \bigl(1, a, a^{1+p(s-1)}\bigr)$, $p \in \mathbb{P}$. В силу предложения 43 для подалгебры $\langle f^2 \rangle$ и произвольной подалгебры $\langle g \rangle$ и с. р. х. подалгебр $\bigl\langle \bigl(1, a^{1+p(s-1)}, a^{1+p(s-1)}\bigr) \bigr\rangle$ и $\langle (1, a^2, a^2) \rangle$. Тогда по предложению 11 равенство этих подалгебр равносильно равенству $a^{1+p(s-1)} = a^2$, что дает р. х. подалгебры $\langle (1, a, a^2) \rangle$.

2. Дадим р. х. подалгебры $\langle (1, a^2, a) \rangle$. Рассмотрим (см. пункт 1) подалгебру $\langle g \rangle = \langle (1, a, a^2) \rangle$ и множество подалгебр $\langle h \rangle = \langle (1, c, b) \rangle$, $1 > b > c$. Для $\langle g \rangle$ по предложению 43 с. р. х. подалгебр $\langle (1, a, a) \rangle$ и $\langle (1, a^2, a^2) \rangle$. Для произвольной подалгебры $\langle h \rangle$ по предложению 43 с. р. х. подалгебр $\langle (1, c, c) \rangle$ и $\langle (1, b, b) \rangle$. Тогда по предложению 11 равенства $\langle (1, c, c) \rangle = \langle (1, a^2, a^2) \rangle$ и $\langle (1, b, b) \rangle = \langle (1, a, a) \rangle$ равносильны равенствам $b = a$ и $c = a^2$, что дает р. х. подалгебры $\langle (1, a^2, a) \rangle$.

3. Дадим р. х. подалгебры $\langle (a, a^2, 1) \rangle$. Рассмотрим (см. пункт 2) подалгебру $\langle h \rangle = \langle (a^2, a, 1) \rangle$. Тогда для $\langle h \rangle$ согласно пункту 1 с. р. х. подалгебры $\langle (a, a^2, 1) \rangle$.

4. Для подалгебр (см. пункты 1–3) $\langle (1, a, a^2) \rangle$, $\langle (1, a^2, a) \rangle$, $\langle (a, a^2, 1) \rangle$ по утверждению 4 с. р. х. подалгебр $\langle 1/(1, a, a^2) \rangle$, $\langle 1/(1, a^2, a) \rangle$, $\langle 1/(a, a^2, 1) \rangle$, которые по предложению 11 равны соответственно подалгебрам $\langle (a^2, a, 1) \rangle$, $\langle (a^2, 1, a) \rangle$, $\langle (a, 1, a^2) \rangle$. $\square$

6.1. **Доказательство теоремы 2 для случая** $|X| = 3$. Пусть α — $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. В силу предложения 44 с. р. х. подалгебр (46) для некоторого a, а их образами будут соответственно подалгебры

$$\langle (1, b, b^2) \rangle,\ \langle (1, b^2, b) \rangle,\ \langle (b, 1, b^2) \rangle,\ \langle (b^2, 1, b) \rangle,\ \langle (b, b^2, 1) \rangle,\ \langle (b^2, b, 1) \rangle. \tag{47}$$

Докажем, что $\alpha = \alpha_{\psi_t}$, где $t \in \mathbb{P}$ такое, что $b = a^t$. В силу (1) достаточно показать, что $\alpha(\langle f \rangle) = \langle f^t \rangle$ для любой подалгебры $\langle f \rangle$.

Случай 1: $|\operatorname{Im} f| = 1$. Тогда $\langle f \rangle = \langle f^t \rangle = \mathbb{P}^\vee$. Значит, $\alpha(\langle f \rangle) = \langle f^t \rangle$ в силу (*).

Случай 2: $|\operatorname{Im} f| = 2$. Не умаляя общности, будем считать, что $f = (1, a^r, a^r)$ или $f = (1, 1, a^r)$. Поскольку $\alpha\colon \langle (1, a, a^2) \rangle \mapsto \langle (1, b, b^2) \rangle$, в силу утверждения 3 получаем, что $\alpha(\langle f \rangle) = \langle (1, b^r, b^r) \rangle$ или $\alpha(\langle f \rangle) = \langle (1, 1, b^r) \rangle$ соответственно. Значит, $\alpha(\langle f \rangle) = \langle f^t \rangle$, так как $b = a^t$.

Случай 3: $|\operatorname{Im} f| = 3$. Не умаляя общности, будем считать, что

$$f = \Bigl(1, a^r, \bigl(a^r\bigr)^{1+p}\Bigr),\ r, p \in \mathbb{P}.$$

Поскольку $\alpha\colon \langle (1, a, a^2) \rangle \mapsto \langle (1, b, b^2) \rangle$, в силу утверждения 3

$$\alpha(\langle f \rangle) = \Bigl\langle \Bigl(1, b^r, \bigl(b^r\bigr)^{1+p}\Bigr) \Bigr\rangle.$$

Значит, $\alpha(\langle f \rangle) = \langle f^t \rangle$, так как $b = a^t$.

7. $*$-автоморфизмы решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, $|X| \geq 4$

Будем работать в решетке $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, $|X| \geq 4$. Для описания ее $*$-автоморфизмов докажем несколько утверждений, опираясь на предложения 17 и 20.

Предложение 45. *Если X — компакт, то для любых подалгебр $[f]$, $[g]$ и A_Z, где $|\operatorname{Im} f|_Z| = |Z| = 3$, с. р. х. равенства $[g|_Z] = [(f|_Z)^2]$.*

Доказательство. Для подалгебры A_Z в $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ рассмотрим подрешетку $\mathbb{A}_{A_Z}(U^\vee(X))$, которая по предложению 17 изоморфна решетке $\mathbb{A}_1(U^\vee(X)|_Z)$. Элементы $[f] \vee A_Z$ и $[g] \vee A_Z$ решетки $\mathbb{A}_{A_Z}(U^\vee(X))$ соответствуют элементам $[f|_Z] = \beta_Z([f] \vee A_Z)$ и $[g|_Z] = \beta_Z([g] \vee A_Z)$ решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X)|_Z)$. Поскольку $|\operatorname{Im} f|_Z| = 3$, по предложению 32 для подалгебры $[f|_Z]$ в $\mathbb{A}_1(U^\vee(X)|_Z)$ с. р. х. подалгебры $[(f|_Z)^2]$. Следовательно, равенство $[g|_Z] = [(f|_Z)^2]$ имеет р. х. в $\mathbb{A}_1(U^\vee(X)|_Z)$, а значит, и в $\mathbb{A}_{A_Z}(U^\vee(X))$. □

Предложение 46. *Если X — компакт, то для любых подалгебр $[f]$ и A_Z, где $|Z| = 3$, $\operatorname{Im} f|_Z = \{1, a, b\}$ и $1 > a > b$, с. р. х. равенства $b = a^2$.*

Доказательство. Для подалгебры A_Z рассмотрим (см. предложения 3 и 20) подалгебры Min_x, Min_y и Min_z, соответствующие точкам Z, а также произвольную подалгебру Min_w, отличную от этих подалгебр. Положим $W = \{x, y, z, w\}$. Пусть, для определенности, $f(x) > f(y) > f(z)$. В силу (16) и предложения 18 для подалгебры $[f]$ с. р. х. подалгебры $[g]$, для которой выполняются равенства $[g|_Z] = [f|_Z]$ и $g(z) = g(w)$, равносильные $[g|_W] = [(1, a, b, b)]$. Аналогично, для подалгебры $[g]$ рассмотрим подалгебру $[h]$, для которой $[h|_{\{x,y,w\}}] = [g|_{\{x,y,w\}}]$ и $h(y) = h(z)$, или, что равносильно, $[h|_W] = [(1, a, a, b)]$. Заметим, что $b = a^2$ тогда и только тогда, когда для некоторой подалгебры $[l]$ выполняется условие

$$[l|_Z] = [g|_Z], \quad \left[l|_{\{x,z,w\}}\right] = \left[(h|_{\{x,z,w\}})^2\right], \tag{48}$$

которое имеет р. х. в силу (16) и предложения 45.

Действительно, если $b = a^2$, то искомой будет любая подалгебра $[l]$, для которой $[l|_W] = [(1, a, a^2, a^4)]$.

Обратно, если для некоторой подалгебры $[l]$ выполняется условие (48), то

$$[l|_Z] = [(1, a, b)], \quad \left[l|_{\{x,z,w\}}\right] = \left[\left(1, a^2, b^2\right)\right].$$

Значит, $b = a^2$ по предложению 11. □

Предложение 47. *Если X — компакт, то для любых подалгебр $[f]$ и A_Z, где $|Z| = 3$, $[f|_Z] = [(1, a, a^2)]$ и $a < 1$, и любых $r, p \in \mathbb{P}$ с. р. х. подалгебры $[g]$ такой, что $[g|_Z] = \left[\left(1, a^r, (a^r)^{1+p}\right)\right]$.*

Доказательство. Для подалгебры A_Z в $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ рассмотрим подрешетку $\mathbb{A}_{A_Z}(U^\vee(X))$, которая по предложению 17 изоморфна решетке $\mathbb{A}_1(U^\vee(X)|_Z)$. Элемент $[f] \vee A_Z$ решетки $\mathbb{A}_{A_Z}(U^\vee(X))$ соответствует элементу $[f|_Z]$ решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X)|_Z)$. По предложению 33 для $[f|_Z]$ в $\mathbb{A}_1(U^\vee(X)|_Z)$ с. р. х. подалгебры $A = \left[\left(1, a^r, (a^r)^{1+p}\right)\right]$. Ей в $\mathbb{A}_{A_Z}(U^\vee(X))$ соответствует подалгебра $\beta^{-1}(A)$. Поэтому искомой будет подалгебра $[g]$ такая, что $[g] \vee A_Z = \beta^{-1}(A)$. □

Предложение 48. *Если X — компакт, то для любых троек $(\mathrm{Min}_x, \mathrm{Min}_y, \mathrm{Min}_z)$ и $(\mathrm{Min}_{x'}, \mathrm{Min}_{y'}, \mathrm{Min}_{z'})$, и подалгебры $[f]$, $|\operatorname{Im} f|_Z| = 3$, где $Z = \{x, y, z\}$, с. р. х. подалгебры $[f']$ такой, что $[f'|_{Z'}] = [f|_Z]$, где $Z' = \{x', y', z'\}$.*

Доказательство. Пусть $[f|_Z] = [(r_x, r_y, r_z)]$, где значения r_x, r_y и r_z различны.

1. Если $|Z \cap Z'| = 3$, то достаточно разобрать случай, когда $x = y'$, $y = x'$ и $z = z'$, так как любая перестановка является композицией транспозиций.

Воспользуемся предложением 3 и рассмотрим любую подалгебру Min_w, отличную от подалгебр Min_x, Min_y и Min_z. Положим $W = \{x, y, z, w\}$. В силу (16) и предложения 18 для подалгебры $[f]$ с. р. х. подалгебры $[g]$, для которой $[g|_Z] = [f|_Z]$ и $g(x) = g(w)$, или, что равносильно, $[g|_W] = [(r_x, r_y, r_z, r_x)]$. Аналогично, для подалгебры $[g]$ рассмотрим подалгебру $[h]$, для которой $[h|_{\{y,z,w\}}] = [g|_{\{y,z,w\}}]$ и $h(x) = h(y)$, или, что равносильно, $[h|_W] = [(r_y, r_y, r_z, r_x)]$. Тогда искомой будет подагебра $[f']$, для которой $[f'|_{\{x,z,w\}}] = [h|_{\{x,z,w\}}]$ и $f'(y) = f'(w)$, так как из этих равенств следует равенство $[f'|_{Z'}] = [f|_Z]$.

2. Пусть $|Z \cap Z'| = 2$ и, для определенности, $x', y' \in Z$. Тогда в силу пункта 1, не умаляя общности, можно считать, что $x = x', y = y'$. Согласно (16) и предложению 18 для подалгебры $[f]$ с. р. х. подалгебры $[f']$ такой, что $[f'|_Z] = [f|_Z]$ и $f'(z') = f'(z)$. Тогда $[f'|_{Z'}] = [f|_Z]$.

3. Пусть $|Z \cap Z'| = 1$ и, для определенности, $x' \in Z$. Тогда в силу пункта 1, не умаляя общности, можно считать, что $x = x'$. Согласно (16) и предложению 18 для подалгебры $[f]$ с. р. х. подалгебры $[f']$ такой, что $[f'|_Z] = [f|_Z]$, $f'(y') = f'(y)$ и $f'(z') = f'(z)$. Тогда $[f'|_{Z'}] = [f|_Z]$.

4. Пусть $|Z \cap Z'| = 0$. Согласно (16) и предложению 18 для подалгебры $[f]$ с. р. х. подалгебры $[f']$ такой, что $[f'|_Z] = [f|_Z]$, $f'(x) = f'(x')$, $f'(y) = f'(y')$ и $f'(z) = f'(z')$. Тогда $[f'|_{Z'}] = [f|_Z]$. □

Предложение 49. *Для любых подалгебр* $[f]$ *и* $[g]$

$$[f] = [g] \Longleftrightarrow [f|_Z] = [g|_Z] \text{ для всех } Z \subseteq X, |Z| = 3.$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Установим достаточность.

Пусть $[f|_Z] = [g|_Z]$ для всех $Z \subseteq X$, $|Z| = 3$. Тогда $\mathrm{Min}\, f|_Z = \mathrm{Min}\, g|_Z$ и $\mathrm{Max}\, f|_Z = \mathrm{Max}\, g|_Z$ по предложению 11. Следовательно,

$$f(x) > f(y) \Longleftrightarrow g(x) > g(y) \text{ для любых } x, y \in X; \tag{49}$$

в частности, $\mathrm{Min}\, f = \mathrm{Min}\, g$ и $\mathrm{Max}\, f = \mathrm{Max}\, g$. Поэтому если $|\operatorname{Im} f| \leq 2$, то $[f] = [g]$ по предложению 11.

Пусть $|\operatorname{Im} f| \geq 3$ и, для определенности, $1 = g(x) = f(x) > f(y) > f(z)$ для некоторых $x, y, z \in X$. Поскольку $[f|_Z] = [g|_Z]$ для $Z = \{x, y, z\}$ и $f(x) = g(x)$, в силу предложения 11 имеем $f(y) = g(y)$ и $f(z) = g(z)$.

Пусть $w \in X \backslash \{x, y, z\}$. Если $f(w) \notin \{f(x), f(y)\}$, то для $Z = \{x, y, w\}$ из $[f|_Z] = [g|_Z]$ и предложения 11 находим, что $f(w) = g(w)$. Если $f(w) = f(x)$ или $f(w) = f(y)$, то $g(w) = g(x)$ или $g(w) = g(y)$ соответственно в силу (49). Это вместе с $f(x) = g(x)$ и $f(y) = g(y)$ означает, что $f(w) = g(w)$.

Итак, $f = g$, т. е. $[f] = [g]$. □

7.1. **Доказательство теоремы 3 для случая** $|X| \geq 4$**.** Докажем, что если α_1 — $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$, то $\alpha_1 = \alpha_{1,\psi_t}$ для некоторого $t \in \mathbb{P}$.

Случай 1: X — компакт. Выберем (см. предложение 3) произвольную тройку подалгебр $(\mathrm{Min}_x, \mathrm{Min}_y, \mathrm{Min}_z)$. Положим $Z = \{x, y, z\}$. Тогда в силу (18) и предложения 46 с. р. х. подалгебры $[u]$ такой, что $[u|_Z] = [(1, a, a^2)]$ для некоторого $a < 1$, и $\alpha_1([u]) = [u']$, где $[u'|_Z] = [(1, b, b^2)]$ для некоторого $b < 1$. Докажем, что $\alpha_1 = \alpha_{1,\psi_t}$, где $t = \log_a b$. В силу (1) достаточно показать, что $\alpha_1([f]) = [f^t]$

для любой подалгебры $[f]$. По предложению 49 это равносильно тому, что для любой тройки $(\mathrm{Min}_{x'}, \mathrm{Min}_{y'}, \mathrm{Min}_{z'})$ выполняется равенство $[f'|_{Z'}] = [f^t|_{Z'}]$, где $[f'] = \alpha_1([f])$ и $Z' = \{x', y', z'\}$.

Если $|\operatorname{Im} f|_{Z'}| \le 2$, то $[f'|_{Z'}] = [f^t|_{Z'}]$ в силу (18) и предложения 11.

Пусть $|\operatorname{Im} f|_{Z'}| = 3$. Не умаляя общности, будем считать, что

$$[f|_{Z'}] = \left[\left(1, a^r, (a^r)^{1+p}\right)\right], \ r, p \in \mathbb{P}.$$

По предложению 47 для подалгебры $[u]$ с. р. х. подалгебры $[v]$ такой, что $[v|_{Z'}] = [(1, a, a^2)]$, и $[v'|_{Z'}] = [(1, b, b^2)]$, где $[v'] = \alpha_1([v])$. Отсюда и из предложения 48 находим, что $[f'|_{Z'}] = \left[\left(1, b^r, (b^r)^{1+p}\right)\right]$, т. е. $[f'|_{Z'}] = [f^t|_{Z'}]$.

Случай 2: X — произвольное хьюиттовское пространство. Выше мы доказали, что $*$-автоморфизмы решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(\beta X))$ — это в точности автоморфизмы α_{1,ψ_t}. Поэтому $\alpha_1 = \alpha_{1,\psi_t}$ для некоторого $t \in \mathbb{P}$ на решетке $\mathbb{A}_1(spbU^\vee(X))$, так как решетка $\mathbb{A}_1(U^\vee(\beta X))$ канонически изоморфна решетке $\mathbb{A}_1(spbU^\vee(X))$, и в силу предложения 4 ограничение α_1 на решетку $\mathbb{A}_1(spbU^\vee(X))$ является $*$-автоморфизмом решетки $\mathbb{A}_1(spbU^\vee(X))$.

Докажем, что $\alpha_1 = \alpha_{1,\psi_t}$. Как и в случае 1, достаточно доказать $\alpha_1([f|_Z]) = [f^t|_Z]$ для любой подалгебры $[f]$ и любой подалгебры A_Z, $|Z| = 3$. С этой целью для подалгебры $[f]$ рассмотрим произвольную подалгебру $[g] \subseteq spbU^\vee(X)$, для которой $[f] \vee A_Z = [g] \vee A_Z$, или, что в силу (16) равносильно, $[f|_Z] = [g|_Z]$. Пусть $\alpha_1([f]) = [f']$ и $\alpha_1([g]) = [g']$. Поскольку $\alpha_1(A_Z) = A_Z$ в силу (*),

$$[f'] \vee A_Z = \alpha_1([f] \vee A_Z) = \alpha_1([g] \vee A_Z) = [g'] \vee A_Z.$$

Отсюда и из (16) находим, что $[f'|_Z] = [g'|_Z]$. Кроме того, $\alpha_1([g]) = \alpha_{1,\psi_t}([g]) = [g^t]$, т. е. $[g'|_Z] = [g^t|_Z] = [f^t|_Z]$. Значит, $[f'|_Z] = [f^t|_Z]$.

8. $*$-автоморфизмы решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$, $|X| \ge 4$

Пусть α — $*$-автоморфизм решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$, $|X| \ge 4$. В силу предложения 2 ограничение α на решетку $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ является ее $*$-автоморфизмом. Поэтому существует $t \in \mathbb{P}$ такое, что

$$\alpha([f]) = [f^t] \text{ для любой подалгебры } [f]. \tag{50}$$

Докажем, что $\alpha = \alpha_{\psi_t}$. В силу (1) достаточно показать, что $\langle f' \rangle = \langle f^t \rangle$ для любой подалгебры $\langle f \rangle$, где $\langle f' \rangle = \alpha(\langle f \rangle)$.

Случай 1: $|\operatorname{Im} f| = 1$. Тогда $\langle f \rangle = \langle f^t \rangle = \mathbb{P}^\vee$ и $\langle f' \rangle = \mathbb{P}^\vee$ в силу (*). Значит, $\langle f' \rangle = \langle f^t \rangle$.

Случай 2: $|\operatorname{Im} f| \ge 3$. Тогда по предложению 11 равенства $[f'] = [f^t]$ и $\langle f' \rangle = \langle f^t \rangle$ равносильны. Кроме того, $[f'] = [f^t]$ в силу (50). Значит, $\langle f' \rangle = \langle f^t \rangle$.

Случай 3: $|\operatorname{Im} f| = 2$. Пусть, для определенности, $\langle f \rangle \subseteq spb\mathrm{Max}_x$. Тогда $f(x) > f(y)$ для некоторой точки $y \in X$. Выберем точку $z \in X \backslash \{x, y\}$ и функцию $\lambda \in U^\vee(X)$ такую, что $\lambda(y) > \lambda(x) > \lambda(z)$. Положим

$$U = \left\{ w \in X \colon \lambda(w) \ge \frac{\lambda(x) + \lambda(z)}{2} \right\}, \quad V = \left\{ w \in X \colon \lambda(w) \le \frac{\lambda(x) + \lambda(y)}{2} \right\}.$$

Тогда U и V — замкнутые множества, причем

$$U \cup V = X, \quad x, y \in U, \quad z \notin U, \quad x, z \in V, \quad y \notin V. \tag{51}$$

Рассмотрим произвольные функции $u, v \in spbU^{\vee}(X)$ такие, что

$$u, v \leq 1,\ u|_U = v|_V = 1,\ u(z) \notin \left\{\frac{f(x)}{f(z)}, \frac{f(y)}{f(z)}\right\},\ v(y) \notin \left\{\frac{f(x)}{f(y)}, \frac{f(z)}{f(y)}\right\}. \tag{52}$$

Положим $g = uf$ и $h = vf$. Тогда $f = g \vee h$, $g, h \in spb\mathrm{Max}_x$ и $|\operatorname{Im} g|, |\operatorname{Im} h| \geq 3$, так как $f, u, v \in spb\mathrm{Max}_x$ и в силу (51), (52)

$$\begin{aligned} &f \vee g = uh \vee vh = (u \vee v)h = 1 \cdot h = h,\\ &g(x) = f(x), \quad g(y) = f(y), \quad g(z) \notin \{f(x), f(y)\},\\ &h(x) = f(x), \quad h(z) = f(z), \quad h(y) \notin \{f(x), f(z)\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\langle f \rangle \subseteq \langle g \rangle \vee \langle h \rangle, \quad \langle g \rangle, \langle h \rangle \subseteq spb\mathrm{Max}_x, \quad |\operatorname{Im} g|, |\operatorname{Im} h| \geq 3. \tag{53}$$

Докажем, что для любой подалгебры $\langle l \rangle$

$$(\langle l \rangle \subseteq \langle g \rangle \vee \langle h \rangle,\ [l] = [f]) \Longrightarrow \langle l \rangle \subseteq \langle f \rangle. \tag{54}$$

Пусть $\langle l \rangle \subseteq \langle g \rangle \vee \langle h \rangle$. Поскольку $g, h \in spb\mathrm{Max}_x$, имеем $l \in spb\mathrm{Max}_x$. Не умаляя общности, будем считать, что $f(x) = g(x) = h(x) = l(x) = 1$. Тогда $l \leq f$, так как $f = g \vee h$ и $l \leq g \vee h$ по предложению 42. Поэтому если $[l] = [f]$, то (см. предложение 11) $l = f = 1$ на $\mathrm{Max}\, l = \mathrm{Max}\, f$ и $l \leq f$ на $\mathrm{Min}\, l = \mathrm{Min}\, f$. Значит, $\langle l \rangle \subseteq \langle f \rangle$ по предложению 39. Импликация (54) доказана.

Поскольку $|\operatorname{Im} g|, |\operatorname{Im} h| \geq 3$, имеем $\langle g' \rangle = \langle g^t \rangle$ и $\langle h' \rangle = \langle h^t \rangle$ (см. случай 2), где $\langle g' \rangle = \alpha(\langle g \rangle)$ и $\langle h' \rangle = \alpha(\langle h \rangle)$. Отсюда $\langle f^t \rangle \subseteq \langle g' \rangle \vee \langle h' \rangle$, так как $f^t = (g \vee h)^t = g^t \vee h^t$. Кроме того, $[f^t] = [f']$ в силу (50). Значит, $\langle f^t \rangle \subseteq \langle f' \rangle$ в силу (54).

Далее, $\langle f' \rangle, \langle g' \rangle, \langle h' \rangle \subseteq spb\mathrm{Max}_x$, так как $\alpha(spb\mathrm{Max}_x) = spb\mathrm{Max}_x$ в силу (*) и $\langle f \rangle, \langle g \rangle, \langle h \rangle \subseteq spb\mathrm{Max}_x$. Не умаляя общности, будем считать, что $f'(x) = g'(x) = h'(x) = 1$. Тогда $f' \leq g' \vee h' = f^t$ в силу предложения 42 и (53), т. е. $f' = f^t = 1$ на $\mathrm{Max}\, f$ и $f' \leq f^t$ на $\mathrm{Min}\, f$. Отсюда $\langle f' \rangle \subseteq \langle f^t \rangle$ по предложению 39.

Итак, $\langle f^t \rangle \subseteq \langle f' \rangle$ и $\langle f' \rangle \subseteq \langle f^t \rangle$. Значит, $\langle f' \rangle = \langle f^t \rangle$.

References

[1] V. V. Sidorov, *Determinability of Hewitt spaces by the lattices of subalgebras with unit of semifields of continuous positive functions with max-plus*, Lobachevskii J. Math., **38** (2017), 741–750. MR3673288

[2] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of continuous functions*, New York: Springer-Verlag, 1976. MR0407579

[3] I. M. Gelfand, A. N. Kolmogorov, *On rings of continuous functions on topological spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **22**:1 (1939), 11–15.

[4] E. Hewitt, *Rings of real-valued continuous functions. I*, Trans. Amer. Math. Soc., **64**:1 (1948), 45–99. MR26239

[5] E. M. Vechtomov, *The lattice of subalgebras of the ring of continuous functions and Hewitt spaces*, Mat. Zametki, **62**:5 (1997), 687–693. MR1627923

[6] E. M. Vechtomov, V. V. Sidorov, *Determinability of Hewitt spaces by the l attices of subalgebras of semifields of continuous positive functions with max-plus*, Tr. Inst. Mat. i Mech. UrO RAN **21**:3 (2015), 78–88. MR3468091

[7] R. Engelking, *General topology*, Moscow: Mir, 1986. MR862623

Vadim Veniaminovich Sidorov
Vyatka State University,
36, Moskovskaya str.,
Kirov, 610000, Russia
E-mail address: sedoy_vadim@mail.ru