S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1567–1580 (2019) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2019.16.108 MSC 35Q30, 35C10, 35A10

ЛУЧЕВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И ВОПРОСЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Ю.Е.АНИКОНОВ, Н.Б. АЮПОВА, М.В.НЕЩАДИМ

Abstract. We consider an equation by Navier-Stokes type and investigate some questions of identification of solutions and coefficients on the base of analytical representation of solution, in particular by representation of solution in ray series form.

Keywords: Navier-Stokes equations, identification problems, ray expansion, Cauchy-Kovalevskaya theorem

1. Введение

Аналитические и конструктивные методы исследования позволяют не только доказывать существование решения исследуемой задачи, но часто приводят и к конструктивному построению решения либо к некоторому приближенному выражению для решения. К этому направлению относится построение функционально-инвариантных решений гиперболических уравнений [1],[2], аналитические представления решений и коэффициентов параболических уравнений [3], представление решения и коэффициента уравнения Штурма-Лиувилля с применением в обратных задачах теории рассеяния (см.[4], [5]), построение гармонических и других потенциалов для вычисления решений (скорости) и коэффициентов (давления) системы уравнений газовой динамики и т.п. (см. [6]–[8]), задачи идентификации нескольких коэффициентов [9], [10].

Представление решений дифференциальных уравнений в виде $w = F(U(x,t))$, где $F(y)$ периодическая функция, а $U(x,t)$ — фазовая функция,

Anikonov, Yu.E., Ayupova, N.B., Neshchadim, M.V., Ray expansions and identification questions for Navie-Stockes equations.

© 2019 Аниконов Ю.Е., Аюпова Н.Б., Нещадим М.В.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5., проект N 0314-2016-0011 и РФФИ N 18-01-00057.

Поступила 25 марта 2019 г., опубликована 31 октября 2019 г.

широко используется при изучении нелинейных уравнений (см. [11]). Представление решения в виде $w = F(U)$, где $U = x - vt$, использовано в классической работе А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского, Н.С. Пискунова [12] (см. также [13], [14]) для качественного исследования модели типа реакция-диффузия и широко используется в математической биологии. Также отметим построение точных решений нелинейных систем эллиптических уравнений в виде $w_j(x) = F_j(v(x))$, $j = 1, ..., m$, где $x = (x_1, ..., x_n)$, $v(x)$ — произвольная гармоническая функция, а вектор $F(s) = (F_1, ..., F_m)$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений [15]. В книге М.М. Лаврентьева, К.Г. Резницкой, В.Г. Яхно [16] для решения уравнения теплопроводности получена формула, и эта формула использована для решения обратной задачи — нахождения неизвестного коэффициента. В задачах идентификации динамических систем предпочтительно иметь явные формулы для решений, содержащие параметры, которые нужно конкретизировать (см. Л. Льюнг [17]). Для многомерных обратных задач также желательно иметь представления решений и коэффициентов дифференциальных уравнений, которые содержали бы произвольные функции одного или многих переменных.

Исходя из сказанного, круг задач, связанных с поиском новых представлений решений и коэффициентов уравнений математической физики, построением многомерных аналогов классических дифференциально-алгебраических преобразований и их использованием для построения решений и коэффициентов уравнений математической физики с учетом начально-краевой информации, нелинейных задачах управления перевода субстанции из одного состояния в другое при наличии краевой информации, является важным и актуальным.

В данной работе предлагаются различные идентификационные способы исследования решений и коэффициентов уравнений типа Навье-Стокса путем поиска новых представлений. При этом основным способом изучения рассматриваемых уравнений является сведение к обратной кинематической задаче при зависимости скорости от временного параметра. Появление изученных обратных кинематических задач сейсмики в представлениях решений и коэффициентов уравнений Навье-Стокса является важным элементом исследования. Рассмотрены также лучевые разложения и получены соответствующие представления решений и коэффициентов. Кроме того, исследуются вопросы существования и единственности аналитических решений на основе теоремы Коши-Ковалевской.

Приведем краткий обзор результатов, полученных в статье.

Рассматривается система уравнений типа Навье-Стокса.

$$\frac{\partial w^i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{n} w^j \frac{\partial w^i}{\partial x_j} + \frac{1}{\lambda^i} \triangle w^i + P^i + X^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В теореме 1 доказывается, что при определенных аналитических предположениях на коэффициенты P^i, X^i система имеет решение вида $w^i = v^i f^i$, где функции f^i удовлетворяют уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial f^i}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 f^i}{\partial y^2}$. Теорема 2 утверждает (на основе теоремы Коши-Ковалевской), что решение из теоремы 1 в классе аналитических функций существует и единственно при

определенном выборе начальных данных. Теорема 3 утверждает, что вышеприведенная система имеет решение при двойственных предположениях на коэффициенты $P^i(x,t)$ и $X^i(x,t)$. Далее в теореме 4 рассматривается обобщение теоремы 1 на функции $w^i = v^i f^i$, где f^i являются решениями параболического уравнения вида $\dfrac{\partial f^i}{\partial t} = A^i \dfrac{\partial^2 f^i}{\partial y^2} - C^i \dfrac{\partial f^i}{\partial y} - B^i f^i$. И, наконец, в теореме 5 формулируется наиболее общий результат для многомерных представлений

$$w^i(x,t) = v^i(x,t) f^i(t, \tau_1^i(x,t), \dots, \tau_m^i(x,t)), \quad i = 1, \dots, n,$$

где функции f^i — решения системы параболических уравнений

$$\frac{\partial f^i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} A_{kl}^i(t,\tau) \frac{\partial^2 f^i(t,y)}{\partial y_k \partial y_l} - \sum_{k=1}^{m} C_k^i \frac{\partial f^i}{\partial y_k} - B^i f^i.$$

В § 3 рассматриваются вопросы существования решения уравнения в виде лучевого ряда $w^i = \sum\limits_{k=0}^{m} v_k^i f_k^i$, где $m \geq 0$ и возможно $m = \infty$, а функции связаны системой равенств

$$\frac{\partial f_k^i}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_k^i}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial f_k^i}{\partial t} = f_{k-1}^i.$$

В предположении на коэффициенты $P^i(x,t)$, $X^i(x,t)$ доказывается, что уравнение имеет решение вида $w^i = \sum\limits_{k=0}^{m} v_k^i f_k^i$.

2. Уравнения для решений и коэффициентов

В области $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha < t < \beta$, переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ и t евклидового пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается система уравнений относительно вектор функции $w(x,t) = (w^1, \dots, w^n)$:

$$\frac{\partial w^i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{n} w^j \frac{\partial w^i}{\partial x_j} + \frac{1}{\lambda^i} \triangle w^i + P^i + X^i, \tag{1}$$

где $\lambda^i(x,t) \neq 0$, $P^i(x,t)$, $X^i(x,t)$ — некоторые достаточно гладкие функции, $i = 1, \dots, n$.

Замечание 1. Если $n = 2, 3$, а $\lambda^i(x,t) = \lambda(x,t)$ не зависит от i, $i = 1, \dots, n$,

$$P^i(x,t) = -\frac{1}{\rho(x,t)} \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

где $\rho(x,t)$ — плотность, $p(x,t)$ — давление, $\lambda(x,t)$ — коэффициент вязкости, $X(x,t) = (X^1, \dots, X^n)$ — векторное поле массовых сил, то система уравнений (1) с условием неразрывности

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} w^j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho w^j) = \nu,$$

где $\nu(x,t)$ — функция источника, является системой уравнений Навье-Стокса относительно скоростей $w(x,t) = (w^1, \dots, w^n)$ частиц газа или жидкости.

Сначала будем искать решение $w(x,t)$ системы (1) в виде

$$w^i(x,t) = v^i(x,t) f^i(t, \tau^i(x,t)), \quad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

где $v^i(x,t)$, $\tau^i(x,t)$ — некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции, а функции $f^i(t,y)$ являются некоторыми решениями параболического уравнения

$$\frac{\partial f^i}{\partial t} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial y^2}. \tag{3}$$

В дальнейшем все рассматриваемые функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми и обладают другими нужными свойствами.

Теорема 1. *Пусть выполнены соотношения* (1) – (3) *и имеют место представления*

$$P^i(x,t) = p^i(x,t) f^i(t,\tau^i(x,t)),$$
$$X^i(x,t) = b^i(x,t)\ \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y}\bigg|_{y=\tau^i(x,t)},$$

с некоторыми функциями $p^i(x,t)$, $b^i(x,t)$, $i=1,\dots,n$ *так, что имеют место равенства типа дифференциальных уравнений — представление решений и коэффициентов*

$$|\mathrm{grad}_x \tau^i(x,t)|^2 = \lambda^i(x,t), \tag{4}$$

$$v^i \frac{\partial \tau^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n v^j f^j(t,\tau^j) v^i \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} = \frac{1}{\lambda^i}\left(2\sum_{j=1}^n \frac{\partial v^i}{\partial x_j}\frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} + v^i \Delta \tau^i\right) + b^i(x,t), \tag{5}$$

$$p^i(x,t) = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n v^j f^j(t,\tau^j)\frac{\partial v^i}{\partial x_j} - \frac{\Delta v^i}{\lambda^i}. \tag{6}$$

Тогда функции (2) *являются решением системы* (1).

Доказательство. В силу представления (2):

$$\frac{\partial w^i}{\partial t} = \frac{\partial v^i}{\partial t} f^i + v^i \frac{\partial f^i}{\partial t} + v^i \frac{\partial \tau^i}{\partial t}\ \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y}\bigg|_{y=\tau^i(x,t)},$$

$$\frac{\partial w^i}{\partial x_j} = \frac{\partial v^i}{\partial x_j} f^i + v^i \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j}\ \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y}\bigg|_{y=\tau^i(x,t)},$$

$$\frac{\partial^2 w^i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 v^i}{\partial x_j^2} f^i + 2\frac{\partial v^i}{\partial x_j}\frac{\partial \tau^i}{\partial x_j}\ \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y}\bigg|_{y=\tau^i(x,t)} + v^i \frac{\partial^2 \tau^i}{\partial x_j^2}\ \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y}\bigg|_{y=\tau^i(x,t)} + v^i\left(\frac{\partial \tau^i}{\partial x_j}\right)^2 \frac{\partial^2 f^i(t,y)}{\partial y^2}\bigg|_{y=\tau^i(x,t)},$$

$$\Delta w^i = \Delta v^i\, f^i + 2\sum_{j=1}^n \frac{\partial v^i}{\partial x_j}\frac{\partial \tau^i}{\partial x_j}\ \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y}\bigg|_{y=\tau^i(x,t)} + v^i \Delta \tau^i\ \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y}\bigg|_{y=\tau^i(x,t)} + v^i |\mathrm{grad}_x \tau^i(x,t)|^2\ \frac{\partial^2 f^i(t,y)}{\partial y^2}\bigg|_{y=\tau^i(x,t)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} w^j \frac{\partial w^i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} v^j f^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial x_j} f^i + v^i \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} \left. \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y} \right|_{y=\tau^i(x,t)} \right)$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} f^j \right) f^i + \left(\sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} f^j \right) v^i \left. \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y} \right|_{y=\tau^i(x,t)}.$$

Подставим найденные выражения в (1):

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} f^i + v^i \frac{\partial f^i}{\partial t} + v^i \frac{\partial \tau^i}{\partial t} \left. \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y} \right|_{y=\tau^i(x,t)}$$
$$= - \left(\sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} f^j \right) f^i - \left(\sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} f^j \right) v^i \left. \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y} \right|_{y=\tau^i(x,t)}$$
$$+ \frac{\Delta v^i}{\lambda^i} f^i + \frac{1}{\lambda^i} \left(2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v^i}{\partial x_j} \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} + v^i \Delta \tau^i \right) \left. \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y} \right|_{y=\tau^i(x,t)}$$
$$+ \frac{v^i}{\lambda^i} |\mathrm{grad}_x \tau^i(x,t)|^2 \left. \frac{\partial^2 f^i(t,y)}{\partial y^2} \right|_{y=\tau^i(x,t)} + P^i + X^i.$$

Соберем коэффициенты при f^i и $\dfrac{\partial f^i}{\partial y}$:

$$v^i \frac{\partial f^i}{\partial t} + \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} f^j - \frac{\Delta v^i}{\lambda^i} \right) f^i$$
$$+ \left(v^i \frac{\partial \tau^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} f^j v^i - \frac{1}{\lambda^i} \left(2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v^i}{\partial x_j} \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} + v^i \Delta \tau^i \right) \right) \left. \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y} \right|_{y=\tau^i(x,t)}$$
$$= \frac{v^i}{\lambda^i} |\mathrm{grad}_x \tau^i(x,t)|^2 \left. \frac{\partial^2 f^i(t,y)}{\partial y^2} \right|_{y=\tau^i(x,t)} + P^i + X^i.$$

С учетом (5), (6) получаем

$$v^i \frac{\partial f^i}{\partial t} + p^i f^i + b^i \left. \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y} \right|_{y=\tau^i(x,t)}$$
$$= \frac{v^i}{\lambda^i} |\mathrm{grad}_x \tau^i(x,t)|^2 \left. \frac{\partial^2 f^i(t,y)}{\partial y^2} \right|_{y=\tau^i(x,t)} + P^i + X^i.$$

В силу (3), (4)

$$p^i f^i + b^i \left. \frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y} \right|_{y=\tau^i(x,t)} = P^i + X^i.$$

В силу представления для X^i и P^i это равенство выполняется тождественно.

Теорема доказана. □

Как непосредственное следствие теоремы Коши–Ковалевской [18] получаем следующую теорему существования

Теорема 2. *Пусть $x_n = z$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ и в некоторой окрестности точки $x' = 0$, $t = 0$ заданны аналитические функции*

1.: $f^i(t,y)$, $b^i(x,t)$, $p^i(x,t)$, $\lambda^i(x,t)$;
2.: $v_0^i(x',t)$, $v_1^i(x',t)$, $\tau_0^i(x',t)$, $\tau_1^i(x',t)$

и имеют место неравенства: $v_0^i(x',t) \neq 0$,

$$\left(\frac{\partial \tau_0^i}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \tau_0^i}{\partial x_{n-1}}\right)^2 + (\tau_1^i)^2 \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда система (4) – (6) *вместе с начальными данными*

$$\begin{cases} v^i\big|_{z=0} = v_0^i(x',t), \\ \dfrac{\partial v^i}{\partial z}\Big|_{z=0} = v_1^i(x',t), \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau^i\big|_{z=0} = \tau_0^i(x',t), \\ \dfrac{\partial \tau^i}{\partial z}\Big|_{z=0} = \tau_1^i(x',t), \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, n$ *имеет единственное аналитическое решение* $(\tau^1, \ldots, \tau^n)$, $(v^1, \ldots, v^n)$ *в некоторой окрестности точки* $z = 0$.

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 3. *Пусть выполнены соотношения* (1) – (3) *и имеют место представления*

$$P^i = p^i(x,t)\,\frac{\partial f^i(t,y)}{\partial y}\bigg|_{y=\tau^i(x,t)}, \quad X^i = b^i(x,t) f^i(t, \tau^i(x,t)),$$

с некоторыми функциями $p^i(x,t)$, $b^i(x,t)$, $i = 1, \ldots, n$ *так, что имеют место равенства типа дифференциальных уравнений — представление решений и коэффициентов*

$$|\mathrm{grad}_x \tau^i(x,t)|^2 = \lambda^i(x,t),$$
$$\frac{\partial v^i}{\partial t} = \frac{\Delta v^i}{\lambda^i} - \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} f^j(t, \tau^j) + b^i(x,t),$$

$$p^i(x,t) = v^i \frac{\partial \tau^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} f^j(t,\tau^j) v^i - \frac{1}{\lambda^i}\left[2\sum_{j=1}^n \frac{\partial v^i}{\partial x_j}\frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} + v^i \Delta \tau^i\right]. \tag{7}$$

Тогда функции (2)*:*

$$w^i(x,t) = v^i(x,t) f^i(t, \tau^i(x,t)), \quad i = 1, \ldots, n,$$

являются решением системы (1) .

Замечание 2. Формулы (6), (7) дают представление для p^i при известных v^i, f^i, τ^i, $i = 1, \ldots, n$, что представляется важным.
Замечание 3. Соотношение $|\mathrm{grad}_x \tau^i(x,t)|^2 = \lambda^i(x,t)$ является основным уравнением обратной кинематической задачи сейсмики поиска функций $\tau^i(x,t)$, $\lambda^i(x,t)$ в зависимости от параметра t. Причем $\tau(x,t)$ может зависеть от дополнительных параметров, например, точек пространства. (Более подробно см. [5], [19]).

Пример 1. Пусть

$$\tau^i(x,t,z) = \lambda^i(t)\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(x_j - z_j - \varphi_j^i(t)\right)^2},$$

$i = 1, \dots, n$, где $\varphi^i_j(t)$ — достаточно гладкие функции, $i, j = 1, \dots, n$, $z \in \mathbb{R}^n$ — фиксированная точка. Если $\lambda^i(t)$, $\varphi^i_j(t)$ известны, то по теореме 1 все сводится к исследованию системы уравнений (5) относительно $v^i(x,t)$. После чего находятся $p^i(x,t)$ по формулам (6), (7). Примеры других формул функции расстояния $\tau(x,t)$ можно найти в [20], [21]. Использование обратных кинематических задач надеемся дать в других работах.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда

$$P^i = \sum_{j=1}^n p^i_{1j} f^j + \sum_{j=1}^n p^i_{2j} \frac{\partial f^j}{\partial y}, \quad X^i = \sum_{j=1}^n b^i_{1j} f^j + \sum_{j=1}^n b^i_{2j} \frac{\partial f^j}{\partial y},$$

предполагая, что существует линейная зависимость функций $\dfrac{\partial^2 f^i}{\partial y^2}$ и f^i, $\dfrac{\partial f^i}{\partial t}$, $\dfrac{\partial f^i}{\partial y}$, $i = 1, \dots, n$.

Справедлива теорема о представлении решений и коэффициентов

Теорема 4. *Пусть*

1.: *$A^i(t,y)$, $B^i(t,y)$, $C^i(t,y)$, $i = 1, \dots, n$ — некоторые функции переменных t, y, $y \in \mathbb{R}^n$;*

2.: *функции $f^i(t,y)$, $i = 1, \dots, n$ — решения уравнений*

$$\frac{\partial f^i}{\partial t} = A^i \frac{\partial^2 f^i}{\partial y^2} - C^i \frac{\partial f^i}{\partial y} - B^i f^i;$$

3.: *функции $\tau^i(x,t)$, $\lambda^i(x,t)$, $v^i(x,t)$, $i = 1, \dots, n$ удовлетворяют соотношениям*

$$|\mathrm{grad}_x \tau^i(x,t)|^2 = \lambda^i(x,t) A^i(t, \tau^i),$$
$$\frac{\partial v^i}{\partial t} - \frac{\Delta v^i}{\lambda^i} = v^i B^i(t, \tau^i(x,t)),$$
$$\frac{\partial \tau^i}{\partial t} - \frac{1}{\lambda^i} \left(2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial \ln v^i}{\partial x_j} \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} + v^i \Delta \tau^i \right) = C^i(t, \tau^i(x,t));$$

4.: *функции $p^i(x,t)$, $b^i(x,t)$, $P^i(x,t)$, $X^i(x,t)$, $i = 1, \dots, n$ определены равенствами*

$$p^i = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} f^j, \quad b^i = v^i \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} f^j,$$

$$P^i = p^i(x,t) f^i(t, \tau^i), \quad X^i = b^i(x,t) \left. \frac{\partial f^i}{\partial y} \right|_{y=\tau^i}.$$

Тогда функции

$$w^i = v^i(x,t) f^i(t, \tau^i(x,t)), \quad i = 1, \dots, n \tag{8}$$

являются решениями системы (1).

Аналогичный результат может быть сформулирован для более общего представления решения $w(x,t)$ в виде:

$$w^i(x,t) = v^i(x,t) f^i(t, \tau^i_1(x,t), \dots, \tau^i_m(x,t)), \quad i = 1, \dots, n, \tag{9}$$

$m \in \mathbb{N}$, при более общих многомерных уравнениях на функции f^i, а именно

Теорема 5. *Пусть*

1.: $A^i_{kl}(t,y^i)$, $B^i(t,y^i)$, $C^i(t,y^i)$, $i=1,\dots,n$ — *некоторые функции переменных* t, $y^i=(y^i_1,\dots,y^i_m)$;

2.: *функции* $f^i(t,y^i)$, $i=1,\dots,n$ — *решение системы*

$$\frac{\partial f^i}{\partial t}=\sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^m A^i_{kl}(t,\tau)\frac{\partial^2 f^i(t,y)}{\partial y_k\partial y_l}-\sum_{k=1}^m C^i_k\frac{\partial f^i}{\partial y_k}-B^i f^i;$$

3.: *функции* $\tau^i_k(x,t)$, $k=1,\dots,m$, $\lambda^i(x,t)$, $v^i(x,t)$, $i=1,\dots,n$ *удовлетворяют соотношениям*

$$<\nabla\tau^i_k,\nabla\tau^i_l>=\lambda^i A^i_{kl}(t,\tau),$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial t}-\frac{\Delta v^i}{\lambda^i}=v^iB^i(t,\tau),$$

$$v^i\frac{\partial\tau^i_k}{\partial t}-\frac{2}{\lambda^i}\sum_{j=1}^n\frac{\partial v^i}{\partial x_j}\frac{\partial\tau^i_k}{\partial x_j}-\frac{v^i\Delta\tau^i_k}{\lambda^i}=v^iC^i_k(t,\tau);$$

4.: *функции* $p^i(x,t)$, b^i_k, $P^i(x,t)$, $X^i(x,t)$, $i=1,\dots,n$ *определены равенствами*

$$p^i(x,t)=\sum_{j=1}^n f^jv^j\left.\frac{\partial v^i}{\partial x_j}\right|_{y=\tau},\quad b^i_k(x,t)=v^i\sum_{j=1}^n v^jf^j\left.\frac{\partial\tau^i_k}{\partial x_j}\right|_{y=\tau},$$

$$P^i=p^i(x,t)f^i(t,\tau^i);\quad X^i=\sum_{k=1}^m b^i_k(x,t)\left.\frac{\partial f^i}{\partial y_k}\right|_{y=\tau}.$$

Тогда функции (9) *являются решениями системы* (1).

Доказательство теорем 4 (соответственно 5) аналогично доказательству теоремы 1 и состоит в непосредственной проверке того, что функции w^i, заданные формулой (8) (соответственно (9)) удовлетворяют системе (1) в силу предположений 1 – 4 соответствующих теорем.

Замечание 4. На основе теоремы Коши–Ковалевской для систем уравнений теорем 3 – 5 могут быть сформулированы теоремы существования, аналогичные теореме 2. Подробности опускаем.

3. Лучевой ряд

В данном параграфе рассматривается применение разложения решения в лучевой ряд [22] – [24] для исследования уравнения (1). По поводу применения лучевого ряда для исследования различных уравнений см., например, [25] – [30].

Будем искать решение уравнения (1) в виде формального лучевого ряда

$$w^i(x,t)=\sum_{k=0}^m v^i_k(x,t)f^i_k(t,\tau^i(x,t)),\tag{10}$$

где $m\ge 0$, возможно $m=\infty$, $v^i_k(x,t)$, $f^i_k(x,t)$, $\tau^i(x,t)$ — некоторые достаточно гладкие функции своих переменных и ряд (10) сходится вместе с производными $\dfrac{\partial w^i}{\partial t}$, $\dfrac{\partial w^i}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 w^i}{\partial x_j^2}$, Δw^i.

Подставим функции (10) в уравнение (1)

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\partial v_k^i}{\partial t}f_k^i+v_k^i\frac{\partial f_k^i}{\partial t}+v_k^i\frac{\partial f_k^i}{\partial y}\frac{\partial \tau^i}{\partial t}\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m}v_k^jf_k^j\right)\sum_{l=0}^{m}\left(\frac{\partial v_l^i}{\partial x_j}f_l^i+v_l^i\frac{\partial f_l^i}{\partial y}\frac{\partial \tau^i}{\partial x_j}\right)$$
$$=\frac{1}{\lambda^i}\sum_{k=0}^{m}\left(\Delta v_k^i\,f_k^i+2<\nabla v_k^i,\nabla\tau^i>\frac{\partial f_k^i}{\partial y}\right.$$
$$\left.+v_k^i\frac{\partial f_k^i}{\partial y}\Delta\tau^i+v_k^i|\nabla\tau^i|^2\frac{\partial^2 f_k^i}{\partial y^2}\right)+P^i+X^i$$

и сгруппируем по производным $\dfrac{\partial f_k^i}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 f_k^i}{\partial y^2}$:

$$\sum_{k=0}^{m}v_k^i\left(\frac{\partial f_k^i}{\partial t}-\frac{|\nabla\tau^i|^2}{\lambda^i}\frac{\partial^2 f_k^i}{\partial y^2}\right)+\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\partial v_k^i}{\partial t}-\frac{1}{\lambda^i}\Delta v_k^i\right)f_k^i$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\left(v_k^i\frac{\partial\tau^i}{\partial t}-\frac{2}{\lambda^i}<\nabla v_k^i,\nabla\tau^i>-\frac{1}{\lambda^i}v_k^i\Delta\tau^i\right)\frac{\partial f_k^i}{\partial y}+\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}v_k^jf_k^j\frac{\partial v_l^i}{\partial x_j}f_l^i$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}v_k^jf_k^jv_l^i\frac{\partial\tau^i}{\partial x_j}\frac{\partial f_l^i}{\partial y}=P^i+X^i. \tag{11}$$

Имеет место следующая теорема о представлении решений и коэффициентов при лучевом разложении.

Теорема 6. *Пусть*

1.: $\tau^i(x,t)$, $\lambda^i(x,t)$, $i=1,\dots,n$ — *некоторые функции переменных* $x=(x_1,\dots,x_n)$, t;

2.: $v_k^i(x,t)$, $i=1,\dots,n$, $k=0,\dots,m$ — *некоторые функции переменных* $x=(x_1,\dots,x_n)$, t;

3.: $A^i(t,y)$, $B^i(t,y)$, $C^i(t,y)$, $i=1,\dots,n$ — *некоторые функции переменных* t, y, $y\in\mathbb{R}^n$;

4.: $f_k^i(t,y)$, $i=1,\dots,n$, $k=0,\dots,m$ — *некоторые функции переменных* t, y, $y\in\mathbb{R}^n$;

5.: *выполнена система соотношений*

$$|\nabla\tau^i|^2=\lambda^iA^i(t,\tau^i),$$
$$\frac{\partial v_k^i}{\partial t}-\frac{1}{\lambda^i}\Delta v_k^i=v_k^iB^i(t,\tau^i),$$
$$v_k^i\frac{\partial\tau^i}{\partial t}-\frac{2}{\lambda^i}<\nabla v_k^i,\nabla\tau^i>-\frac{1}{\lambda^i}v_k^i\Delta\tau^i=v_k^iC^i(t,\tau^i),$$
$$\frac{\partial f_k^i}{\partial t}=\left[A^i\frac{\partial^2 f_k^i}{\partial y^2}-B^if_k^i-C^i\frac{\partial f_k^i}{\partial y}\right]_{y=\tau^i};$$

6.: *функции* $P^i(x,t)$, $X^i(x,t)$, $i=1,\dots,n$ *имеют представление*

$$P^i=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_k^j\frac{\partial v_l^i}{\partial x_j}f_k^j f_l^i\Big|_{y=\tau^i},$$

$$X^i=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_k^j v_l^i\ \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j}f_k^j\frac{\partial f_l^i}{\partial y}\Big|_{y=\tau^i}.$$

Тогда функции

$$w^i(x,t)=\sum_{k=0}^{m} v_k^i(x,t)f_k^i(t,\tau^i(x,t))$$

удовлетворяют системе уравнений (1).

Доказательство состоит в непосредственной проверке того, что соотношение (11) является тождеством в условиях теоремы, см. доказательство теоремы 8.

Далее мы воспользуемся следующим частным случаем теоремы 6 в случае конечного m.

Теорема 7. *Пусть* $\tau^i(x,t)$, $\lambda^i(x,t)$, $i=1,\dots,n$, $v_k^i(x,t)$, $p_k^i(x,t)$, $b_k^i(x,t)$, $i=1,\dots,n$, $k=0,\dots,m$, $f_k^i(t,y)$, $i=1,\dots,n$, $k=0,\dots,m$ — *некоторые достаточно гладкие функции своих переменных. Если выполнена система соотношений*

1.:

$$|\nabla\tau^i|^2=\lambda^i,\quad i=1,\dots,n;,$$

2.:

$$\frac{\partial f_k^i}{\partial t}=\frac{\partial^2 f_k^i}{\partial y^2},\quad i=1,\dots,n;$$

3.:

$$\frac{\partial v_k^i}{\partial t}-\frac{1}{\lambda^i}\Delta v_k^i=p_k^i,$$

$$v_k^i\frac{\partial\tau^i}{\partial t}-\frac{2}{\lambda^i}<\nabla v_k^i,\nabla\tau^i>-\frac{1}{\lambda^i}v_k^i\Delta\tau^i=b_k^i,$$

$i=1,\dots,n$, $k=0,\dots,m$.

Тогда функции

$$w^i(x,t)=\sum_{k=0}^{m} v_k^i(x,t)f_k^i(t,\tau^i(x,t)),\quad i=1,\dots,n$$

удовлетворяют системе (1), *где* P^i *и* X^i *имеют представление*

$$P^i=\sum_{k=0}^{m}p_k^i(x,t)f_k^i(t,\tau^i),\quad X^i=\sum_{k=0}^{m}b_k^i(x,t)\frac{\partial f^i}{\partial y_k}.$$

В дальнейшем, так же как и в теореме 7 будем рассматривать решение системы уравнений (1) в виде конечного лучевого ряда

$$w^i(x,t)=\sum_{k=0}^{m} v_k^i(x,t)f_k^i(t,\tau^i(x,t)),\quad m>0,$$

где $v_k^i(x,t)$ — достаточно гладкие функции, а $f_k^i(t,y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial f_k^i}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_k^i}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial f_k^i}{\partial t} = f_{k-1}^i,$$

$i = 1,\dots,n$, $k = 0,\dots,m$. Примером таких функций служат, например, функции

$$f_k^i(t,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^i(y + 2\eta\sqrt{t})\mathrm{e}^{-\eta^2} d\eta, \quad \varphi_k^i(x) = \varphi_{k-1}^i(x)$$

и ее производные, где $\varphi_k^i(\cdot)$ — основная бесконечно дифференцируемая функция с фиксированным носителем. Действительно, опуская индексы i, k, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y + 2\eta\sqrt{t})\mathrm{e}^{-\eta^2} d\eta = \frac{1}{\sqrt{t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta\varphi'(y + 2\eta\sqrt{t})\mathrm{e}^{-\eta^2} d\eta$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta\varphi'(y + 2\eta\sqrt{t})\mathrm{e}^{-\eta^2} d\eta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta\varphi''(y + 2\eta\sqrt{t})\mathrm{e}^{-\eta^2} d\eta$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y + 2\eta\sqrt{t})\mathrm{e}^{-\eta^2} d\eta.$$

Теорема 8. *Если*

$$P^i(x,t) = p^i(x,t) f_m^i(t, \tau^i(x,t)),$$
$$X^i(x,t) = b^i(x,t) f_{m-1}^i(t, \tau^i(x,t))$$

и выполнены равенства

$$|\mathrm{grad}_x \tau^i(x,t)|^2 = \lambda^i(x,t),$$

$$p^i(x,t) = \frac{\partial v_m^i}{\partial t} + \sum_{l=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_l^j f_l^j \frac{\partial v_m^i}{\partial x_j} - \frac{\Delta v_m^i}{\lambda^i},$$

$$\frac{\partial v_{m-1}^i}{\partial t} + v_m^i \frac{\partial \tau^i}{\partial t} = -\sum_{l=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_l^j f_l^j \left(\frac{\partial v_{m-1}^i}{\partial x_j} + v_m^i \right) + \frac{\Delta v_{m-1}^i}{\lambda^i}$$
$$+ \frac{1}{\lambda^i} \left(v_m^i \Delta\tau^i + 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_m^i}{\partial x_j} \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} \right) + b^i(x,t),$$

$$\frac{\partial v_{k-1}^i}{\partial t} + v_k^i \frac{\partial \tau^i}{\partial t} = -\sum_{l=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_l^j f_l^j \left(\frac{\partial v_{k-1}^i}{\partial x_j} + v_k^i \right) + \frac{\Delta v_{k-1}^i}{\lambda^i}$$
$$+ \frac{1}{\lambda^i} \left(v_k^i \Delta\tau^i + 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_k^i}{\partial x_j} \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} \right),$$

$k = 0,\dots,m$, *то функции*

$$w^i(x,t) = \sum_{k=0}^{m} v_k^i(x,t) f_k^i(t, \tau^i(x,t)), \quad i = 1,\dots,n$$

являются решением системы (1).

Доказательство. В силу соотношений

$$\frac{\partial f_k^i}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_k^i}{\partial y^2}, \quad |\mathrm{grad}_x \tau^i(x,t)|^2 = \lambda^i(x,t), \quad \frac{\partial f_k^i}{\partial t} = f_{k-1}^i.$$

равенство (11) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\partial v_k^i}{\partial t} - \frac{1}{\lambda^i}\Delta v_k^i\right) f_k^i$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\left(v_k^i\frac{\partial \tau^i}{\partial t} - \frac{2}{\lambda^i} < \nabla v_k^i, \nabla \tau^i > -\frac{1}{\lambda^i} v_k^i \Delta \tau^i\right) f_{k-1}^i$$
$$+\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_l^j \frac{\partial v_k^i}{\partial x_j} f_l^j f_k^i + \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_l^j v_k^i \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} f_l^j f_{k-1}^i = P^i + X^i.$$

Далее сгруппируем коэффициенты при f_k^i и подставим выражения для P^i, X^i

$$\left(\frac{\partial v_m^i}{\partial t} - \frac{1}{\lambda^i}\Delta v_m^i\right) f_m^i + \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\partial v_{k-1}^i}{\partial t} - \frac{1}{\lambda^i}\Delta v_{k-1}^i\right) f_{k-1}^i$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\left(v_k^i\frac{\partial \tau^i}{\partial t} - \frac{2}{\lambda^i} < \nabla v_k^i, \nabla \tau^i > -\frac{1}{\lambda^i} v_k^i \Delta \tau^i\right) f_{k-1}^i$$
$$+\sum_{l=0}^{m} v_l^j \frac{\partial v_m^i}{\partial x_j} f_l^j f_m^i + \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_l^j \frac{\partial v_{k-1}^i}{\partial x_j} f_l^j f_{k-1}^i$$
$$+\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_l^j v_k^i \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} f_l^j f_{k-1}^i = p^i f_m^i + b^i f_{m-1}^i.$$

Благодаря соотношениям для $p^i(x,t)$ получаем

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\partial v_{k-1}^i}{\partial t} - \frac{1}{\lambda^i}\Delta v_{k-1}^i + v_k^i\frac{\partial \tau^i}{\partial t} - \frac{2}{\lambda^i} < \nabla v_k^i, \nabla \tau^i > -\frac{1}{\lambda^i} v_k^i \Delta \tau^i\right) f_{k-1}^i$$
$$+\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_l^j \frac{\partial v_{k-1}^i}{\partial x_j} f_l^j f_{k-1}^i + \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_l^j \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j} v_k^i f_l^j f_{k-1}^i = b^i f_{m-1}^i.$$

Имея соотношения для b^i, находим

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{\partial v_{k-1}^i}{\partial t} - \frac{1}{\lambda^i}\Delta v_{k-1}^i + v_k^i\frac{\partial \tau^i}{\partial t} - \frac{2}{\lambda^i} < \nabla v_k^i, \nabla \tau^i > -\frac{1}{\lambda^i} v_k^i \Delta \tau^i\right.$$
$$\left.+\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_l^j \left(\frac{\partial v_{k-1}^i}{\partial x_j} + v_k^i \frac{\partial \tau^i}{\partial x_j}\right) f_l^j\right] f_{k-1}^i = b^i f_{m-1}^i.$$

В силу оставшихся соотношений теоремы, это тождество.

Теорема доказана. □

В заключение отметим, что данная работа является продолжением исследований авторов [9], [27] – [31], развития алгебро-аналитических способов исследования задач идентификации в математической физике, в основе которых лежат алгебраические и аналитические преобразования, тождества, представления, формулы для решений и коэффициентов.

References

[1] N.P. Erugin, M.M. Smirnov, *Functionally invariant solutions of differential equations*, Differential Equations, **17** (1981), 563–573. Zbl 0484.35023

[2] S.L. Sobolev, *Functionally invariant solutions to the wave equation*, Trudy Fiz.-Mat. Inst. Steklova, **5**, (1934), 259-–264. JFM 60.1144.01

[3] A.N. Kolmogorov, *On analytical methods in probability theory*, Selected works of A. N. Kolmogorov. Volume II: Probability theory and mathematical statistics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992), 62—108. Zbl 0743.60005

[4] V.A. Yurko, *Introduction in Theory of Inverse Spectral Problems*, Fizmatlit, Moscow, 2007. Zbl 1137.34001

[5] V.G. Romanov, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, VNU Science Press, Utrecht, 1987.

[6] G.I. Marchuk, *Mathematical Models in Environmental Problems*, North Holland, Amsterdam, 1986. Zbl 0597.90001

[7] D. I. Blokhintsev, *Acoustics of a Nonhomogeneous Moving Medium*, NACA, Washington, DC, United States, 1956.

[8] M.A. Lavrent'ev and B.V. Shabat, *Problems of Hydrodynamics and their Mathematical Models* , Nauka, Moscow, 1977.

[9] Yu.E. Anikonov, *Constructive methods of studying the inverse problems for evolution equations*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **3**:3 (2009), 301–317. Zbl 1224.35423

[10] Yu.Ya. Belov, S.V. Polyntseva , *On the problem of identification of two many-dimensional parabolic equation coefficients*, Doklady Mathematics, **69**:3, (2004), 412–415. Zbl 1282.35409

[11] *Nonlinear Waves*, Edited by S. Leibovich and A. R. Seebass, Cornell University press, Ithaka and London, 1974.

[12] A.N. Kolmogoroff, I.G. Petrovsky, N.S. Piscounoff, *Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantite de matière et son application á un probleme biologique*, Bull. Univ. État Moscou, Sér. Int., Sect. A: Math. et Mécan. **1**:6 (1937), 1–25. Zbl 0018.32106

[13] J. D. Murray, *Mathematical Biology. I. An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[14] J. D. Murray, *Mathematical Biology II. Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[15] A.V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, Mir, Moscow, 1980. Zbl 0499.35002

[16] M.M. Lavrentiev, K.G. Reznitskaya, and V.G. Yakhno, *Onedimensional Inverse Problems of Mathematical Physics*. Nauka, Novosibirsk, 1982. Zbl 0526.35001

[17] L. Ljung, *System identification: Theory for the User*, Prentice Hall, New Jersey, 1987. Zbl 0615.93004

[18] V.S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, Ins. VI, New York, 1971. Zbl 0207.09101

[19] M.M. Lavrent'ev, V.G. Romanov, and S.P. Shishatskii, *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, Translations of Mathematical Monographs, 64, American Mathematical Society, Providence, 1986 . Zbl 0593.35003

[20] Yu. E. Anikonov, L. N. Pestov, *Formulas in Linear and Nonlinear Tomography Problems*, NSU, Novosibirsk, 1990. Zbl 0764.92013

[21] Yu.E. Anikonov, *Some Methods of Investigations of Inverse problems for Differential Equations*, Nauka, Novosibirsk, 1978. Zbl 1349.35422

[22] V.M. Babich, V.S. Buldyrev, *Short-wavelength diffraction theory. Asymptotic methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1991. Zbl 0742.35002

[23] V.M. Babich, V.S. Buldyrev, and I.A. Molotkov *Space-time Ray Method*, Leningrad State University Press, Leningrad, 1985. Zbl 0678.35002

[24] V.M. Babich, A.P. Kiselev, *Elastic waves: high frequency theory*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2018. Zbl 1402.74003

[25] Yu.E. Anikonov, *Representations of solutions to functional and evolution equations and identification problems*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 591–614 . Zbl 1330.35515

[26] Yu.E. Anikonov, M.V. Neshchadim, *Algebraic-analytic methods for constructing solutions to differential equations and inverse problems*, Journal of Mathematical Sciences, **215**:6 (2016), 444–459. Zbl 1349.35048

[27] Yu.E. Anikonov, N.B. Ayupova, *Ray expansions and identities for second order equations. Applications to inverse problems*, Journal of Mathematical Sciences, **231**:2 (2018), 111–123. Zbl 1413.35450

[28] M.V. Neshchadim, *Functionally Invariant Solutions to Maxwell's System*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **11**:1 (2017), 107–114. Zbl 1374.35398

[29] M.V. Neshchadim, A.A. Simonov, *Functional invariant solutions to Maxwell's system: dependence on time*, Sib. Zh. Ind. Mat, **22**: 2 (2019), 49—61.

[30] Yu.E. Anikonov, N.B. Ayupova, M.V. Neshchadim, *Ray method and questions of identification of elasticity equations*, Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics, **18**:1 (2018), 11–27.

[31] Yu.E. Anikonov, N.B. Ayupova, V.G. Bardakov, V.P. Golubyatnikov, M.V. Neshchadim, *Inversion of mapping and inverse problems*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9** (2012), 382–432. Zbl 1330.35517 .

Yurii Evgenievich Anikonov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: anikon@math.nsc.ru

Natalia Borisovna Ayupova
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: ayupova@math.nsc.ru

Mikhail Vladimirovich Neshchadim
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: neshch@math.nsc.ru