S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 165–174 (2019) УДК 512.54

DOI 10.33048/semi.2019.16.006 MSC 20F18,20H25

КРИТЕРИЙ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ МАТРИЦЫ В ГРУППЕ $UT_n(R)$ НАД КОММУТАТИВНЫМ И АССОЦИАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ R С ЕДИНИЦЕЙ

Н.Г.ХИСАМИЕВ, С.Д.ТЫНЫБЕКОВА, А.А.КОНЫРХАНОВА

Abstract. We find necessary and sufficient universality conditions of a matrix from the unitriangular matrix group of arbitrary finite dimension over a commutative associative ring with unity. An algorithm is used to determine the universality of the element of the unitriangular matrix group over the ring of polynomials with a finite number of variables with integer coefficients.

Keywords: unitriangular matrix group, derived subgroup, universal element, ring, Euclidean ring.

Через $UT_n(R)$ обозначим группу всех верхних унитреугольных матриц над коммутативным ассоциативным кольцом R с единицей. Ее коммутант $UT'_n(R)$ состоит из всех унитреугольных матриц с нулевой первой побочной диагональю (см.например, [1]).

В работе А. Биер [2] доказано, что в случае поля $\mathbb{F}$ характеристики нуль каждый элемент коммутанта $UT'_n(\mathbb{F})$ является коммутатором, то есть в группе $UT_n(\mathbb{F})$ для любого элемента f из $UT'_n(\mathbb{F})$ всегда разрешимо уравнение вида

$$[x_1, x_2] = f,$$

где $[x_1, x_2] = {x_1}^{-1}{x_2}^{-1}x_1x_2$ — коммутатор от неизвестных x_1 и x_2.

Этот результат существенно усилен в работе Н.С. Бахта [3], где доказано, что любой элемент $f \in UT'_n(R)$ представим в виде $[g, x]$, где g — фиксированный

Khisamiev, N.G., Tynybekova, S.D., Konyrkhanova, A.A., A criterion for the universality of a matrix from the group $UT_n(R)$ over a commutative and associative ring R with unity.

Работа выполнена при финансовой поддержки Фонда Науки МОН РК (грант ИРН AP0513249).

Поступила 12 июня 2017 г., опубликована 6 февраля 2019 г.

элемент группы $UT_n(R)$. В качестве элемента g можно взять любой элемент, который имеет первую побочную диагональ, состоящую из единиц. Кроме этого, в [4] аналогичные результаты получены для членов нижнего центрального ряда группы $UT_n(R)$ (см. также [5]). В [6] содержится обзор результатов по разрешимости уравнений в группах, упоминающий обсуждаемые результаты.

Элемент g группы G называется универсальным, если уравнение

$$[g, x] = f, \tag{1}$$

разрешимо для любого элемента f из коммутанта G' группы G.

Это определение введено В.А.Романьковым. В работах А.А.Конырхановой [7,8] впервые были получены некоторые необходимые и достаточные условия универсальности элемента для групп $UT_n(\mathbb{F})$ и $UT_n(\mathbb{Z})$, где $\mathbb{F}$ - произвольное поле и $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. В работе А.А.Конырхановой, В.А.Романькова [9] найдены условия разрешимости коммутаторных уравнениях лиевых алгебрах. В работе А.А.Конырхановой, Н.Г.Хисамиева [10] получены достаточные условия универсальности матрицы группы $UT_n(R)$ над коммутативным и ассоциативным кольцом с единицей.

В данной работе найдены необходимые и достаточные условия универсальности элемента группы унитреугольных матриц произвольной конечной размерности над коммутативным ассоциативным кольцом с единицей. Доказаны вычислимость множества универсальных элементов группы всех унитреугольных матриц размерности n над: a) вычислимым полем; b) кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел; c) кольцом $\mathbb{Z}[x_0, ..., x_{m-1}]$ многочленов от m переменных.

В дальнейшем R обозначает коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, а $UT_n(R)$ - группу унитреугольных матриц размерности n. Через $g_{i,j}$ обозначается элемент кольца R, находящийся на пересечении i-ой строки и j-го столбца матрицы g.

Если идеал, порожденный элементами g_1, g_2 кольца R, совпадает с R, то есть существуют элементы u и v кольца R такие, что $g_1 u + g_2 v = 1$, то будем говорить, что g_1 и g_2 взаимно просты.

Так как группа $UT_2(R)$ абелева, то в дальнейшем предполагаем, что $n > 2$.

Теорема 1 (Критерий универсальности)**.** *Матрица g группы $UT_n(R)$ унитреугольных матриц размерности $n > 2$ над коммутативным ассоциативным кольцом R с единицей универсальна тогда и только тогда, когда справедливы условия:*

1. элементы $g_{i,i+1}$, $1 < i < n-1$, первой побочной диагонали матрицы g, кроме крайних, обратимы в R;

2. элементы $g_{1,2}$ и $g_{n-1,n}$ взаимно просты, т.е. справедливо равенство

$$g_{1,2}u + g_{n-1,n}v = 1, \tag{2}$$

для некоторых $u, v \in R$.

Доказательство. Доказательству необходимости условия 1 предпошлем следующие леммы.

Лемма 1. *Если матрица $g \in UT_n(R)$ универсальна, то для любого $i = 2, ..., n-2$ справедливо*

$$g_{i,i+1} \neq 0.$$

Доказательство. Допустим противное, т.е. для некоторого $1 < i < n-1$

$$g_{i,i+1} = 0. \tag{3}$$

Так как, матрица g универсальна, то уравнение (1) разрешимо для любой матрицы $f \in UT'_n(R)$.

Из (1) следует, что для элементов первой побочной диагонали матрицы x справедливы равенства:

$$\begin{cases} g_{1,2}x_{2,3} - x_{1,2}g_{2,3} = f_{1,3}, \\ g_{2,3}x_{3,4} - x_{2,3}g_{3,4} = f_{2,4}, \\ g_{3,4}x_{4,5} - x_{3,4}g_{4,5} = f_{3,5}, \\ \ldots \\ g_{n-3,n-2}x_{n-2,n-1} - x_{n-3,n-2}g_{n-2,n-1} = f_{n-3,n-1}, \\ g_{n-2,n-1}x_{n-1,n} - x_{n-2,n-1}g_{n-1,n} = f_{n-2,n}. \end{cases} \tag{4}$$

Из равенства (3) следует, что два соседних уравнения системы (4) будут такими:

$$\begin{cases} g_{i-1,i}x_{i,i+1} = f_{i-1,i+1}, \\ -x_{i,i+1}g_{i+1,i+2} = f_{i,i+2}. \end{cases} \tag{5}$$

Так как матрица g универсальна, то система (5) имеет решение при любых значениях правой части. Пусть $f_{i-1,i+1} = 1$. Тогда из первого уравнения системы (5) имеем $x_{i,i+1} = g^{-1}{}_{i-1,i}$. Отсюда второе уравнение запишется так:

$$g^{-1}_{i-1,i}g_{i+1,i+2} = f_{i,i+2}. \tag{6}$$

Если положить $f_{i,i+2} = 0$, то из (6) следует, что $g_{i+1,i+2} = 0$, а если $f_{i,i+2} = 1$, то получаем $g_{i+1,i+2} \neq 0$. Получили противоречие. Следовательно, неравенство $g_{i,i+1} \neq 0$ справедливо. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Если матрица $g \in UT_n(R)$ универсальна, то*

$$g_{i-1,i} = g_{i,i+1}h_{i-1,i+1} \tag{7}$$

для некоторой матрицы h, $1 < i < n-1$.

Доказательство. Два соседние уравнения системы (4), содержащие $g_{i,i+1}$ следующие:

$$\begin{cases} g_{i-1,i}x_{i,i+1} - x_{i-1,i}g_{i,i+1} = f_{i-1,i+1}, \\ g_{i,i+1}x_{i+1,i+2} - x_{i,i+1}g_{i+1,i+2} = f_{i,i+2}. \end{cases} \tag{8}$$

Пусть $f_{i-1,i+1} = 0$, $f_{i,i+2} = 1$. Так как матрица g универсальна, то эта система имеет решение $x^0{}_{i-1,i}$, $x^0{}_{i,i+1}$, $x^0{}_{i+1,i+2}$. Тогда справедливы равенства:

$$\begin{cases} g_{i-1,i}x^0{}_{i,i+1} - x^0{}_{i-1,i}g_{i,i+1} = 0, \\ g_{i,i+1}x^0{}_{i+1,i+2} - x^0{}_{i,i+1}g_{i+1,i+2} = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} g_{i-1,i}x^0{}_{i,i+1} = x^0{}_{i-1,i}g_{i,i+1}, \\ g_{i,i+1}x^0{}_{i+1,i+2} - x^0{}_{i,i+1}g_{i+1,i+2} = 1. \end{cases} \tag{10}$$

По лемме 1 $g_{i-1,i} \neq 0$. Умножим второе равенство системы (9) на $g_{i-1,i}$. Получаем:

$$g_{i-1,i}g_{i,i+1}x^0{}_{i+1,i+2} - g_{i-1,i}x^0{}_{i,i+1}g_{i+1,i+2} = g_{i-1,i}.$$

Отсюда и из первого равенства системы (10) имеем:

$$g_{i-1,i}g_{i,i+1}{x^0}_{i+1,i+2} - {x^0}_{i-1,i}g_{i,i+1}g_{i+1,i+2} = g_{i-1,i}.$$

Следовательно,

$$g_{i,i+1}(g_{i-1,i}{x^0}_{i+1,i+2} - {x^0}_{i-1,i}g_{i+1,i+2}) = g_{i-1,i}.$$

Если в этом же равенстве положить

$$h_{i-1,i+1} = g_{i-1,i}{x^0}_{i+1,i+2} - {x^0}_{i-1,i}g_{i+1,i+2},$$

то получим требуемое равенство (7). Лемма доказана. □

Докажем, необходимость условия 1 теоремы 1. Пусть матрица g универсальна. В первом уравнении системы (8) положим $f_{i-1,i+1} = 1$. Отсюда и из (7) следует, что уравнение

$$g_{i,i+1}h_{i-1,i+1}x_{i,i+1} - x_{i-1,i}g_{i,i+1} = 1$$

имеет решение ${x^1}_{i,i+1}$, ${x^1}_{i-1,i}$, т.е.,

$$g_{i,i+1}(h_{i-1,i+1}{x^1}_{i,i+1} - {x^1}_{i-1,i}) = 1.$$

Следовательно, $g_{i,i+1}$ обратимый элемент кольца. Необходимость условия 1 теоремы 1 доказана.

Доказательству необходимости условия 2 теоремы 1 предпошлем следующее определение и леммы.

Определение 1. *Элементы c, d кольца R назовем эквивалентными относительно матрицы $g \in UT_n(R)$ и будем обозначать $c \sim_g d$, если $c - d$ принадлежит идеалу, порожденному $g_{1,2}$ и $g_{n-1,n}$.*

Лемма 3. *Пусть матрица g группы $UT_n(R)$ размерности $n > 3$ универсальна и матрица x^0 является решением уравнения (1), где*

$$f_{i,j} = 0, \tag{11}$$

для любых $\langle i,j\rangle$ таких, что $1 \le i < j \le n, \langle i,j\rangle \ne \langle 1,n\rangle$. Тогда для элементов $(j-i)$-й побочной диагонали матрицы x^0 справедливы эквивалентность:

$$x^0_{i,j} \sim_g \varphi_{i,j}(x^0_{2,j-i+2}, x^0_{2,j-i+1}, ..., x^0_{23}) \tag{12}$$

для некоторого многочлена $\varphi_{i,j}(x^0)$ первой степени над кольцом R, независящим от матрицы x^0.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу $1 \le j - i \le n-2$. Пусть матрица g универсальна. По доказанному условию 1 теоремы 1 имеем:

$$g_{i,i+1} \text{— обратимый элемент кольца } R, \tag{13}$$

$1 < i < n-1$. Из (4) и (11) следует, что для элементов первой побочной диагонали матрицы x справедливы равенства:

$$\begin{cases} g_{1,2}x^0_{2,3} - x^0_{1,2}g_{2,3} = 0, \\ g_{2,3}x^0_{3,4} - x^0_{2,3}g_{3,4} = 0, \\ \dots \\ g_{k,k+1}x^0_{k+1,k+2} - x^0_{k,k+1}g_{k+1,k+2} = 0, \\ \dots \\ g_{n-3,n-2}x^0_{n-2,n-1} - x^0_{n-3,n-2}g_{n-2,n-1} = 0, \\ g_{n-2,n-1}x^0_{n-1,n} - x^0_{n-2,n-1}g_{n-1,n} = 0. \end{cases}$$

Отсюда и из (13) имеем:

$$\begin{cases} x^0_{1,2} = g^{-1}{}_{2,3} g_{1,2} x^0_{2,3}, \\ x^0_{3,4} = g^{-1}{}_{2,3} g_{3,4} x^0_{2,3}, \\ x^0_{4,5} = g^{-1}{}_{3,4} g_{4,5} x^0_{3,4}, \\ \ldots \\ x^0_{k+1,k+2} = g^{-1}{}_{k,k+1} g_{k+1,k+2} x^0_{k,k+1}, \\ \ldots \\ x^0_{n-2,n-1} = g^{-1}{}_{n-3,n-2} g_{n-2,n-1} x^0_{n-3,n-2}, \\ x^0_{n-1,n} = g^{-1}{}_{n-2,n-1} g_{n-1,n} x^0_{n-2,n-1}. \end{cases} \tag{14}$$

Отсюда легко следует, что лемма справедлива для элементов первой побочной диагонали матрицы x^0.

Пусть лемма справедлива для $(k-2)$-й побочной диагонали матрицы x^0, $1 < k < n-1$. Из (1), (11) следует, что для элементов $(k-1)$-й побочной диагонали матрицы x^0 справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} g_{1,2}x^0_{2,k+1} - x^0_{1,2}g_{2,k+1} + g_{1,3}x^0_{3,k+1} - x^0_{1,3}g_{3,k+1} + \ldots + g_{1,k}x^0_{k,k+1} - x^0_{1,k}g_{k,k+1} = 0, \\ g_{2,3}x^0_{3,k+2} - x^0_{2,3}g_{3,k+2} + g_{2,4}x^0_{4,k+2} - x^0_{2,4}g_{4,k+2} \\ +\ldots + g_{2,k+1}x^0_{k+1,k+2} - x^0_{2,k+1}g_{k+1,k+2} = 0, \\ \ldots \\ g_{s,s+1}x^0_{s+1,k+s} - x^0_{s,s+1}g_{s+1,k+s} + g_{s,s+2}x^0_{s+2,k+s} \\ -x^0_{s,s+2}g_{s+2,k+s} + \ldots + g_{s,k+s-1}x^0_{k+s-1,k+s} - x^0_{s,k+s-1}g_{k+s-1,k+s} = 0, \\ \ldots \\ g_{n-k-1,n-k}x^0_{n-k,n-1} - x^0_{n-k-1,n-k}g_{n-k,n-1} + g_{n-k-1,n-k+1}x^0_{n-k+1,n-1} \\ -x^0_{n-k-1,n-k+1}g_{n-k+1,n-1} + \ldots + g_{n-k-1,n-2}x^0_{n-2,n-1} - x^0_{n-k-1,n-2}g_{n-2,n-1} = 0, \\ g_{n-k,n-k+1}x^0_{n-k+1,n} - x^0_{n-k,n-k+1}g_{n-k+1,n} + g_{n-k,n-k+2}x^0_{n-k+2,n} \\ -x^0_{n-k,n-k+2}g_{n-k+2,n} + \ldots + g_{n-k,n-1}x^0_{n-1,n} - x^0_{n-k,n-1}g_{n-1,n} = 0, \end{cases} \tag{15}$$

Отсюда и(13) по индукционному предположению получим:

$$\begin{cases} x^0_{1,k} \sim_g g^{-1}{}_{k,k+1}\psi_{1,k}(x^0_{2,k}, x^0_{2,k-1}, \ldots, x^0_{2,3}), \\ x^0_{3,k+2} \sim_g g^{-1}{}_{2,3}g_{k+1,k+2}x_{2,k+1} + \psi_{3,k+2}(x^0_{2,k}, x^0_{2,k-1}, \ldots, x^0_{2,3}) \\ \ldots \\ x^0_{s+1,k+s} \sim_g g^{-1}{}_{s,s+1}g_{k+s-1,k+s}x^0_{s,k+s-1} + \psi_{s+1,k+s}(x^0_{2,k}, x^0_{2,k-1}, \ldots, x^0_{2,3}), \\ \ldots \\ x^0_{n-k,n-1} \sim_g g^{-1}{}_{n-k-1,n-k}g_{n-2,n-1}x_{n-k-1,n-2} + \psi_{n-k,n-1}(x_{2,k}, x^0_{2,k-1}, \ldots, x^0_{2,3}), \\ x^0_{n-k+1,n} \sim_g g^{-1}{}_{n-k,n-k+1}\psi_{n-k+1,n}(x^0_{2,k}, x^0_{2,k-1}, \ldots, x^0_{2,3}), \end{cases} \tag{16}$$

для некоторых многочленов $\psi_{i,k+i-1}(\overline{x})$, $1 \le i \le n-k+1$, где $3 < k < n-2$.

Для элементов $(n-2)$-й побочной диагонали матрицы $[g,x]$ справедливы равенства:

$$\begin{cases} g_{1,2}x^0_{2,n-1} - x^0_{1,2}g_{2,n-1} + g_{1,3}x^0_{3,n-1} - x^0_{1,3}g_{3,n-1} \\ +\ldots + g_{1,n-2}x^0_{n-2,n-1} - x^0_{1,n-2}g_{n-2,n-1} = 0, \\ g_{2,3}x_{3,n} - x^0_{2,3}g_{3,n} + g_{2,4}x^0_{4,n} - x^0_{2,4}g_{4,n} + \ldots + g_{2,n-2}x^0_{n-2,n} \\ -x^0_{2,n-2}g_{n-2,n} + g_{2,n-1}x^0_{n-1,n} - x^0_{2,n-1}g_{n-1,n} = 0, \end{cases}$$

Отсюда, из (14) и индукционному предположению имеем:

$$\begin{cases} x^0_{1,n-2} \sim_g g^{-1}{}_{n-2,n-1} g_{1,3} x^0_{3,n-1} + \psi_{1,n-2}(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3}), \\ x^0_{3,n} \sim_g g^{-1}{}_{2,3} g_{n-2,n} x^0_{2,n-2} + \psi_{3,n}(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3}), \end{cases} \tag{17}$$

для некоторых многочленов первых степеней $\psi_{1,n-2}(\overline{x})$, $\psi_{3,n}(\overline{x})$. Отсюда и из (14)–(16) следует лемма. □

Для углового элемента $[g,x]_{1,n}$ матрицы $[g,x]$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{gathered} [g,x]_{1,n} = g_{1,2}x_{2,n} - x_{1,2}g_{2,n} + g_{1,3}x_{3,n} - x_{1,3}g_{3,n} + \\ + ... + g_{1,n-2}x_{n-2,n} - x_{1,n-2}g_{n-2,n} + g_{1,n-1}x_{n-1,n} - x_{1,n-1}g_{n-1,n}. \end{gathered} \tag{18}$$

Средней частью углового элемента назовем выражение:

$$\begin{gathered} M(g,x) = g_{1,3}x_{3,n} - x_{1,3}g_{3,n} + g_{1,4}x_{4,n} - x_{1,4}g_{4,n} + \\ + ... + g_{1,n-2}x_{n-2,n} - x_{1,n-2}g_{n-2,n}. \end{gathered} \tag{19}$$

Из (18) и (19) имеем:

$$[g,x]_{1,n} = g_{1,2}x_{2,n} - x_{1,2}g_{2,n} + M(g,x) + g_{1,n-1}x_{n-1,n} - x_{1,n-1}g_{n-1,n}. \tag{20}$$

Лемма 4. *Если матрица g универсальна в группе $UT_n(R)$ и матрица x^0 является решением уравнения (1), где для матрицы f справедливы равенства (11), то имеет место эквивалентность:*

$$M(g,x^0) \sim_g 0. \tag{21}$$

Доказательство. Из (19) и леммы 3 следует, что многочлен $M(g,x^0)$ выражается через $x^0_{2,n-2}$, $x^0_{2,n-3}$, ..., $x^0_{2,3}$. Докажем сперва, что $x^0_{2,n-1}$ отсутствует в $M(g,x^0)$. По лемме 3 только $x^0_{1,n-2}$ и $x^0_{3,n}$ являются многочленами, содержащие $x^0_{2,n-2}$. Докажем, что в $M(g,x^0)$ этот параметр отсутствует. Из второй эквивалентности системы (16) при $k = n-3$ имеем:

$$x^0_{3,n-1} \sim_g g^{-1}_{2,3} g_{n-2,n-1} x^0_{2,n-2} + \varphi_{3,n-1}(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-2}, ..., x^0_{2,3}),$$

для некоторого многочлена $\varphi_{3,n-1}$ первой степени.

Отсюда и первой эквивалентности (17) следует

$$x^0_{1,n-2} \sim_g g^{-1}_{n-2,n-1} g_{1,3} g^{-1}_{2,3} g_{n-2,n-1} x^0_{2,n-2} + \varphi_{1,n-2}(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3}),$$

где

$$\varphi_{1,n-2}(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3}) = g^{-1}{}_{n-2,n-1} g_{1,3} \psi_{1,n-2}(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3}).$$

Следовательно,

$$x^0_{1,n-2} \sim_g g_{1,3} g^{-1}_{2,3} x^0_{2,n-2} + \varphi_{1,n-2}(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3}).$$

Отсюда и из второй эквивалентности системы (17) следует

$$\begin{gathered} g_{1,3}x^0_{3,n} - x^0_{1,n-2}g_{n-2,n} \sim_g g_{1,3}g^{-1}_{2,3}g_{n-2,n}x^0_{2,n-2} - g_{1,3}g^{-1}_{2,3}g_{n-2,n}x^0_{2,n-2} \\ + \varphi(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3}), \end{gathered}$$

т.е.

$$g_{1,3}x^0_{3,n} - x^0_{1,n-2}g_{n-2,n} \sim_g \varphi(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3}),$$

где

$$\begin{gathered} \varphi(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3}) = g_{1,3}\psi_{3,n}(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3}) \\ - g_{n-2,n}\varphi_{1,n-2}(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3}). \end{gathered}$$

Отсюда и из (19), в силу леммы 3, имеем:

$$M(g,x^0) \sim_g \varphi_n(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3}), \tag{22}$$

для некоторого многочлена первой степени $\varphi_n(x^0_{2,n-3}, x^0_{2,n-4}, ..., x^0_{2,3})$.

Следовательно, в $M(g,x^0)$ отсутствует $x^0_{2,n-2}$.

Докажем, что в $M(g,x^0)$ отсутствует также $x^0_{2,n-3}$. Допустим противное. Тогда из того, что $\varphi_{i,j}$ многочлены первых степеней и (22) следует:

$$\begin{aligned} M(g,x^0) \sim_g \varphi_{n-3}(g_{1,3}, g_{1,4}, ..., g_{1,n}, g_{2,3}, ..., g_{2,n}, ..., g_{n-2,n-1}, g_{n-2,n})x^0_{2,n-3} \\ +\varphi_{n-4}(g_{1,3}, g_{1,4}, ..., g_{n-2,n})x^0_{2,n-4} + ... + \varphi_3(g_{1,3}, g_{1,4}, ..., g_{n-2,n})x^0_{2,3}, \end{aligned} \tag{23}$$

для некоторых многочленов $\varphi_i(\overline{g}), i = 3, 4, ..., n-3$.

Пусть $\varphi_{n-3}(g) \neq 0$ и подстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ...n-3 & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 2 & 4 & 5 & ...n-2 & 3 & n-1 & n \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Положим

$$\begin{aligned} \sigma M(g,x^0) = g_{1,\sigma(3)}x^0_{\sigma(3),n} - x^0_{1,\sigma(3)}g_{\sigma(3),n} + ... + g_{1,\sigma(n-2)}x^0_{\sigma(n-2),n} = \\ = g_{1,4}x^0_{4,n} - x^0_{1,4}g_{4,n} + g_{1,5}x^0_{5,n} - x^0_{1,5}g_{5,n} + \\ + ... + g_{1,n-2}x^0_{n-2,n} - x^0_{1,n-2}g_{n-2,n} + g_{1,3}x^0_{3,n} - x^0_{1,3}g_{3,n} \end{aligned}$$

Отсюда из (19),(23),(24) имеем:

$$\sigma M(g,x^0) = M(g,x^0),$$

$$\begin{aligned} M(g,x^0) \sim_g \varphi_{n-3}(g_{1,4}, g_{1,5}, ..., g_{1,n}, g_{2,4}, ..., g_{2,n}, ..., g_{3,n-1}, g_{3,n})x^0_{2,n-2} \\ +\varphi_{n-4}(g_{1,4}, g_{1,5}, ..., g_{1,n}, g_{2,4}, ..., g_{2,n}, ..., g_{3,n-1}, g_{3,n})x^0_{2,n-3} \\ + ... + \varphi_3(g_{1,4}, g_{1,5}, ..., g_{1,n}, g_{2,4}, ..., g_{2,n}, ..., g_{3,n-1}, g_{3,n})x^0_{2,4} \end{aligned} \tag{25}$$

Отсюда и (22) следует, что

$$\varphi_{n-3} \sim_g 0,$$

т.е. число слагаемых в правой части эквивалентности (25) уменьшилось на 1.

Таким образом,

$$M(g,x^0) \sim_g \varphi_{n-4}(g_{1,4}, ..., g_{3,n})x^0_{2,n-3} + ... + \varphi_3(g_{1,4}, ..., g_{3,n})x^0_{2,4}.$$

Применяя к этой эквивалентности снова подстановку σ, получим:

$$M(g,x^0) \sim_g \varphi_{n-4}(g_{1,5}, ..., g_{3,n})x^0_{2,n-2} + ... + \varphi_3(g_{1,5}, ..., g_{3,n})x^0_{2,5},$$

т.е. число слагаемых еще раз уменьшили на 1.

Продолжая, таким образом, получим эквивалентность (21). Лемма доказана. □

Доказательство необходимости условия 2. Пусть матрица g универсальна в группе $UT_n(R)$. Тогда уравнение (1) имеет решение ${x^0}_{i,j} \in R$ при

$$f_{i,j} = 0, f_{1,n} = 1, \tag{26}$$

где $1 \le i < j \le n$, $\langle i,j\rangle \neq \langle 1,n\rangle$. Отсюда и из (14) имеем:

$$\begin{cases} {x^0}_{12} = g_{12}g_{23}^{-1}{x^0}_{23}, \\ x^0_{n-1,n} = g_{n-1,n}g_{n-2,n-1}^{-1}{x^0}_{n-2,n-1}. \end{cases} \tag{27}$$

Из леммы 4 и определения 1 следует:

$$M(g,x^0) = g_{12}u(x^0) + g_{n-1,n}\upsilon(x^0),$$

для некоторых многочленов $u(x^0)$, $\upsilon(x^0)$. Отсюда и из (20),(26),(27) следует:

$$1 = [g, x^0]_{1,n} = g_{12}(x^0_{2,n} - g_{23}^{-1} g_{2,n} + u(x^0)) + g_{n-1,n}(\upsilon(x^0)) + g_{1,n-1} g^{-1}_{n-2,n-1} - x^0{}_{1,n-1}),$$

т.е. справедливо (2). Необходимость условия 2 доказана.

Достаточность. Пусть для матрицы $g \in UT_n(R)$ справедливы условия 1 и 2 теоремы 1. Докажем, что для любого $f \in UT'_n(R)$ уравнение (1) разрешимо. Первая побочная диагональ матрицы x является решением системы уравнений (4). Придадим переменной $x_{2,3}$ некоторое значение $x^0_{2,3}$. Отсюда и из (4) следует, что

$$\begin{cases} x^0{}_{1,2} = g^{-1}{}_{2,3}(g_{1,2}x^0{}_{2,3} - f_{1,3}), \\ x^0{}_{3,4} = g^{-1}{}_{2,3}(g_{3,4}x^0{}_{2,3} + f_{2,4}), \\ \ldots \\ x^0{}_{s,s+1} = g^{-1}{}_{s-1,s}(g_{s,s+1}x^0{}_{s-1,s} + f_{s-1,s+1}), \\ \ldots \\ x^0{}_{n-1,n} = g^{-1}{}_{n-2,n-1}(g_{n-1,n}x^0{}_{n-2,n-1} + f_{n-2,n}). \end{cases}$$

Таким образом, первая побочная диагональ матрицы x определена.

Допустим, $(k-2)$-я побочная диагональ матрицы x определена. Элементы $(k-1)$-й побочной диагонали матрицы x удовлетворяют системе уравнений (15). Подставим в эту систему найденные значение переменных $x^0_{s,j}$, $1 \le s \le n-k$, $1 \le j-s < k-1$. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} g_{1,2}x_{2,k+1} - x_{1,k}g_{k,k+1} = h_{1,k}, \\ g_{2,3}x_{3,k+2} - x_{2,k+1}g_{k+1,k+2} = h_{2,k+1}, \\ \ldots \\ g_{n-k,n-k+1}x_{n-k+1,n} - x_{n-k,n-1}g_{n-1,n} = h_{n-k,n-k+1}, \end{cases}$$

для некоторых $h_{i,k+i-1} \in R$. Придадим переменной $x_{2,k+1}$ некоторое значение $x^0{}_{2,k+1}$ из R. Отсюда аналогично нахождению значения переменных $x_{i,i+1}$ находим значения $x^0_{s,j}$ переменных $x_{s,j}$.

Таким образом, определены значение k-ой побочной диагонали матрицы x, $1 \le k < n-1$.

Для $(n-1)$-ой побочной диагонали матрицы x справедливы (19), (20). Так как определены все значения переменных в $M_(g, x^0)$, то определено и значение $M(g, x^0) \in R$.

Отсюда и (1), (20) имеем:

$$[g, x]_{1,n} = f_{1,n} = g_{1,2}x_{2,n} - x^0{}_{1,2}g_{2,n} + M(g, x^0) + g_{1,n-1}x^0{}_{n-1,n} - x_{1,n-1}g_{n-1,n}.$$

т. е.

$$g_{1,2}x_{2,n} - x_{1,n-1}g_{n-1,n} = h, \tag{28}$$

где $h = f_{1,n} + x^0_{1,2}g_{2,n} - M(g, x^0) - g_{1,n-1}x^0{}_{n-1,n}$. Отсюда и условия 2 теоремы 1 следует разрешимость уравнения (28). Следовательно, уравнение (1) разрешимо в $UT_n(R)$ для любой матрицы f, т.е. g - универсальный элемент. Достаточность, а потому теорема, доказана. □

Следствие 1. *Матрица g группы $UT_n(\mathbb{F})$ унитреугольных матриц размерности $n \ge 3$ над полем $\mathbb{F}$ универсальна тогда и только тогда, когда справедливы условия:*

1. $g_{i,i+1} \neq 0$, $1 < i < n-1$,

2. либо $g_{1,2} \neq 0$, либо $g_{n-1,n} \neq 0$.

Напомним определение конструктивного кольца.

Пусть R – счетное кольцо и $\nu : \mathbb{N} \to R$ –отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на R.

Определение 2. *Пара (R, ν) называется конструктивным (или вычислимо нумерованным) кольцом, если по любым числам $m, n, s, t \in \mathbb{N}$ можно эффективно проверить истинность следующих равенств:*

$$\begin{cases} \nu m + \nu n = \nu s, \\ \nu m \cdot \nu n = \nu t. \end{cases}$$

Определение 3. *Если существует такая нумерация ν кольца R, что (R, ν) – конструктивное кольцо, то R называется вычислимым кольцом.*

Аналогично определяются понятия конструктивных и вычислимых групп. Для дальнейшего напомним следующие определения.

Пусть дана конструктивная группа (G, μ). Подмножество S группы G называется вычислимым, если существует алгоритм, который по любому числу m определяет принадлежит ли элемент μm подмножеству S или нет. Подмножество S называется вычислимо перечислимым, если существует алгоритм, который перечисляет элементы подмножества S.

Легко проверить, что справедливо следующее

Предложение 1. *Если (R, ν) –конструктивное кольцо, то существует такая вычислимая нумерация ν^* группы унитреугольных матриц $UT_n(R)$ размерности $n > 1$, что по номеру m можно эффективно находить ν–номера элементов $(\nu^* m)_{i,j}$ кольца R, $1 \leq i < j \leq n$.*

Отсюда и следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Если $(\mathbb{F}, \nu)$ -конструктивное поле, то множество универсальных элементов нумерованной группы $(UT_n(\mathbb{F}), \nu^*)$ вычислимо, т.е. по любому числу m можно эффективно определить является ли универсальной матрица $\nu^* m$ или нет.*

Из теоремы 1 получаем

Следствие 3. *Если (R, ν) – конструктивное кольцо, то множество универсальных элементов пары $(UT_n(R), \nu^*)$ вычислимо перечислимо.*

Следствие 4. *Пусть для конструктивного евклидого кольца (E, ν) с единицей справедливы следующее условие: существует алгоритм, который по любому числу m определяет норму и обратимость матрицы $\nu^* m$. Тогда существует алгоритм, который по любому числу r определяет универсальна ли матрица $\nu^* r$ пары $(UT_n(E), \nu^*)$.*

Доказательство. Пусть дана матрица $h \in UT_n(E)$ номера m, т.е. $\nu^* m = h$. Из предложения 1 следует, что по любому $0 < i < n$ эффективно можно найти номер m_i элемента $h_{i,i+1}$, т.е. $\nu m_i = h_{i,i+1}$. По условию следствия можно эффективно проверить обратимость элементов νm_j, $1 < j < n-1$. Если νm_j не обратим для некоторого j, то по теореме 1 матрица h не универсальна.

Допустим, νm_j обратим для любого j. Из условия 1 и конструктивности пары (R, ν) следует, что алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя $(\nu m_1, \nu m_{n-1})$ элементов $\nu m_1, \nu m_{n-1}$ эффективен. По этому алгоритму эффективно находим такое $s \in \mathbb{N}$, что $(\nu m_1, \nu m_{n-1}) = \nu s$. Из теоремы 1 следует, если νs - единица кольца, то матрица νm универсальна. В противном случае, не является универсальной. □

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие 5. *Пусть R – либо вычислимое поле, либо кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел. Тогда для любого числа $m > 0$ существует вычислимая нумерация ν кольца многочленов $R[x_0, \ldots, x_{m-1}]$ над R такая, что множество универсальных элементов нумерованной группы $(UT_n(R[x_0, ..., x_{m-1}]), \nu^*)$ вычислимо.*

Авторы выражают сердечную благодарность В.А. Романькову за предложенную тематику и рецензенту за ценные замечания.

References

[1] M.I.Kargapolov, Yu.I.Merzlyakov, *Foundations of groups theory*, Moscow: "Nauka", 1982. MR0677282

[2] A. Bier, *The width of verbal subgroups in the group of unitriangular matrices over a field*, Int. J. Alg. Comput, **22**:3 (2012), 21–41. MR2922381

[3] N.S. Bahta, *On the representability of the commutator of group $UT(n, K)$ by the set of values of one variable*, Herald of Omsk University, **2** (2012), 44–46.

[4] N.S. Bahta, *On representability of members of the low central series of the group $UT(n, K)$ by values of one-variable function*, Herald of Omsk University, **4** (2013), 13–15.

[5] A.V. Men'shov, V.A. Roman'kov, *On p-solvability of some regular equations over a Heisenberg p-group*, Herald of Omsk University, **3** (2014), 11–14.

[6] V.A. Roman'kov, *Equations over groups*, Groups Complexity Cryptology, **2**:4 (2012), 191–240. MR3043434

[7] L.L. Konyrkhanova, *Universal elements of the groups of unitriangular matrices over a field*, Herald of Omsk University, **4** (2015), 18–20.

[8] L.L. Konyrkhanova, *Universal elements of unitriangular matrices groups over ring of integers*, Herald of Omsk University, **2** (2016), 11–13.

[9] L.L. Konyrkhanova, V.A. Roman'kov, *On solvability of commutator equations in Lie algebras*, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, **1** (2017), 57–64.

[10] L.L. Konyrkhanova, N.G. Khisamiev. *Universal elements of unitriangular matrices groups*, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, **2** (2017), 79–85.

Nazif Garrifullinovich Khisamiev, Saule Dshunusovna Tynybekova, Assem Adilbekkizi Konyrkhanova
Faculty of Information Technologies,
2, Satpayev str.,
Astana, 010008, Kazakhstan
E-mail address: `hisamiev@mail.ru`