

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1587–1599 (2019)

УДК 517.977

DOI 10.33048/semi.2019.16.110

MSC 65M06, 65M12

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ С НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ И
НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ

Т.В. ГОРБОВА, В.Г. ПИМЕНОВ, С.И. СОЛОДУШКИН

ABSTRACT. The problem to be considered is a numerical solving of nonlinear partial differential equations with heredity effect. Nonlinearity is contained in the operator of differentiation as well as in the inhomogeneity function. We propose a nonlinear implicit difference scheme, which implies the use of iterative methods to find the solution on each time layer. To take into account the heredity effect the interpolation and extrapolation of grid solution were used. Stability and convergence of the proposed difference scheme were proved. Numerical experiments were carried out and results coincides with the theoretical ones.

Keywords: nonlinear difference scheme, convergence of the difference scheme, partial differential equation, time delay.

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих математических моделях, в частности, динамики популяций, ценообразования опционов, химической кинетики, газовой динамики и других используются уравнения в частных производных с нелинейностью в операторе дифференцирования, смотри, например, [1, 2] и ссылки в них. К тому же модели могут быть осложнены эффектами запаздывания, дробными производными, многомерностью пространственных переменных. В данной работе мы сосредоточимся на основной сложности — нелинейности оператора дифференцирования. Именно, рассматривается уравнение вида

GORBOVA, T.V., PIMENOV, V.G., SOLODUSHKIN, S.I., NUMERICAL SOLVING OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HEREDITY AND NONLINEARITY IN THE DIFFERENTIAL OPERATOR.

© 2018 Горбова Т.В., Пименов В.Г., Солодушкин С.И.

Исследования поддержаны грантом РФФИ 19-01-00019.

Поступила 14 августа 2018 г., опубликована 5 ноября 2019 г.

$$(1) \quad \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial x^2} + g(x, t, p_t(x, \cdot)),$$

где $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq X$, — независимые переменные, $p(x, t)$ — искомая функция, $p_t(x, \cdot) = \{p(x, t + s), -\tau \leq s \leq 0\}$ — наследственность (история) искомой функции к моменту t .

Заданы краевые условия $p(0, t) = p_0(t)$, $p(X, t) = p_1(t)$, $0 \leq t \leq T$, начальные условия $p(x, s) = \varphi(x, s)$, $0 \leq x \leq X$, $-\tau \leq s \leq 0$.

Существуют различные подходы к построению разностных схем для нелинейных уравнений в частных производных. Наиболее простой — рассмотрение явных схем, которые, как правило, являются условно устойчивыми, что накладывает жесткие ограничения на шаги по времени. При этом основное внимание при построении разностной схемы уделяется монотонности численного решения или его неотрицательности [1].

Для нелинейных уравнений специального вида применяются методы, учитывающие специфику уравнений. Так, например, для уравнения Бюргерса применяют преобразование Хопфа–Коула, сводя исходное уравнение к уравнению теплопроводности, решение которого можно искать в виде ряда Фурье [3]. К сожалению, для уравнений произвольного вида найти подходящее преобразование удается редко.

В работе [2], как и в большинстве подобных работ, не рассматриваются численные методы, а делается попытка нахождения точного решения в виде ряда. Однако, аналитическое решение в подобных задачах удается найти лишь в исключительных случаях, поэтому разработка, обоснование устойчивости и сходимости, а также программная реализация численных алгоритмов представляется весьма актуальной задачей. При разработке разностных схем проблема состоит в том, что применение явной схемы приводит, как показал вычислительный эксперимент, к неустойчивости; т. е. даже условную устойчивость вообще говоря нельзя гарантировать, накладывая ограничения на шаги дискретизации по времени или пространству. А непосредственное применение неявной схемы к уравнению (1) приводит к необходимости решать нелинейные системы большой размерности.

Линейные уравнения с частными производными с эффектом запаздывания ранее изучались в различных аспектах [4]. Хорошо развиты численные алгоритмы их решения: метод прямых, конечно-разностные, конечно-элементные, псевдоспектральные методы и другие, смотри, например, [5, 6].

В данной работе применяется прием, изложенный в [7]. Этот прием состоит в переводе с помощью замены переменных нелинейности в операторе дифференцирования по пространственной переменной в оператор дифференцирования по времени. Далее строится неявная разностная схема, возникающая нелинейная система решается методом Ньютона. Эффект наследственности в данной работе учитывается с помощью методики [9, 12]. Основным результатом состоит в доказательстве устойчивости и сходимости построенного алгоритма. Для этого разработана нелинейная модификация общей разностной схемы систем с наследственностью [8, 9, 10, 11].

2. НЕЯВНЫЙ РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД

Предполагая однозначную обратимость $\phi(p)$ на интересующей нас области, сделаем замену $u = \phi(p)$, $p = \omega(u)$, тогда (1) преобразуется к виду

$$(2) \quad \frac{\partial \omega(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u_t(x, \cdot)), \quad u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s \leq 0\}.$$

Соответствующим образом изменятся начальные и граничные условия:

$$(3) \quad u(0, t) = \phi(p_0(t)) = \mu_0(t), \quad u(X, t) = \phi(p_1(t)) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$(4) \quad u(x, s) = \phi(\varphi(x, s)), \quad 0 \leq x \leq X, \quad -\tau \leq s \leq 0.$$

Будем предполагать, что задача (2) – (4) имеет и притом единственное решение $u(t, x)$, причем дважды непрерывно дифференцируемое по t и четырежды непрерывно дифференцируемо по x . Также будем предполагать, что функционал $f(x, t, u_t(x, \cdot))$ липшицев по последнему аргументу на множестве непрерывных функций. Относительно функции $\omega(u)$ будем предполагать, что она дважды непрерывно дифференцируема в своей области определения и выполняется условие

$$(5) \quad \omega'(u) \geq \hat{\omega} > 0.$$

Разобьем отрезок изменения пространственной переменной $[0, X]$ на части с шагом $h = X/N$, введя точки $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$, и разобьем отрезок изменения временной переменной $[-\tau, T]$ на части с шагом $\Delta = T/M$ (без ограничения общности $\tau/\Delta = m$ целое), введя точки $t_j = j\Delta$, $j = -m, \dots, M$.

Приближения функций $u(x_i, t_j)$ в узлах сетки будем обозначать через u_j^i . При всяком фиксированном $i = 0, \dots, N$ введем дискретную предысторию к моменту t_j , $j = 0, \dots, M$: $\{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}$. Оператором интерполяции (с экстраполяцией) дискретной предыстории назовем отображение I : ставящее в соответствие дискретной предыстории $\{u_k^i\}_j$ функцию $u_j^i(\cdot)$, определенную на $[t_j - \tau, t_j + \Delta]$. В дальнейшем будем использовать [9] кусочно-линейную интерполяцию

$$u_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta}((t_k - t_j - s)u_{k-1}^i + (t_j + s - t_{k-1})u_k^i), \quad t_{k-1} \leq t_j + s \leq t_k$$

с экстраполяцией продолжением

$$u_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta}((-s)u_{k-1}^i + (\Delta + s)u_k^i), \quad t_j \leq t_j + s \leq t_{j+1}.$$

Для $j = 0, 1, \dots, M - 1$, рассмотрим нелинейную неявную разностную схему

$$(6) \quad \frac{\omega(u_{j+1}^i) - \omega(u_j^i)}{\Delta} = \frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

$$u_{j+1}^0 = \mu_0(t_{j+1}), \quad u_{j+1}^N = \mu_1(t_{j+1}),$$

с начальными условиями $u_j^i = \phi(\varphi(x_i, t_j))$, $i = 0, \dots, N$, $j = -m, \dots, 0$.

При каждом фиксированном j (6) является системой нелинейных относительно u_{j+1}^i , $i = 1, \dots, N - 1$, уравнений, поиск ее точного решения затруднителен. Для решения (6) на каждом временном слое j применяется метод Ньютона

[7], стр. 444–454,

$$(7) \quad \omega(u_{j+1}^i[k]) + \omega'(u_{j+1}^i[k])(u_{j+1}^i[k+1] - u_{j+1}^i[k]) - \\ - \Delta \frac{u_{j+1}^{i-1}[k+1] - 2u_{j+1}^i[k+1] + u_{j+1}^{i+1}[k+1]}{h^2} = \omega(u_j^i) + \Delta f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot)),$$

где k — номер итерации, $k = 0, 1, \dots$, а $u_{j+1}^i[k]$ — k -е приближение по методу Ньютона к u_{j+1}^i , $i = 1, \dots, N - 1$. Отметим, что в (7) при поиске $u_{j+1}^i[k+1]$ используется u_j^i — не точное решение (6) на j слое, которое, вообще говоря, неизвестно, а его приближение в методе Ньютона, полученное на предыдущем временном слое.

Система (7) представляет собой трехдиагональную систему линейных уравнений. Так как из (5) следуют условия диагонального преобладания, то система (7) может быть эффективно решена с помощью алгоритма прогонки.

Отметим, что при выполнении условия (5), метод (7) может быть переписан в виде

$$(8) \quad u_{j+1}^i[k+1] - \Delta \frac{u_{j+1}^{i-1}[k+1] - 2u_{j+1}^i[k+1] + u_{j+1}^{i+1}[k+1]}{\omega'(u_{j+1}^i[k])h^2} = \\ = u_{j+1}^i[k] + \frac{\omega(u_j^i) - \omega(u_{j+1}^i[k]) + \Delta f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot))}{\omega'(u_{j+1}^i[k])}.$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ

Мы будем вкладывать предполагаемый метод в общую схему, предложенную ранее в [8, 9] для линейных разностных задач с наследственностью.

Пусть дан $[-\tau, T]$, разобьем его на части с шагом $\Delta = T/M$, введя точки $t_j = t_0 + j\Delta$, $j = -m, \dots, M$. Без ограничения общности считаем, что $\tau/\Delta = m$ — целое.

Дискретной моделью назовем всякую сеточную функцию $y_j = y(t_j) \in Y$, $j = -m, \dots, M$, где Y — q -мерное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$. Будем предполагать, что размерность q пространства Y зависит от числа $h > 0$.

Для $j \geq 0$ предысторией дискретной модели к моменту t_j назовем множество $\{y_i\}_j = \{y_i \in Y, i = j - m, \dots, j\}$.

Пусть V — линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_V$ (интерполяционное пространство). Оператором интерполяции дискретной предыстории модели назовем отображение $I: I(\{y_i\}_j) = v \in V$.

Будем считать, что оператор интерполяции удовлетворяет условию липшицевости, если найдется такая константа L_I , что для всех предысторий дискретной модели $\{y_i^1\}_j$ и $\{y_i^2\}_j$ выполняется

$$\|v^1 - v^2\|_V \leq L_I \max_{j-m \leq i \leq j} \|y_i^1 - y_i^2\|_Y.$$

Стартовыми значениями модели назовем

$$y(t_i) = y_i, \quad i = -m, \dots, 0$$

Формулой продвижения модели на шаг назовем алгоритм

$$(9) \quad y_{j+1} = S(y_j) + \Delta \Phi(I(\{y_i\}_j)),$$

где нелинейный оператор перехода $S(y_j) = S(y_j, t_j, \Delta, h)$ липшицев по первому аргументу с константой Липшица $L_S = L_S(\Delta, h)$; функция продвижения на шаг $\Phi(v) = \Phi(v, t_j, \Delta, h)$ — нелинейное отображение из V в Y , липшицевое по первому аргументу с константой Липшица L_Φ .

Функцией точных значений назовем отображение:

$$Z(t_j, \Delta, h) = z_j \in Y, \quad j = -m, \dots, M.$$

Знание функции точных значений эквивалентно знанию точного решения исходной задачи в узлах. В дальнейшем для простоты будем предполагать, что стартовые значения совпадают с начальным значением функции точных значений: $y_i = z_i, i = -m, \dots, 0$.

Будем говорить, что метод (9) сходится, если существуют константа C и функция $q(\Delta, h), \lim_{\Delta \rightarrow 0, h \rightarrow 0} q(\Delta, h) = 0$, такие, что

$$\| z_j - y_j \|_Y \leq Cq(\Delta, h)$$

для всех $j = 0, \dots, M$. Функция $q(\Delta, h)$ определяет порядок сходимости.

Порядок сходимости зависит от погрешности аппроксимации, стартовой погрешности (в нашем случае она отсутствует) и свойств устойчивости метода. Погрешностью аппроксимации (невязкой) назовем сеточную функцию

$$(10) \quad d_n = (z_{j+1} - S(z_j))/\Delta - \Phi(I(\{y_j\}_j)), \quad j = 0, \dots, M - 1.$$

Отметим, что для систем с наследственностью имеется два вида невязки всякого метода: невязка с интерполяцией и невязка без интерполяции [12, 9]. В (10) определена невязка с интерполяцией.

Будем говорить, что метод (9) имеет порядок погрешности аппроксимации $q(\Delta, h)$, если $\| d_j \|_Y \leq Cq(\Delta, h)$ для всех $j = 1, \dots, M$.

Назовем метод (9) устойчивым, если $L_S = L_S(\Delta, h) \leq 1$.

Теорема 1 (Теорема сходимости в общей нелинейной схеме). Пусть метод (9) устойчив, пусть погрешность аппроксимации имеет порядок $q(\Delta, h)$ и $\lim_{\Delta, h \rightarrow 0} q(\Delta, h) = 0$, тогда метод сходится с порядком $q(\Delta, h)$.

Доказательство. Обозначим норму погрешности $\delta_j = \| z_j - y_j \|_Y, j = 0, \dots, M$, тогда для $j = 0, \dots, M - 1$ имеем, используя липшицевость функций S, Φ и I :

$$(11) \quad \begin{aligned} \delta_{j+1} &= \| S(z_j) + \Delta\Phi(I(\{z_i\}_j)) + \Delta d_j - S(y_j) - \Delta\Phi(I(\{y_i\}_j)) \|_Y \leq \\ &\leq L_S\delta_j + \Delta L_\Phi L_I \max_{j-m \leq i \leq j} \delta_i + \Delta \| d_j \|_Y . \end{aligned}$$

Обозначим через $\hat{\delta}_j$ максимальную предысторию погрешности: $\hat{\delta}_j = \max_{j-m \leq i \leq j} \delta_i$, тогда из (11) получаем

$$\hat{\delta}_{j+1} \leq L_S\hat{\delta}_j + \Delta L_\Phi L_I \hat{\delta}_j + \Delta \| d_j \|_Y .$$

Используя условие устойчивости, отсюда получаем

$$\hat{\delta}_{j+1} \leq (1 + \Delta L_\Phi L_I)\hat{\delta}_j + \Delta \| d_j \|_Y .$$

Из этой оценки, стандартными методами выводится оценка

$$\hat{\delta}_j \leq \hat{\delta}_0 \exp(TL_\Phi L_I) + \| d_j \|_Y \frac{\exp(TL_\Phi L_I)}{L_\Phi L_I} ,$$

справедливая для всех $j = 0, \dots, M$. Отсюда вытекает заключение теоремы. \square

Приведение нелинейной разностной схемы к явному виду (9) зачастую оказывается сложной задачей, особенно проверка условия устойчивости. Рассмотрим аппроксимацию этой схемы в виде итерационного процесса

$$(12) \quad y_{j+1}[k] = S_k(y_{j+1}[k-1]) + \Delta \Phi_k(y_{j+1}[k-1], I(\{y_i[K]\}_j)), \quad k = 1, \dots, K.$$

В качестве начального приближения этого итерационного процесса можно взять

$$y_{j+1}[0] = y_j[K],$$

(число K фиксировано), тогда итерационный процесс (12) приводится к виду

$$(13) \quad y_{j+1}[K] = \hat{S}_K(y_j[K]) + \Delta \hat{\Phi}_K(I(\{y_i[K]\}_j)).$$

Определения, введенные выше для общей нелинейной схемы (9) очевидным образом трансформируются для аппроксимационной схемы (13).

Будем говорить, что метод (13) сходится, если существуют константа C и функция $q(\Delta, h, K)$,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0, h \rightarrow 0, K \rightarrow \infty} q(\Delta, h, K) = 0,$$

такие, что

$$\|z_j - y_j[K]\|_Y \leq Cq(\Delta, h, K)$$

для всех $j = 0, \dots, M$.

Назовем метод (13) устойчивым, если для констант Липшица операторов \hat{S}_K выполняются оценки

$$(14) \quad L_{\hat{S}_K} = L_{\hat{S}_K}(\Delta, h, K) \leq 1.$$

Аналогичным образом определяется погрешность аппроксимации метода (13).

Справедлива теорема, которая доказывается также, как предыдущая.

Теорема 2 (Теорема сходимости в аппроксимационной схеме). Пусть метод (13) устойчив, функции $\hat{\Phi}_K$ и I липшицевы, погрешность аппроксимации имеет порядок $q(\Delta, h, K)$, $\lim_{\Delta \rightarrow 0, h \rightarrow 0, K \rightarrow \infty} q(\Delta, h, K) = 0$, тогда метод сходится с порядком $q(\Delta, h, K)$.

4. ВЛОЖЕНИЕ НЕЯВНОГО МЕТОДА В ОБЩУЮ НЕЛИНЕЙНУЮ СХЕМУ

Произведем вложение метода (7) в схему, описанную в предыдущем разделе. Без ограничения общности будем рассматривать однородные граничные условия (3)

$$u(0, t) = 0, \quad u(X, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Обозначим $y_j = (u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{N-1})^T \in Y$, здесь Y — векторное пространство размерности $N-1$, T — знак транспонирования.

В пространстве Y введем оператор A

$$Au_j^i = -a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2},$$

а также векторные функции $\omega(y_j)$ как вектор с компонентами $\omega(u_j^i)$ и $f_j(I(\{y_i\}_j))$ как вектор с компонентами $f(x_i, t_{j+1}, I(\{y_i\}_j))$ тогда систему (6) можно переписать в виде уравнения

$$(15) \quad \omega(y_{j+1}) + \Delta Ay_{j+1} = \omega(y_j) + \Delta f_j(I(\{y_i\}_j)).$$

Аналогичным образом обозначим $y_j[k] = (u_j^1[k], u_j^2[k], \dots, u_j^{N-1}[k])^T \in Y$, через $\omega'(y_j)$ обозначим матрицу, на главной диагонали в i -той строке стоят

элементы $\omega'(u_j^i)$, а все другие элементы нулевые. Тогда итерационный процесс (7) с числом итераций K может быть записан в виде

$$(16) \quad (\omega'(y_{j+1}[k-1]) + \Delta A)y_{j+1}[k] = \omega'(y_{j+1}[k-1])y_{j+1}[k-1] + \omega(y_j[K]) - \omega(y_{j+1}[k-1]) + \Delta f_j(I(\{y_i\}_j[K])), \quad k = 1, \dots, K,$$

$$(17) \quad y_{j+1}[0] = y_j[K].$$

Итерационный процесс (8) также может быть записан в векторной форме

$$(18) \quad (E + \Delta \tilde{A})y_{j+1}[k] = y_{j+1}[k-1] + \Delta \tilde{F}(y_{j+1}[k-1], I(\{y_i\}_j[K])),$$

$$\tilde{A}u_{j+1}^i[k-1] = -a^2 \frac{u_{j+1}^{i-1}[k-1] - 2u_{j+1}^i[k-1] + u_{j+1}^{i+1}[k-1]}{\omega'(u_{j+1}^i[k-1])h^2},$$

$\tilde{F}(y_{j+1}[k-1], I(\{y_i\}_j[K]))$ — вектор с компонентами

$$(19) \quad \frac{1}{\omega'(u_{j+1}^i[k])} \left(\frac{\omega(u_j^i) - \omega(u_{j+1}^i[k])}{\Delta} + f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot)) \right).$$

Так как матрица $E + \Delta \tilde{A}$ положительно определенная, то (18) может быть переписан в явной форме (12), где

$$(20) \quad S_k(y_{j+1}[k-1]) = (E + \Delta \tilde{A})^{-1}, \quad \Phi_k(y_{j+1}[k-1]) = (E + \Delta \tilde{A})^{-1} \tilde{F}(y_{j+1}[k-1], I(\{y_i\}_j[K])).$$

Перепишем систему (6) (или уравнение (15)) в виде

$$(21) \quad F(y_{j+1}) = \omega(y_{j+1}) + \Delta A y_{j+1} - B = 0, \quad B = \omega(y_j) + \Delta f_j(I(\{y_i\}_j)).$$

Тогда метод Ньютона (7) (или (16)) можно записать в виде

$$y_{j+1}[k+1] = y_{j+1}[k] - S^{-1}(y_{j+1}[k])F(y_{j+1}[k]),$$

$$S(y_{j+1}[k]) = (\omega'(y_{j+1}[k]) + \Delta A) = F'(y_{j+1}[k]), \quad k = 0, \dots, K-1.$$

Обозначим

$$(22) \quad \Psi(y) = y - S^{-1}(y)F(y),$$

тогда (13) можно записать в форме

$$(23) \quad y_{j+1}[K] = S_K(\Psi(\Psi(\dots \Psi(y_{j+1}[0]))) + \Delta \Phi_K(\Psi(\Psi(\dots \Psi(y_{j+1}[0]))) , I(\{y_i[K]\}_j)).$$

Учитывая (17), метод (23) можно также записать в виде

$$(24) \quad y_{j+1}[K] = S_K(\Psi(\Psi(\dots \Psi(y_j[K]))) + \Delta \Phi_K(\Psi(\Psi(\dots \Psi(y_j[K]))) , I(\{y_i[K]\}_j))$$

Вложение в схему (13) произведено. Теперь нужно проверить условие устойчивости, показать липшицевость $\hat{\Phi}_K$ и определить порядок невязки.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ

Проверим, что при определенных условиях оператор $\Psi(y)$ из (22) является сжимающим, откуда вытекает условие устойчивости в аппроксимационной схеме. В качестве нормы в пространстве Y здесь и в дальнейшем будем брать норму-максимум $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N-1} |x_i|$. В качестве матричной нормы — соответствующую индуцированную норму.

Пусть y и $y + \varepsilon$ — два вектора из окрестности D_r , радиуса r , с центром в корне уравнения (21). Тогда

$$\begin{aligned} \Psi(y + \varepsilon) - \Psi(y) &= y + \varepsilon - S^{-1}(y + \varepsilon)F(y + \varepsilon) - y + S^{-1}(y)F(y) = \\ &= \varepsilon - S^{-1}(y + \varepsilon)F(y + \varepsilon) + S^{-1}(y + \varepsilon)F(y) - S^{-1}(y + \varepsilon)F(y) + S^{-1}(y)F(y) = \\ (25) \quad &= \{\varepsilon - S^{-1}(y + \varepsilon)(F(y + \varepsilon) - F(y))\} + \{S^{-1}(y)F(y) - S^{-1}(y + \varepsilon)F(y)\}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы каждая фигурная скобка в (25) оценивалась по норме величины меньшей, чем $\frac{q}{2}\|\varepsilon\|$, $q < 1$, тогда оператор $\Psi(y)$ будет сжимающим.

Так как

$$S(y) = F'(y), \quad S'(y) = F''(y),$$

где $F''(y)$ — диагональная матрица, на диагонали которой стоят элементы $\omega''(y^i)$, то

$$F(y + \varepsilon) - F(y) = S(y + \varepsilon)\varepsilon - \frac{1}{2}F''(\vartheta_{11})\varepsilon^2,$$

где вектор ϑ_{11} лежит на отрезке прямой, соединяющей вектора y и $y + \varepsilon$, ε^2 — вектор с координатами $(\varepsilon^i)^2$.

В силу равномерной ограниченности $\omega''(y^i)$, имеем $\|\omega''(u)\| \leq 2C_1$. Далее, из (5) следует, что

$$\|F'^{-1}(y)\| \leq C_2, \quad \|F'^{-1}(y + \varepsilon)\| \leq C_2,$$

в результате получаем соотношение

$$\|\{\varepsilon - S^{-1}(y + \varepsilon)(F(y + \varepsilon) - F(y))\}\| \leq C_1 C_2 \|\varepsilon\|^2.$$

Потребуем выполнение условия

$$(26) \quad C_1 C_2 \|\varepsilon\| < \frac{q}{2};$$

это можно обеспечить за счет уменьшения r . Например, поскольку $\|\varepsilon\| < 2r$, условие (26) будет верно, если

$$(27) \quad 4C_1 C_2 r < q.$$

В результате получаем

$$\|\{\varepsilon - S^{-1}(y + \varepsilon)(F(y + \varepsilon) - F(y))\}\| \leq \frac{q}{2}\|\varepsilon\|.$$

Оценим вторую фигурную скобку в (25).

$$\begin{aligned} \{S^{-1}(y)F(y) - S^{-1}(y + \varepsilon)F(y)\} &= S^{-1}(y)(S(y + \varepsilon) - S(y))S^{-1}(y + \varepsilon)F(y) = \\ (28) \quad &= S^{-1}(y)S'(\vartheta_{12})S^{-1}(y + \varepsilon)F(y)\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу условия (5) выполняется

$$\|S^{-1}(y)\| \leq C_2, \quad \|S^{-1}(y + \varepsilon)\| \leq C_2.$$

Оценим величину $F(y)$, если в качестве начального приближения метода Ньютона брать значения на предыдущем слое $y = y_{j+1}[0] = y_j[K]$, тогда из (21) вытекает

$$F(y) = \Delta Ay_j[K] - \Delta f_j(y_j[K]).$$

Отсюда, в силу предположения ограниченности Ay и $f_j(y)$, следует

$$(29) \quad \|F(y)\| \leq \Delta C_3.$$

Из (28) – (29) сделаем ограничение на шаг

$$(30) \quad 2\Delta C_1 C_2^2 C_3 < \frac{q}{2},$$

тогда

$$\| \{ S^{-1}(y)F(y) - S^{-1}(y + \varepsilon)F(y) \} \| \leq \frac{q}{2} \|\varepsilon\|.$$

Отметим, что условие (27) также можно переписать в виде ограничения на малость шага Δ , подобно (30).

Таким образом, доказана

Лемма 1. Если выполняются условия (27), (30), то оператор $\Psi(y)$ из (22) является сжимающим.

Следствие. При указанных условиях метод (7) сходится к точному решению (6) и имеет место оценка

$$(31) \quad \|y_{j+1}[K] - y_{j+1}\| \leq q^K \|y_{j+1}[0] - y_{j+1}\|.$$

Также отсюда вытекает

Теорема 3 (Теорема о устойчивости в аппроксимационной схеме). Если выполняются условия (27), (30), то неявный аппроксимационный метод (7), записанный в форме (13), устойчив в смысле определения (14).

Доказательство. Из определения оператора (20) при любом k , в частности $k = K$ следует, что евклидова норма матрицы $S_K(y_{j+1}[K-1]) \leq 1$. Так как оператор $\Psi(y)$ является сжимающим, то из (24) вытекает условие устойчивости (14) в аппроксимационной схеме. \square

Замечание 1. Оператор $\hat{\Phi}_K$, определенный согласно (13), (24) липшицев.

В самом деле, оператор $\tilde{F}(y_{j+1}[k-1], I(\{y_i\}_j[K]))$, определенный согласно (19), липшицев. Отсюда липшицевость оператора $\hat{\Phi}_K$.

6. ПОРЯДОК НЕВЯЗКИ МЕТОДА

Исследуем невязку метода (7), записанного в форме (13). Сначала рассмотрим метод (6).

Невязкой без интерполяции метода (6) назовем сеточную функцию

$$\psi_j^i = \frac{\omega(u(x_i, t_{j+1})) - \omega(u(x_i, t_j))}{\Delta} + Au(x_i, t_{j+1}) - f(x_i, t_{j+1}, u_{t_{j+1}}(x_i, \cdot)),$$

где $i = 1, \dots, N - 1, j = 0, \dots, M - 1$.

Лемма 2. Если точное решение $u(x, t)$ уравнения (2) дважды непрерывно дифференцируемо по t и четырежды непрерывно дифференцируемо по x , функция $\omega(u)$ дважды непрерывно дифференцируема в ограниченной области, содержащей значения решения $u(x, t)$, то найдется такая постоянная C_5 , что

$$(32) \quad |\psi_j^i| \leq C_5(\Delta + h^2), \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, M - 1.$$

Доказательство. Разложим величины, входящие в определение ψ_j^i в окрестности точки (x_i, t_{j+1}) :

$$\psi_j^i = \frac{1}{\Delta} (\omega(u(x_i, t_{j+1})) - [\omega(u(x_i, t_{j+1})) - \omega'(u(x_i, t_{j+1}))u'_t(x_i, t_{j+1})\Delta + \omega''(\theta_1)\frac{\Delta^2}{2}]) + Au(x_i, t_{j+1}) - f(x_i, t_{j+1}, u_{t_{j+1}}(x_i, \cdot)).$$

В силу того, что $u(x, t)$ является точным решением уравнения (2), а

$$-Au(x_i, t_{j+1}) = \frac{\partial^2 u(x_i, t_{j+1})}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u(\theta_6, t_{j+1})}{\partial x^4} \frac{h^4}{12},$$

из сделанных предположений вытекает (32).

Невязкой с интерполяцией метода (6) назовем сеточную функцию

$$(33) \quad \hat{\psi}_j^i = \frac{\omega(u(x_i, t_{j+1})) - \omega(u(x_i, t_j))}{\Delta} + Au(x_i, t_{j+1}) - f(x_i, t_{j+1}, I(\{u(x_i, t_k)\}_j)),$$

где $I(\{u(x_i, t_k)\}_j)$ — результат кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением дискретной предыстории точного решения. Так как такая интерполяция с экстраполяцией имеет второй порядок по Δ [13], с. 97, а функционал f липшицев по последнему аргументу, то из леммы 2 следует лемма 3.

Лемма 3. В условиях леммы 2 найдется такая постоянная C_6 , что

$$|\hat{\psi}_j^i| \leq C_6(\Delta + h^2), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, M-1.$$

Исследуем, как изменится решение уравнения (6) при изменении параметров уравнения.

Наряду с уравнением вида (6), записанным в форме (21), рассмотрим уравнение вида

$$(34) \quad \bar{F}(\bar{y}_{j+1}) = \omega(\bar{y}_{j+1}) + \Delta A \bar{y}_{j+1} - \bar{B} = 0, \quad \bar{B} = \omega(\bar{y}_j) + \Delta f_j(I(\{\bar{y}_l\}_j)),$$

где

$$\|\bar{y}_l - y_l\| \leq \delta, \quad l = 1, \dots, j.$$

Лемма 4. Справедлива оценка

$$(35) \quad \|\bar{y}_{j+1} - y_{j+1}\| \leq C_7 \delta.$$

Доказательство. Вычтем из уравнения (34) уравнение (21), получим

$$\omega(\bar{y}_{j+1}) + \Delta A \bar{y}_{j+1} - \omega(y_{j+1}) - \Delta A y_{j+1} = \omega(\bar{y}_j) + \Delta f_j(I(\{\bar{y}_l\}_j)) - \omega(y_j) - \Delta f_j(I(\{y_l\}_j)).$$

Распишем данное уравнение для координаты i :

$$\omega(\bar{y}_{j+1}^i) - \omega(y_{j+1}^i) + \Delta A(\bar{y}_{j+1}^i - y_{j+1}^i) = \omega(\bar{y}_j^i) - \omega(y_j^i) + \Delta f_j(I(\{\bar{y}_l^i\}_j)) - \Delta f_j(I(\{y_l^i\}_j)).$$

Воспользуемся формулой конечных приращений для первых двух слагаемых в левой и правой частях этого равенства:

$$(\omega'(\theta) + \Delta A)(\bar{y}_{j+1}^i - y_{j+1}^i) = \omega'(\theta_1)(\bar{y}_j^i - y_j^i) + \Delta f_j(I(\{\bar{y}_l^i\}_j)) - \Delta f_j(I(\{y_l^i\}_j)).$$

В силу условия (5), свойств оператора A и липшицевости операторов f_j и I найдется такая постоянная C_7 , что выполняется неравенство (35). \square

Теорема 4 (Теорема о порядке невязки в аппроксимационной схеме). *Если выполняются условия (5), (27), (30), то неявный аппроксимационный метод (7), записанный в форме (13), имеет порядок невязки $\Delta + h^2 + \lambda^{2K}$, $0 < \lambda < 1$.*

Доказательство. Перепишем уравнение (33) в виде

$$\omega(u(x_i, t_{j+1})) + \Delta Au(x_i, t_{j+1}) = \omega(u(x_i, t_j)) + \Delta f(x_i, t_{j+1}, I(\{u(x_i, t_k)\}_j)) + \Delta \hat{\psi}_j^i,$$

В силу лемм 3 и 4 выполняется оценка

$$|u(x_i, t_{j+1}) - u_{j+1}^i| \leq C_6 C_7 \Delta (\Delta + h^2).$$

В силу (31) отсюда вытекает

$$|u(x_i, t_{j+1}[K]) - u_{j+1}^i[K]| \leq C_6 C_7 \Delta (\Delta + h^2 + \lambda^{2K}), \quad 0 < \lambda < 1,$$

а отсюда вытекает заключение теоремы. □

Из теорем 2, 3, 4 вытекает теорема сходимости.

Теорема 5. *Неявный аппроксимационный метод (7), записанный в форме (13) или (24), сходится и имеет порядок $\Delta + h^2 + \lambda^{2K}$, $0 < \lambda < 1$.*

7. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

На области $x \in (0, \pi)$, $t \in (0, 4\pi)$ рассмотрим начально краевую задачу

$$(36) \quad \frac{\partial e^u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0.5 e^{\sin x \cos t} \int_{-\pi}^0 u(x, t+s) ds - u + 2 \sin x \cos t,$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, s) = \sin x \cos s, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad -\pi \leq s \leq 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Начально краевая задача (36) имеет точное решение $u(x, t) = \sin x \cos t$.

Точность метода Ньютона выбрана $\epsilon = 10^{-5}$. Для приближенного вычисления определенных интегралов в функционале распределенного запаздывания используется метод трапеций.

Выпишем для данного примера оценки (27) и (30) в явном виде. Поскольку $\|u\| \leq 1$, то для произвольного вектора y из окрестности D_r с центром в корне уравнения (36) имеем $\|y\| \leq 1 + r$. С учетом этого имеем, $\|\omega''(y)\| \leq e^{1+r}$, следовательно, можно положить $C_1 = e^{1+r}/2$. Далее, согласно [14] $\|(\omega'(y) + \Delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{R_*}$, где величина R_* выражает минимум (по строкам) диагонального преобладания $R_*(X) = \min_{1 \leq i \leq N-1} |x_{ii}| - \sum_{j \neq i} |x_{ij}|$. Ясно, что $R_* > e^{-1-r}$, а потому можно положить $C_2 = e^{1+r}$. В результате условие (27) принимает вид $2r e^{2+2r} \leq q$.

Оценивая величину $\|Ay - f(y)\|$ на точном решении, получаем, что можно положить $C_3 = 2 + e$. В итоге, оценка (30) примет вид $2\Delta e^3 (2 + e) \leq q$.

В таблице приведены нормы разности точного и сеточного решений $\mathbf{diff} = \max_{i,j} |u_j^i - u(x_i, t_j)|$. Здесь N и M — число отрезков разбиения по пространству и времени соответственно.

No	1	2	3	4	5	6	7	8
N	8	8	8	8	32	32	32	32
M	8	16	32	64	8	16	32	64
diff	1.1894	0.5934	0.2865	0.1933	0.1446	0.0718	0.0368	0.0197

В данном примере результаты вычислительного эксперимента хорошо иллюстрируют теоретические результаты о первом порядке сходимости по времени и втором по пространству.

REFERENCES

- [1] A.J. Arenas, G. Gonzalez-Parra, B. M. Caraballo, *A nonstandard finite difference scheme for a nonlinear Black–Scholes equation*, Mathematical and Computer Modelling, **57** (2013), 1663–1670. MR3033392
- [2] V.K. Srivastava, S. Kumar, M.K. Awasthi, B. Kumar Singh, *Two-dimensional time fractional-order biological population model and its analytical solution*, Egypt. J. Basic Appl. Sci, **1** (2014), 71–76.
- [3] S. Kutluay, A.R. Bahadir, A. Ozdez, *Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **103** (1999), 251–261. MR1677653
- [4] J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, New York: Springer-Verlag, 1996. MR1415838
- [5] Kropielnicka K., *Convergence of Implicit Difference Methods for Parabolic Functional Differential Equations*, Int. Journal of Mat. Analysis, **1**:5–8 (2007), 257–277. Zbl 1140.65061
- [6] A.H. Bhrawy, M.A. Abdelkawy, F. Mallawi, *An accurate Chebyshev pseudospectral scheme for multi-dimensional parabolic problems with time delays*, Bound Value Probl., **103** (2015). <https://doi.org/10.1186/s13661-015-0364-y>
- [7] A.A. Samarskii, *Theory of Difference Schemes*, Moscow: Nauka, 1989.
- [8] V.G. Pimenov, *General Linear Methods for the Numerical Solution of Functional-Differential Equations*, Differential Equations, **37**:1 (2001), 116–127. Zbl 1002.65079
- [9] V. G. Pimenov, A.B.Lozhnikov, *Difference schemes for the numerical solution of the heat conduction equation with aftereffect*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **275**, 137–148 (2011). Zbl 1301.65094
- [10] A. Lekomtsev, V. Pimenov, *Convergence of the scheme with weights for the numerical solution of a heat conduction equation with delay for the case of variable coefficient of heat conductivity*, Appl. Math. Comput., **256** (2015), 83–93. MR3316050
- [11] S.I. Solodushkin, I.F. Yumanova, R.H. De Staelen, *First order partial differential equations with time delay and retardation of a state variable*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **289** (2015), 322–330. MR3350779
- [12] V.G. Pimenov, *Difference methods for solving partial differential equations with heredity*, Ekaterinburg: Publishing House of the Ural University, 2014.
- [13] A.V. Kim, V.G. Pimenov, *i-Smooth analysis and numerical methods for solving functional-differential equations*, Regular and chaotic dynamics, Moscow – Izhevsk, 2004.
- [14] Yu.S. Volkov, V.L. Miroshnichenko, *Norm estimates for the inverses of matrices of monotone type and totally positive matrices*, Siberian Mathematical Journal, **50**:6 (2009), 982–987. Zbl 1224.15011

TATIANA VLADIMIROVNA GORBOVA
 URAL FEDERAL UNIVERSITY
 4, TURGENEVA STR.,
 EKATERINBURG, 620000, RUSSIA
E-mail address: tvgorbova@gmail.com

VLADIMIR GERMANOVICH PIMENOV
 URAL FEDERAL UNIVERSITY AND INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS URAL BRANCH
 OF THE RAS
 4, TURGENEVA STR.,
 EKATERINBURG, 620000, RUSSIA
E-mail address: v.g.pimenov@urfu.ru

SVYATOSLAV IGOREVICH SOLODUSHKIN
URAL FEDERAL UNIVERSITY AND INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS URAL BRANCH
OF THE RAS
4, TURGENEVA STR.,
EKATERINBURG, 620000, RUSSIA
E-mail address: s.i.solodushkin@urfu.ru