S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1553–1560 (2019) УДК 510.5
DOI 10.33048/semi.2019.16.106 MSC 03D99

ОГРАНИЧЕННО-КОМБИНАТОРНЫЕ МНОЖЕСТВА

Д.И. ИВАНОВ, М.Л. ПЛАТОНОВ

Abstract. This article discusses the issue of classification of their own subsets of $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ by means of partial Boolean functions. For an arbitrary partial Boolean function β defines the notion of β-limited combinatorial set, which is a generalization of the concept of β-combinatorial set [1]. Fully describe the classes of these sets, the relationship between these classes by inclusion.

Keywords: Boolean functions, combinatorial sets, combinatorial-selector sets, limited-combinatorial sets, a sequence of maximal restriction.

1. Введение

Существует ряд подходов к изучению множества $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: алгебраический, теоретико-множественный, топологический и алгоритмический. В каждом случае используются специфические классификации подмножеств множества $\mathbb{N}$, основанные на определённых критериях. Так, например, в рамках алгоритмического подхода наиболее известной является классификация перечислимых множеств. Среди них различают классы вычислимых, простых, креативных и мезоичных множеств. Другой подход к изучению произвольных подмножеств множества $\mathbb{N}$ заключается в их классификации по «сложности». Инструментом для такой классификации служит понятие сводимости. Множество A сводимо к множеству B, если существует алгоритм, который решал бы проблему вхождения элементов для множества A при условии, что есть возможность по мере надобности пользоваться информацией о принадлежности тех или иных чисел из $\mathbb{N}$ множеству B. Такая сводимость в наиболее общем виде называется Тьюринговой ($T-$) сводимостью. Различают и другие, в частности, табличную ($tt-$) сводимость. Множество A tt-сводимо к множеству B

Ivanov, D.I., Platonov, M.L., Limited-combinatorial sets.

© 2019 Иванов Д.И., Платонов М.Л.

Поступила 3 марта 2018 г., опубликована 28 октября 2019 г.

($A \leqslant_{tt} B$), если существует алгоритм, который для каждого $x \in \mathbb{N}$ даёт набор чисел $\langle t_1^x, \ldots, t_{n(x)}^x \rangle$ и булеву функцию (БФ) $\beta_x\big(y_1, \ldots, y_{n(x)}\big)$ такие, что

$$(\forall x)\Bigg(x \in A \Leftrightarrow \beta_x\Big(\chi_B\big(t_1^x\big), \ldots, \chi_B\big(t_{n(x)}^x\big)\Big) = 1\Bigg),$$

где $\chi_B(t)$ — характеристическая функция множества B:

$$\chi_B(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in B; \\ 0, & \text{если } t \notin B. \end{cases}$$

Если положить $A =_{tt} B \Leftrightarrow A \leqslant_{tt} B \wedge B \leqslant_{tt} A$, то tt-сводимость разбивает множество подмножеств $\mathbb{N}$ на классы эквивалентности, называемые tt-степенями.

Ещё одна классификация, использующая булевы функции и эффективную вычислимость была предложена А. Н. Дёгтевым. В работе [8] К. Джокуш ввёл понятие полурекурсивного множества, именно, подмножество A множества $\mathbb{N}$ называется полурекурсивным, если существует всюду определённая вычислимая функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что

$$(\forall x)(\forall y)\Bigg(f(x,y) \in \{x,y\} \wedge \Big(\big(\chi_A(x) \vee \chi_A(y)\big) = 1 \Leftrightarrow f(x,y) \in A\Big)\Bigg),$$

где χ_A — характеристическая функция множества A. По аналогии А. Н. Дёгтев определил понятие *β-комбинаторных* [1] множеств, предложив использовать в определении произвольную булеву функцию (БФ): множество A называется β-комбинаторным, где β — произвольная n-местная БФ, если существует n-местная всюду определенная вычислимая функция f такая, что

$$(\forall x_1, \ldots, x_n)\Big(\beta\big(\chi_A(x_1), \ldots, \chi_A(x_n)\big) = 1 \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in A\Big).$$

Если же потребовать, чтобы функция f была селекторной, т. е.

$$(\forall x_1, \ldots, x_n)\big(f(x_1, \ldots, x_n) \in \{x_1, \ldots, x_n\}\big),$$

то придём к понятию *β-селекторного* [1, 4] (*β-комбинаторно-селекторного*) множества. Заменив в определении β-комбинаторно-селекторного множества эквивалентность на импликацию, получим определение *β-импликативно-селекторного* множества [3]. Обобщением данных понятий послужили работы [2, 5-7, 9, 10], где в определении в качестве f используется селекторная вычислимая (частичная) функция. Таким образом, были определены и изучены *слабо β-импликативно-селекторные* и *слабо β-комбинаторно-селекторные* множества.

Представленная работа обобщает понятие β-комбинаторных множеств посредством замены всюду определённой БФ на частичную. Она посвящена описанию классов этих множеств и их соотношению по включению.

2. Основные результаты.

Будем говорить, что БФ β является *частичной*, если хотя бы на одном из наборов $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \{0,1\}^n$ значение БФ β не определено ($\beta(\theta_1, \ldots, \theta_n) \uparrow$).

Подмножества $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, о которых далее идёт речь, полагаем отличными от $\varnothing$ и $\mathbb{N}$.

Определение 1. *Множество $A \subseteq \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ назовём β-ограниченно-комбинаторным (β-ОК), если существует n-местная частично вычислимая функция $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ такая, что для всех $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ выполнены условия:*

(i) $f(x_1, \ldots, x_n) \uparrow \Leftrightarrow \beta\big(\chi_A(x_1), \ldots, \chi_A(x_n)\big) \uparrow$,

(ii) $f(x_1, \ldots, x_n) \in A \Leftrightarrow \beta\big(\chi_A(x_1), \ldots, \chi_A(x_n)\big) = 1$,

где χ — характеристическая функция множества A. В этом случае говорим, что A является β-ОК множеством с соответствующей частично вычислимой функцией f.

Назовём частичную БФ *допустимой*, если она не является нигде не определённой и отлична от функций β^0 и β^1, где

$$\beta^\theta(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 - \theta, & \text{если } x_1 = \ldots = x_n = \theta \in \{0, 1\}; \\ \uparrow, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим через $\mathbf{E_1}$ класс перечислимых множеств, $\mathbf{E_0} = \{X \colon X = \mathbb{N} \setminus Y, Y \in \mathbf{E_1}\}$ класс множеств, имеющих перечислимое дополнение, и $\mathbf{R} = \mathbf{E_0} \cap \mathbf{E_1}$ — класс всех вычислимых множеств.

Доказательству основного результата предпошлём ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Всякое вычислимое множество является β-ОК множеством для любой частичной БФ β.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathbf{R}$ и β — произвольная допустимая n-местная частичная БФ. Тогда A является β-ОК множеством с частично вычислимой функцией

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} a_\theta, & \text{если } \beta(\chi_A(x_1), \ldots, \chi_A(x_n)) = \theta \in \{0, 1\}; \\ \uparrow, & \text{если } \beta(\chi_A(x_1), \ldots, \chi_A(x_n)) \uparrow, \end{cases}$$

где a_θ — фиксированные элементы такие, что:

$$a_\theta \in \begin{cases} A, & \text{если } \theta = 1; \\ \mathbb{N} \setminus A, & \text{если } \theta = 0. \end{cases}$$

□

Лемма 2. *Для любой допустимой частичной БФ β, каждое β-ОК множество является перечислимым или имеет перечислимое дополнение.*

Доказательство. Пусть β — n-местная допустимая частичная БФ, A — β-ОК множество с соответствующей частично вычислимой функцией f, a_0 и a_1 — фиксированные элементы из $\mathbb{N} \setminus A$ и A соответственно. Очевидно, найдутся набор $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ и $i : 1 \leqslant i \leqslant n$ такие, что значение $\beta(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_n) \uparrow$, а $\beta(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, 1 - \theta_i, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_n) \downarrow$ (определено). Каждой переменной x_j, $j \neq i$, частично вычислимой функции f припишем значение a_0 (a_1), если $\theta_j = 0$ ($\theta_j = 1$ соответственно), получив тем самым частичную вычислимую функцию $g(x_i)$. Тогда множество $B = \{x \colon g(x) \downarrow\}$ будет перечислимым. Если $\theta_i = 0$ ($\theta_i = 1$), то $B = A$ ($B = \mathbb{N} \setminus A$ соответственно). В результате получим, что $A \in \mathbf{E_1}$ или $A \in \mathbf{E_0}$.

□

Если в определении β-ОК множества потребовать, чтобы частичная булева функция β была всюду определённой, то соответствующая ему функция станет всюду определённой вычислимой функцией и придём к понятию β-комбинаторных множеств. Они описаны в статье [1], центральным результатом которой является следующее утверждение: для любой БФ $\beta \neq 0, 1$ семейство всех β-комбинаторных множеств совпадает с одним из следующих классов:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \{X : X \subseteq \mathbb{N}\};\\
\mathbf{A} &= \{X : X =_m \mathbb{N} \setminus X\};\\
\mathbf{L} &= \{X : X =_m X^l\}, \text{где } X^l = \{x : |D_x \cap X| \equiv 1 \pmod 2\};\\
\mathbf{C} &= \{X : X =_m X^\omega\}, \text{где } X^\omega = \{x : D_x \subseteq X\};\\
\mathbf{D} &= \{X : X =_m {}^\omega X\}, \text{где } {}^\omega X = \{x : D_x \cap X \neq \varnothing\};\\
\mathbf{P} &= \{X : X =_m {}^\omega(X^\omega)\};\\
\mathbf{T} &= \{X : X =_m X^{tt}\}, \text{где } X^{tt} = \{x : X \vDash_{tt} tt(x)\}.
\end{aligned}$$

Здесь D_n — конечное множество с каноническим номером n, $X \neq \varnothing, \mathbb{N}$ и $X =_m Y$ означает m-эквивалентность множеств X и Y. Для получения этого результата было показано, что в определении β-комбинаторного множества можно считать, что β является одной из БФ последовательности

$$x, \overline{x}, x + y, x \vee y, x \wedge y, (x \wedge y) \vee z, x \to y \tag{1}$$

Этот результат следует из того факта [11], что замкнутых классов БФ, содержащих константы 0 и 1, и отличных от $\{0, 1\}$, всего семь, которые совпадают с замыканиями классов $\{1, 0, \alpha\}$, где α — БФ из последовательности (1).

Рассмотрим произвольную частичную булеву функцию $\beta(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n)$. Может оказаться, что после замены некоторых переменных (например, $x_1, \ldots, x_l$, $l \in \{1, \ldots, n-1\}$) на константы $\theta_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, \ldots, l\}$, полученное сужение по переменным $x_{l+1}, \ldots, x_n$ на наборе констант $(\theta_1 \ldots, \theta_l)$

$$\beta_1(x_{l+1}, \ldots, x_n) = \beta(x_{l+1}, \ldots, x_n)[\theta_1, \ldots, \theta_l] = \beta(\theta_1, \ldots, \theta_l, x_{l+1}, \ldots, x_n)$$

станет всюду определённой булевой функцией.

Определение 2. *Назовём сужение максимальным, если оно всюду определённое и для любого $i \in \{1, \ldots, l\}$, булева функция*

$$\beta_{1_i}(x_i, x_{l+1}, \ldots, x_n) = \beta(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, x_i, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_l, x_{l+1}, \ldots, x_n)$$

становится частичной БФ.

Лемма 3. *Если $\beta_1(x_{l+1}, \ldots, x_n) = \beta(\theta_1, \ldots, \theta_l, x_{l+1}, \ldots, x_n)$ — максимальное сужение булевой функции β, и существуют $i, j \in \{1, \ldots, l\}, i \neq j$, такие, что $\theta_i = 1 - \theta_j$, то семейство β-ОК множеств совпадает с классом* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Рассмотрим максимальное сужение булевой функции $\beta(\theta_1, \ldots, \theta_l, x_{l+1}, \ldots, x_n)$. Тогда для любого $i \in \{1, \ldots, l\}$ существует такой набор $\theta_{l+1}, \theta_{l+2}, \ldots, \theta_n$, что $\beta(\theta_1, \ldots, 1 - \theta_i, \ldots, \theta_l, \theta_{l+1}, \ldots, \theta_n) \uparrow$, а, следовательно (что следует из доказательства леммы 2), любое β-ОК множество является перечислимым, если $\theta_i = 1$, или имеет перечислимое дополнение, если $\theta_i = 0$. Если же существуют $i, j \in \{1, \ldots, l\}, i \neq j$, такие, что $\theta_i = 1 - \theta_j$, то β-ОК

множество будет перечислимым и иметь перечислимое дополнение, т. е. будет вычислимым.

□

Для каждой частичной булевой функции β рассмотрим всевозможные её максимальные сужения:

$$\begin{array}{l}\beta_1(x_{11},x_{12},\dots,x_{1k_1}) = \beta(x_{11},x_{12},\dots,x_{1k_1})[\theta_{1(k_1+1)},\theta_{1(k_1+2)},\dots,\theta_{1n}], 1 \leqslant k_1 < n,\\ \beta_2(x_{21},x_{22},\dots,x_{2k_2}) = \beta(x_{21},x_{22},\dots,x_{1k_2})[\theta_{2(k_2+1)},\theta_{2(k_2+2)},\dots,\theta_{2n}], 1 \leqslant k_2 < n,\\ \dots\\ \beta_r(x_{r1},x_{r2},\dots,x_{rk_r}) = \beta(x_{r1},x_{r2},\dots,x_{rk_r})[\theta_{r(k_r+1)},\theta_{r(k_r+2)},\dots,\theta_{rn}], 1 \leqslant k_r < n.\end{array}$$

(*последовательность максимальных сужений* булевой функции β).

Определение 3. *Назовём частичную БФ разложимой, если для каждого i ($1 \leqslant i \leqslant r$) функции β_i последовательности максимальных сужений получены сужением функции β на наборах одних и тех же констант $(\theta,\dots,\theta)$, $\theta \in \{0,1\}$, т.е.*

$$\begin{array}{l}\beta_1(x_{11},x_{12},\dots,x_{1k_1}) = \beta(x_{11},x_{12},\dots,x_{1k_1})[\theta,\theta,\dots,\theta], 1 \leqslant k_1 < n,\\ \beta_2(x_{21},x_{22},\dots,x_{2k_2}) = \beta(x_{21},x_{22},\dots,x_{1k_2})[\theta,\theta,\dots,\theta], 1 \leqslant k_2 < n,\\ \dots\\ \beta_r(x_{r1},x_{r2},\dots,x_{rk_r}) = \beta(x_{r1},x_{r2},\dots,x_{rk_r})[\theta,\theta,\dots,\theta], 1 \leqslant k_r < n,\end{array}$$

а в остальных случаях $\beta\uparrow$.

Лемма 4. *Если допустимая частичная булева функция не является разложимой, то либо она совпадает с оной из функций $\widehat{\beta}_\theta$ ($\theta = 0,1$), либо любое β-ОК множество A будет вычислимым.*

Доказательство. Заметим, что любая частичная БФ β определена на одном и только одном наборе констант $(\theta,\dots,\theta)$, $\theta \in \{0,1\}$, иначе β-ОК множество A попадёт в класс $\mathbf{R}$. Действительно, если существует набор $(1,\dots,1,\dots,0,\dots,0)$, такой что $\beta(1,\dots,1,\dots,0,\dots,0)\downarrow$, то заменим одно из значений переменной, принимающей 0 на 1. Для нового набора, если значение БФ будет не определено, то $A \in \mathbf{E_0}$ (из доказательства леммы 2). В противном случае, снова меняем 0 на 1 и т. д. В результате получим, что либо $A \in \mathbf{E_0}$, либо $\beta(1,\dots,1,\dots,1,\dots,1)\downarrow$. Аналогично, меняя 1 на 0, получим, что либо $A \in \mathbf{E_1}$, либо $\beta(0,\dots,0,\dots,0,\dots,0)\downarrow$. Таким образом, либо $A \in \mathbf{R}$, либо, по крайней мере, одно из значений $\beta(1,\dots,1,\dots,1,\dots,1)$ или $\beta(0,\dots,0,\dots,0,\dots,0)$ определено. Если же предположить, что на обоих наборах $(\theta,\dots,\theta)$, $\theta \in \{0,1\}$ БФ β определена, взяв $\beta(1,\dots,1,\dots,0,\dots,0)\uparrow$ и, используя аналогичную схему доказательства, получим, что $A \in \mathbf{E_0}$ и $A \in \mathbf{E_1}$, т. е. $A \in \mathbf{R}$.

Пусть теперь $\beta(\theta,\dots,\theta)\downarrow$. Если БФ не является разложимой и отлична от функций $\widehat{\beta}_\theta$, то существует набор переменных $x_{i_1}, x_{i_2},\dots,x_{i_k}$, не входящих ни в одно из максимальных сужений, такой, что значение функции β при

$$x_{i_1} = 1-\theta, x_{i_2} = 1-\theta,\dots,x_{i_k} = 1-\theta, 1 \leqslant k < n,$$

будет определено. Будем рассматривать этот фиксированный набор констант.

Предположим, что переменная x_{i_1} входит в одно из сужений функции β на наборе соответствующих констант из этого набора. Очевидно, что в этом случае $k > 1$. Если это максимальное сужение по одной переменной, то по лемме

3 семейство β-ОК множеств совпадает с классом $\mathbf{R}$. Иначе, пусть, например, переменная x_t также участвует в этом максимальном сужении на наборе оставшихся констант. Тогда, если $x_t \in \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$, то $k > 2$ и любое β-ОК множество A попадёт в класс $\mathbf{R}$ (лемма 3). Если же $x_t \notin \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$, то $n - k \neq 1$ (т.к. иначе $\beta(1-\theta, \ldots, 1-\theta)\downarrow$) и в этом случае по лемме 3 $A \in \mathbf{R}$. Рассуждая аналогично, получим, что семейство β-ОК множеств совпадает с классом $\mathbf{R}$. В противном случае придём к противоречию с тем, что переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ не входят одновременно ни в одно из максимальных сужений.

Если же ни одна из переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ не входит ни в одно из максимальных сужений функции β с соответствующими константами из фиксированного набора, то заменив значение переменной x_{i_1} на θ, получим, что значение функции β для этого набора не определено, и β-ОК множество $A \in \mathbf{E_{1-\theta}}$. Заменим значение переменной x_{i_2} на θ. Для нового набора если значение БФ будет определено, то $A \in \mathbf{E}_\theta$, а значит $A \in \mathbf{R}$. В противном случае x_{i_3} меняем на θ и т.д. На некотором шаге получим $A \in \mathbf{R}$ или же придём к противоречию с тем, что $\beta(\theta, \ldots, \theta)\downarrow$.

□

Лемма 5. *Для булевых функций*

$$\widehat{\beta}_\theta(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \begin{cases} \theta, & \text{если } \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta \in \{0,1\}; \\ \uparrow, & \text{иначе,} \end{cases}$$

семейство β-ОК множеств совпадает с классом $\mathbf{E}_\theta$.

Доказательство. В одну сторону утверждение следует их доказательства леммы 2.

Обратно, пусть B — перечислимое множество (дополнение перечислимого множества), тогда, перечисляя множество B ($\mathbb{N} \setminus B$) определим частично вычислимую функцию g:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1, \ldots, x_n \text{ вычислились в } B\ (\mathbb{N} \setminus B); \\ \uparrow, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Тогда B является β-ОК множеством с соответствующей частично вычислимой функцией $g(x_1, \ldots, x_n)$. □

Лемма 6. *Для любой разложимой частичной БФ β, семейство всех β-ОК множеств совпадает с одним из классов:*

$$\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{C}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{D}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{P}, \theta \in \{0,1\}.$$

Доказательство. Пусть A — β-ОК множество для разложимой частичной БФ β с соответствующей частично вычислимой функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ — последовательность максимальных сужений функции β. Так как $\beta_1(\chi_A(x_{l+1}), \ldots, \chi_A(x_n)) = \beta(\theta, \ldots, \theta, \chi_A(x_{l+1}), \ldots, \chi_A(x_n))$ — всюду определённая БФ, то вычислимая функция $f_1(x_{l+1}, \ldots, x_n) = f(a^\theta, \ldots, a^\theta, x_{l+1}, \ldots, x_n)$ станет всюду определённой, где a^θ — фиксированный элемент, такой что

$$a^\theta \in \begin{cases} A, & \text{если } \theta = 1; \\ \mathbb{N} \setminus A, & \text{если } \theta = 0, \end{cases}$$

а множество A окажется β_1-комбинаторным с соответствующей функцией f_1.

Учитывая результат, полученный в работе [1], можно считать, что β_1 — одна из БФ последовательности (1). С другой стороны, по лемме 2 $A \in \mathbf{E}_\theta$, где

$\theta \in \{0,1\}$. Поэтому, если β_1 равна x, $x \wedge y$, $x \vee y$ или $(x \wedge y) \vee z$, то A принадлежит одному из классов $\mathbf{E}_\theta$, $\mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{C}$, $\mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{D}$, $\mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{P}$, $\theta \in \{0,1\}$. Если же β_1 есть $\overline{x}$, $x+y$ или $x \to y$, то $A =_m \mathbb{N} \setminus A$, и, поэтому $A \in \mathbf{R}$ [1], то есть, учитывая результат леммы 1, класс β-ОК множеств совпадает с классом разрешимых множеств.

Аналогично показывается, что множество A является также $\beta_2, \ldots, \beta_r$-комбинаторным множеством с соответствующими всюду определенными вычислимыми функциями $f_2, \ldots, f_r$, то есть $A \in K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_r$, где

$$K_i \in \{\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{C}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{D}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{P}\}, \theta \in \{0,1\}, i \in \{1, \ldots, r\},$$

а, стало быть, A принадлежит одному из классов:

$$\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{C}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{D}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{P}, \theta \in \{0,1\}.$$

Обратно, возьмём произвольное множество B из того же класса, что и множество A, тогда $B \in K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_r$, то есть $B \in K_j$, для любого $j \in \{1, \ldots, r\}$. Значит, B является β_j-комбинаторным множеством с соответствующей всюду определённой вычислимой функцией g_j. Перечисляя множество B ($\mathbb{N} \setminus B$), если $B \in \mathbf{E}_1(\mathbf{E}_0)$, доопределим каждую из функций g_j до n-местных частично вычислимых функций g_j^1 следующим образом: $g_j^1 = g_j$, если значения всех переменных, входящих в g_j^1, но не входящих в g_j, вычислятся в B ($\mathbb{N} \setminus B$), и $g_j^1 \uparrow$ в противном случае.

Далее, будем одновременно вычислять функции $g_j^1(x_1, \ldots, x_n)$, $j \in \{1, \ldots, r\}$. Если для некоторого набора значений переменных $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ первым вычислилось значение $g_k^1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, то положим $g(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = g_k^1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если ни одно из значений $g_j^1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ не вычислилось, считаем $g(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \uparrow$. Тогда множество B будет β-ОК множеством с соответствующей частично вычислимой функцией $g(x_1, \ldots, x_n)$. □

Из вышесказанного следует основной результат статьи:

Теорема 1. *Для любой допустимой частичной БФ β, семейство всех β-ОК множеств совпадает с одним из классов:*

$$\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{C}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{D}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{P}, \theta \in \{0,1\}.$$

□

3. Заключение.

Таким образом, учитывая основные результаты, выраженные в формулировках вышеуказанных лемм и теоремы, а так же тот факт, что $\mathbf{E_0} \cap \mathbf{E_1} = \mathbf{R}$, $\mathbf{C} \cap \mathbf{D} = \mathbf{P}$ [1], получены соотношения между классами β-ОК множеств по включению, которые можно условно изобразить на следующей диаграмме включения классов:

Из диаграммы видно, что классы β-ОК множеств получаются из некоторых классов β-комбинаторных множеств с определёнными ограничениями, а именно, β-ОК множествами могут быть лишь перечислимые или коперечислимые множества. Этот факт и стал определяющим при выборе названия рассматриваемых множеств.

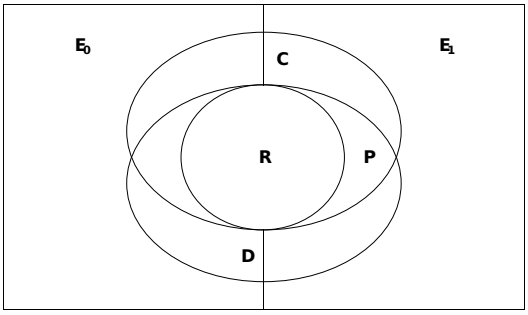

Рис. 1. Диаграмма включения классов β–ограниченно-комбинаторных множеств.

References

[1] Degtev A.N., *R*ecursive-combinatorial properties of subsets of the natural numbers, Algebra and Logic, **29**:3 (1990), 204–210. MR1118926

[2] Degtev A.N., *Weak combinatorial selective properties of subsets of the natural numbers*, Algebra and Logic, **29**:4 (1990), 280–286. MR1155470

[3] Degtev A.N.,*Implicatively selector sets*, Algebra and Logic, **35**:2 (1996), 80–85. MR1444649

[4] Degtev A.N., *Almost combinatorial selector sets*, Mathematical notes, **68**:6 (2000), 721–723. MR1835183

[5] Degtev A.N., Ivanov D.I., *Weakly combinatorial selector sets*, Algebra and Logic, **37**:6 (1998), 357–362. MR1680420

[6] Degtev A.N., Ivanov D.I., *Weakly implicatively selective sets of dimension* 3, Discrete Mathematics and Applications, **9**:4 (1999), 395–402. MR1739074

[7] Degtev A.N., Ivanov D.I., *About the classes of linear and self-dual weakly implicative selector sets*, Tyumen State University Herald, **4** (2004), 238–241 [in Russian].

[8] Jockusch, C. G. Jr., *Semirecursive sets and positive reducibility*, Transactions of the American Mathematics Society, **131**:2 (1968), 420–436. MR220595

[9] Ivanov D.I., *Weakly implicative selector sets*, Russian Mathematics, **50**:9 (2006), 27–31. Zbl 07092351

[10] Ivanov D.I., *Weakly combinatorial-selector sets*, Russian Mathematics, **50**:11 (2006), 20–23 (2006).

[11] Yablonskij S. V., Gavrilov G. P., Kudryavtsev V. G., *Functions of the Algebra of Logic and Post Classes*, Moscow: Nauka, 1966 [in Russian]. Zbl 0171.27701

Dmitry Ivanovich Ivanov
Tyumen State University,
6, Volodarskogo str.,
Tyumen, 625003, Russia
E-mail address: i1off@list.ru

Maxim Lyudvigovich Platonov
Tyumen State University,
6, Volodarskogo str.,
Tyumen, 625003, Russia
E-mail address: platonovmaximlyudvigovich@gmail.ru