S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 158–164 (2019) УДК 512.54

DOI 10.33048/semi.2019.16.008 MSC 20B07, 20B30, 20B35

НОРМАЛЬНЫЕ ЗАМЫКАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ В ГРУППЕ $\mathbf{Lim}(N)$

Н.М. СУЧКОВ, Н.Г. СУЧКОВА

Abstract. In this paper we describe the normal closures of elements in limited permutation group $G = \mathrm{Lim}(N)$ on the set of natural numbers N.

Keywords: group, limited permutation, normal subgroup, dispersion set.

1. Введение

Пусть N, Z — множества всех натуральных и целых чисел соответственно, M — любое из этих множеств. Через $S(M)$ будем обозначать группу всех подстановок множества M. Напомним, что носителем подстановки $g \in S(M)$ называется множество

$$L_g = \{\alpha \mid \alpha \in M, \ \ \alpha^g \neq \alpha\}.$$

Подстановки с конечными носителями называются финитарными и образуют нормальную в группе $S(M)$ локально конечную подгруппу $Fin(M)$.

Определение 1. *Подстановка $g \in S(M)$ называется ограниченной, если*

$$w(g) = \max_{\alpha \in M} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Множество

$$\mathrm{Lim}(M) = \{x \mid x \in S(M), \ \ \omega(x) < \infty\}$$

образует группу, которая является естественным расширением группы $Fin(M)$. В работе [1] был построен пример смешанной группы, представимой в виде произведения двух периодических (и даже локально конечных) подгрупп, а

Suchkov, N.M., Suchkova, N.G., Normal closures of elements in group $\mathrm{Lim}(N)$.

Работа поддержана РФФИ (грант 19-01-00566 А).

Поступила 22 мая 2018 г., опубликована 31 января 2019 г.

в [2] установлено, что эта группа совпадает с подгруппой H группы $\mathrm{Lim}(Z)$, порожденной её элементами конечных порядков. При этом доказано, что в H изоморфно вложимы любая счетная свободная группа и 2-группа Алешина. Факторизация всей группы $G = \mathrm{Lim}(N)$ двумя локально конечными подгруппами установлена в [3] и показано, что G порождается подстановками x с параметром $\omega(x) = 1$. Эти порождающие являются инволюциями, в разложении которых на независимые циклы участвуют только транспозиции вида $(\alpha \;\; \alpha{+}1)$.

В работе [4] авторами начато изучение нормального строения группы G и введено понятие (вполне) рассеянного подмножества множества N, которое оказалось весьма полезным в этих исследованиях.

Пусть $m \in N$, $L \subseteq N$ и элементы L упорядочены в порядке возрастания.

Определение 2. *Множество L назовем m-плотным, если расстояние между любыми его соседними элементами не превосходит m.*

Элементы α, β множества L назовём m-эквивалентными, если они содержатся в некотором m-плотном подмножестве из L. Нетрудно понять, что данное отношение является отношением эквивалентности, а значит, оно индуцирует разбиение множества L на классы эквивалентности. Это разбиение будем называть m-разбиением. Пусть $B_m(L)$ — множество всех классов эквивалентности элементов множества L.

Определение 3. *Множество L назовем m-рассеянным, если все классы множества $B_m(L)$ конечны и вполне m-рассеянным при ограниченности их порядков. Множество L называется (вполне) рассеянным, если оно (вполне) m-рассеянное при любом натуральном m.*

Например, $\cup_{n\in N}\{2^n, 2^n+1\}$ — вполне рассеянное множество, $\cup_{n\in N}\{2^n, 2^n+1, \ldots, 2^n+n\}$ — рассеянное, но не вполне рассеянное множество.

Пусть R — локально конечный радикал группы G. Через $T(g)$ будем обозначать нормальное замыкание в G подстановки g. В [4] доказано, что инволюция x группы G с параметром $\omega(x) = 1$ тогда и только тогда содержится в R, когда её носитель L_x — вполне рассеянное множество. Основным результатом работы [5] является следующее

Предложение 1. *Подстановка g группы G тогда и только тогда содержится в R, когда L_g — вполне рассеянное множество. Если множество L_g не вполне рассеянное, то $T(g)$ содержит элемент бесконечного порядка.*

В работе Ю.С. Тарасова [6] доказано

Предложение 2. *Пусть x — инволюция группы G с параметром $\omega(x) = 1$. Подгруппа $T(x)$ тогда и только тогда является собственной в группе G, когда L_x — рассеянное множество.*

Эти предложения доказывают две гипотезы из трех сформулированных в [4].

В настоящей статье доказана последняя из этих гипотез, а именно, установлена следующая

Теорема 1. *Пусть g — произвольная подстановка группы G. Подгруппа $T(g)$ тогда и только тогда является собственной в группе G, когда L_g — рассеянное множество.*

Из этого результата легко вытекает

Теорема 2. *Для подстановки g группы G тогда и только тогда выполняется равенство $T(g) = G$, когда L_g — бесконечное m-плотное множество для некоторого натурального m.*

Все обозначения, используемые в данной статье, либо оговариваются, либо стандартны [7].

2. Построение собственных нормальных подгрупп

В этом разделе мы предположим, что носитель L_g подстановки $g \in G$ является рассеянным множеством, $\omega(g) = s$. Если L_g — конечное множество, то $g \in Fin(N) \lhd G$. Пусть $L_g = L$ — бесконечное множество.

Определение 4. *Если γ, ε — целые числа и $\gamma \leq \varepsilon$, то множество*

$$U_\gamma^\varepsilon = \{\beta \mid \beta \in Z, \ \ \gamma \leq \beta \leq \varepsilon\}$$

будем называть отрезком целых чисел; γ — левый конец этого отрезка, ε — правый.

Фиксируем натуральное число $m > s$ и рассмотрим множество $B_m(L) = \{A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$ всех классов m-эквивалентности элементов множества L. Если α_n (β_n) — наименьшее (наибольшее) число класса A_n, то мы можем считать, что $\beta_n < \alpha_{n+1}$ при всех $n \in N$. Из определения m-эквивалентности следует, что $\alpha_{n+1} - \beta_n > m$, а значит, в силу неравенства $m > \omega(g) = s$ элементы любого цикла длины > 1 из разложения подстановки g на независимые циклы содержатся в одном из множеств A_n, $n \in N$. В частности, $\left(U_{\alpha_n}^{\beta_n}\right)^g = U_{\alpha_n}^{\beta_n}$ при всех натуральных n. Для целого $k \geq 0$ и $n \in N$ положим

$$V_{nk} = U_{\alpha_n - k}^{\beta_n + k} \cap N, \ \ E_k = \cup_{n \in N} V_{nk}.$$

Из рассеянности множества L следует неограниченность множества $\{\alpha_{n+1} - \beta_n \mid n \in N\}$. Поэтому каждое множество E_k разбивается на такие отрезки

$$W_{k1}, \ldots, W_{kn}, \ldots$$

натуральных чисел, что если β_{kn} — правый конец отрезка W_{kn}, а $\alpha_{k\,n+1}$ — левый конец отрезка $W_{k\,n+1}$, то $\alpha_{k\,n+1} > \beta_{kn} + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. При этом каждый отрезок W_{kn} содержится в некотором отрезке $W_{k+1\,q}$. Пусть теперь

$$P_k = \{y \mid y \in G; \ W_{kn}^y = W_{k\,n} \ (n = 1, 2, \ldots); \ \beta^y = \beta \ (\beta \in N \setminus E_k)\}.$$

Очевидно, что P_k — подгруппа группы G и $P_k < P_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$. Пусть

$$P = P(L) = \cup_{k \in N} P_k.$$

Лемма 1. *P — собственная нормальная в группе G подгруппа, содержащая подстановку g.*

Доказательство. Из определения подгруппы P_0 вытекает включение $g \in P_0$, а потому $g \in P$. Пусть h — произвольный элемент группы P. Тогда $h \in P_r$ для некоторого $r \in N$. Если a — любая инволюция группы G с параметром $\omega(a) = 1$, то мы утверждаем, что $h^a \in P_{r+1}$. В самом деле, рассмотрим разложение подстановки h на независимые циклы. Поскольку h оставляет на месте отрезки W_{rn} $(n = 1, 2, \ldots)$ и действует тождественно на натуральных числах не содержащихся на этих отрезках, то все эти циклы конечны. Следовательно, если $x = (\gamma_1 \dots \gamma_l)$ — один из этих циклов и $l > 1$, то $\gamma_1 \dots \gamma_l$ содержатся в некотором отрезке W_{rt}, где $t = t(x)$. Так как $x^a = (\gamma_1^a \dots \gamma_l^a)$ и $\omega(a) = 1$, то $\gamma_i^a \in \{\gamma_i - 1,\ \gamma_i,\ \gamma_i + 1\}$, $1 \leq i \leq l$. Таким образом, все элементы цикла x^a принадлежат некоторому отрезку $W_{r+1\ d}$. Это означает, что $h^a \in P_{r+1} < P$. Во введении отмечалось, что группа G порождается подстановками a с параметром $\omega(a) = 1$. Поэтому $P \lhd G$.

Остается показать, что P — собственная подгруппа группы G. Действительно, по ходу доказательства мы убедились, что любая подстановка подгруппы P разложима на конечные независимые циклы. Поэтому бесконечный цикл

$$z = (\dots 2n \dots\ 4\ 2\ 1\ 3 \dots 2n-1 \dots)$$

не содержится в P, но так как $\omega(z) = 2$, то $z \in G$. Итак, $P \neq G$. Лемма доказана. $\square$

3. Подстановки с m-плотными носителями

Пусть g — подстановка группы G, $\omega(g) = s$. Будем предполагать, что её носитель $L = L_g$ является бесконечным m-плотным множеством, т.е.

$$L = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots\},$$

где $\mu_{n+1} > \mu_n$ и $\mu_{n+1} - \mu_n \leq m$ при всех натуральных n.

Замечание 1. *В записи разложения подстановки g на независимые циклы одноэлементные циклы опускаются, а остальные циклы записывают в произвольном порядке. При этом в качестве первого элемента конечного цикла мы можем взять любой элемент этого цикла.*

При вычислениях мы будем использовать хорошо известное и легко проверяемое

Предложение 3. *Пусть x, y — подстановки некоторого множества. Если*

$$x = \dots (\dots \alpha_1 \alpha_2 \dots) \dots \ —$$

разложение подстановки x на независимые циклы, то

$$x^y = y^{-1}xy = \dots (\dots \alpha_1^y \alpha_2^y \dots) \dots .$$

Лемма 2. *Если g — инволюция, то $T(g) = G$.*

Доказательство. Пусть $g = (\alpha_1\ \beta_1) \dots (\alpha_n\ \beta_n) \dots$ — разложение подстановки g на независимые транспозиции. Ввиду замечания 1 мы можем предполагать, что при всех натуральных n выполняются неравенства $\alpha_n < \beta_n$, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. Очевидно, $L = A \cup C$, где $A = \{\alpha_n \mid n \in N\}$, $C = \{\beta_n \mid n \in N\}$.

Покажем, что при каждом натуральном n выполняется неравенство

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n \leq s + m.$$

Действительно, пусть $\alpha_n = \mu_t$. Если $\alpha_{n+1} = \mu_{t+1}$, то $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \mu_{t+1} - \mu_t \leq m$. Поэтому мы можем считать, что найдется такое натуральное r, что $\mu_{t+1}, \dots \mu_{t+r} \in C$, $\mu_{t+r+1} = \alpha_{n+1}$. В частности, $\mu_{t+r} = \beta_l$ для некоторого $l \leq n$. Так как $\beta_l - \alpha_l \leq s$, то и $\beta_l - \alpha_n \leq s$. Таким образом,

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = (\mu_{t+r+1} - \mu_{t+r}) + (\beta_l - \alpha_l) \leq m + s.$$

Рассмотрим подстановку $h_1 = (\beta_1\ \alpha_2)\dots(\beta_{2n-1}\ \alpha_{2n})\dots$. В силу установленного неравенства мы имеем

$$|\beta_{2n-1} - \alpha_{2n}| \le |\beta_{2n-1} - \alpha_{2n-1}| + |\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n}| \le 2s + 1.$$

Следовательно, $\omega(h_1) \le 2s + 1$ и $h_1 \in G$. С помощью предложения 3 легко получаем

$$g_1 = g^{h_1} = (\alpha_1\ \alpha_2)(\beta_1\ \beta_2)\dots(\alpha_{2n-1}\ \alpha_{2n})(\beta_{2n-1}\ \beta_{2n})\dots.$$

Если $h_2 = (\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\dots(\alpha_{4n-2}\ \alpha_{4n-1}\ \alpha_{4n})\dots$, то $\omega(h_2) \le 2(s+m)$. В частности, $h_2 \in G$. Поэтому подстановка

$$g_2 = [g_1, h_2] = g_1^{-1} g_1^{h_2} = (\alpha_1\ \alpha_4)(\alpha_2\ \alpha_3)\dots(\alpha_{4n-3}\ \alpha_{4n})(\alpha_{4n-2}\ \alpha_{4n-1})\dots$$

содержится в $T(g_1)$. Пусть теперь $h_3 = (\alpha_2\ \alpha_4)\dots(\alpha_{4n-2}\ \alpha_{4n})\dots$. Так как $\omega(h_3) \le 2(s+m)$, то $h_3 \in G$. Положим

$$g_3 = g_2^{h_3} = (\alpha_1\ \alpha_2)(\alpha_3\ \alpha_4)\dots(\alpha_{2n-1}\ \alpha_{2n})\dots.$$

Наконец, обозначим через h_4 подстановку группы G, разложение которой на независимые циклы составляют все транспозиции $(\alpha_{2n}\ \alpha_{2n-1}{+}1)$, для которых $\alpha_{2n} > \alpha_{2n-1} + 1$. Тогда

$$g_4 = g_3^{h_4} = (\alpha_1\ \alpha_1 + 1)(\alpha_3\ \alpha_3 + 1)\dots(\alpha_{2n-1}\ \alpha_{2n-1} + 1)\dots.$$

Очевидно, что g_4 — инволюция с параметром $\omega(g_4) = 1$. Так как $B_{2(m+s)}(L_{g_4}) = \{L_{g_4}\}$, то множество L_{g_4} не является рассеянным. В силу предложения 2 $T(g_4) = G$. Итак, $T(g) = T \ge T(g_2) = T(g_3) = T(g_4) = G$, т.е. $T(g) = G$. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Если разложение подстановки g на независимые циклы содержит бесконечный цикл, то $T(g) = G$.*

Доказательство. Пусть

$$x = (\dots\alpha_{-n}\dots\alpha_{-1}\ \alpha_0\ \alpha_1\dots\alpha_n\dots) —$$

бесконечный цикл из разложения g на независимые циклы. Так как $\omega(g) = s$, то $|\alpha_i - \alpha_{i+1}| \le s$ при всех целых i. Обозначим

$$y_1 = \dots(\alpha_{-4n+1}\ \alpha_{-4n+2}\ \alpha_{-4n+3})\dots$$
$$\dots(\alpha_{-3}\ \alpha_{-2}\ \alpha_{-1})(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\dots(\alpha_{4n+1}\ \alpha_{4n+2}\ \alpha_{4n+3})\dots.$$

Очевидно, $\omega(y_1) \le 2s$ и $y_1 \in G$. Непосредственные вычисления с использованием предложения 3 показывают, что если $x_1 = [g, y_1] = [x, y_1] = x^{-1}x^{y_1}$, то

$$x_1 = \dots(\alpha_{-4n+1}\ \alpha_{-4n+2}\ \alpha_{-4(n-1)})\dots$$
$$\dots(\alpha_{-3}\ \alpha_{-2}\ \alpha_0)(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4)\dots(\alpha_{4n+1}\ \alpha_{4n+2}\ \alpha_{4(n+1)})\dots.$$

Далее, пусть

$$y_2 = \dots(\alpha_{-4n+2}\ \alpha_{-4n+3})\dots(\alpha_{-2}\ \alpha_{-1})(\alpha_2\ \alpha_3)\dots(\alpha_{4n+2}\ \alpha_{4n+3})\dots.$$

Тогда $w(y_2) \le s$ и

$$x_1^{y_2} = \dots(\alpha_{-4n+1}\ \alpha_{-4n+3}\ \alpha_{-4(n-1)})\dots$$
$$\dots(\alpha_{-3}\ \alpha_{-1}\ \alpha_0)(\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_4)\dots(\alpha_{4n+1}\ \alpha_{4n+3}\ \alpha_{4(n+1)})\dots.$$

Таким образом, $T(g)$ содержит инволюцию

$$x_2 = x_1 x_1^{y_2} = \dots(\alpha_{-2n-1}\ \alpha_{-2n})\dots(\alpha_{-1}\ \alpha_0)(\alpha_1\ \alpha_2)\dots(\alpha_{2n-1}\ \alpha_{2n})\dots,$$

носитель которой является бесконечным s-плотным множеством. В силу леммы 2 $T(x_2) = G$. Ясно, что тогда и $T(g) = G$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. $T(g) = G$.

Доказательство. Ввиду леммы 3 мы можем считать, что подстановка g разлагается на конечные независимые циклы z_n, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть α_n — наименьшее число цикла z_n, а β_n — наибольшее. Согласно замечанию 1 будем предполагать, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$. Определим индуктивно последовательность циклов $z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_n}, \ldots$ из разложения g. Полагаем $j_1 = 1$ и допустим, что уже определены циклы z_{j_k} при $k \le n$. Если $\beta_{j_n} = \mu_{i_k}$, то $z_{j_{n+1}}$ — цикл, содержащий число μ_{i_n+1}. Ясно, что тогда

$$\beta_{j_1} < \beta_{j_2} < \ldots < \beta_{j_n} < \ldots .$$

Далее, для каждого $n \in N$ рассмотрим транспозицию $(\beta_{j_n}\ \gamma_n)$, где $\gamma_n = \mu_{i_n+1}$, если $\mu_{i_n+1} \ne \beta_{j_{n+1}}$; $\gamma_n = \beta_{j_{n+1}}^{g^{-1}}$, если $\mu_{i_n+1} = \beta_{j_{n+1}}$. В любом случае $\gamma_n \in z_{j_{n+1}}$, $|\gamma_n - \beta_{j_n}| \le m + s$. Обозначим

$$a = (\beta_{j_1}\ \gamma_1)(\beta_{j_2}\ \gamma_2) \ldots (\beta_{j_n}\ \gamma_n) \ldots .$$

Так как $\omega(a) \le m + s$, то инволюция a содержится в группе G. Заметим, что если $\gamma_n = \beta_{j_{n+1}}^{g^{-1}}$, то $\gamma_n^{ga} = \gamma_{n+1}$. Если же $\gamma_n = \mu_{i_n+1} \ne \beta_{j_{n+1}}$, то найдется такое наименьшее натуральное число $t_n \ge 2$, что $\gamma_n^{g^{t_n}} = \beta_{j_{n+1}}$. В этом случае элементы $\gamma_n^g, \ldots, \gamma_n^{g^{t_n-1}}$ цикла $z_{j_{n+1}}$ отличны от γ_n и $\beta_{j_{n+1}}$, а значит, подстановка a действует на них тождественно. Отсюда следует, что $\gamma_n^{(ga)^{t_n}} = \gamma_n^{g^{t_n} a} = \beta_{j_{n+1}}^a = \gamma_{n+1}$. Таким образом, в разложении подстановки ga на независимые циклы имеется бесконечный цикл

$$(\ldots \gamma_1 \ldots \gamma_2 \ldots \gamma_n \ldots).$$

Но тогда бесконечный цикл присутствует и в разложении подстановки $u = (ga)^2 = gg^a \in T(g)$. Если ε — наименьшее число этого цикла, $\omega(u) = r$ и $q = \max(\varepsilon, r)$, то нетрудно понять, что множество L_u является q-плотным. Следовательно, к подстановке u применима лемма 3, согласно которой $T(u) = G$. Так как $T(u) \le T(g)$, то $T(g) = G$. Лемма доказана. $\square$

4. Доказательство теорем 1, 2

Пусть $T(g)$ — собственная подгруппа группы G. Допустим, что носитель L_g подстановки g не является рассеянным множеством. Тогда найдется такое натуральное k, что $B_k(L_g)$ содержит бесконечный класс M. Обозначим $m = \max(k, t)$, где t — наименьшее число множества M. Ясно, что m-плотным является множество L_g, а значит, $T(g) = G$ в силу леммы 4. Получили противоречие. Итак, L_g — рассеянное множество.

Обратно. Предположим, что L_g — рассеянное множество. Если оно конечно, то $T(g) \le Fin(N)$ — собственная подгруппа группы G. Если же L_g — бесконечное множество, то по лемме 1 $g \in P$ — собственная нормальная подгруппа группы G, а потому $T(g) \ne G$. Теорема 1 доказана.

Предположим теперь, что $T(g) = G$. По теореме 1 множество L_g не является рассеянным. Тогда оно бесконечно и m-плотно (см. доказательство теоремы 1).

Обратно, если L_g — бесконечное m-плотное множество, то $B_m(L_g) = \{L_g\}$. В частности, множество L_g не является рассеянным и по теореме 1 $T(g) = G$. Это завершает доказательство теоремы 2.

References

[1] N.M. Suchkov, *Example of a mixed group factorized by two periodic subgroups*, Algebra and Logic, **23**:5 (1984), 573–577. MR0817031.

[2] N.M. Suchkov, *On subgroups of the product of locally finite groups*, Algebra and Logic, **24**:4 (1985), 408–413. MR083009.

[3] N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *On groups of limited permutations*, Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, **3**:2 (2010), 262–266.

[4] N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *On normal subgroups of limited permutation groups*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 344–353. MR3493735

[5] N.M. Suchkov, N.G. Suchkova, *On locally finite radical of the group of limited permutations*, Trudy Inst. Math. Mekh. UrO RAN, **22**:3 (2016), 259–264. MR3555731

[6] Yuri S. Tarasov, *On normal closures of involutions in the group of limited permutations*, Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, **9**:3 (2016), 393–400.

[7] M. I. Kargapolov, Y. I. Merzlyakov, *Foundation of group theory*, Moscow: "Nauka", 1982. MR0677282

Nikolai Mihailovich Suchkov
Siberian Federal University,
79, pr. Svobodny,
Krasnoyarsk, 660041, Russia
E-mail address: ns7654321@mail.ru

Nadezhda Georgievna Suchkova
Siberian Federal University,
79, pr. Svobodny,
Krasnoyarsk, 660041, Russia
E-mail address: ns7654321@mail.ru