S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1716–1731 (2019) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2019.16.121 MSC 35J35, 35J40, 31B30

БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ–ФАРВИГА ВО ВНЕШНИХ ОБЛАСТЯХ

О.А. МАТЕВОСЯН

Abstract. We study the unique solvability and the asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet–Farwig biharmonic problem in the exterior of a compact set under the assumption that generalized solutions of this problem has a bounded Dirichlet integral with weight $|x|^a$. Depending on the value of the parameter a, we obtained uniqueness (non-uniqueness) theorems of the problem or present exact formulas for the dimension of the space of solutions of the mixed Dirichlet–Farwig problem.

Keywords: Biharmonic operator, Dirichlet–Farwig problem, wighted Dirichlet integral, Sobolev spaces.

1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, где G - ограниченная односвязная область (или объединение конечного числа таких областей) в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$ - замыкание Ω, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

В Ω рассматривается задача для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями Дирихле–Фарвига

$$u\Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_2} = 0, \tag{2}$$

где $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\mathrm{mes}_{n-1}\Gamma_1 \neq 0$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ - единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Matevossian, H.A., Biharmonic Dirichlet–Farwig problem in exterior domains.

© 2019 Матевосян О.А.

Поступила 22 сентября 2019 г., опубликована 25 ноября 2019 г.

Как известно, в случае, когда Ω - неограниченная область, следует дополнительно охарактеризовать поведение решения на бесконечности. Как правило, для этой цели служит либо условие конечности интерала Дирихле (энергии), либо условие на характер убывания модуля решения при $|x| \to \infty$. Подобного рода условия на бесконечности являются естественными и изучались рядом авторов (см., например, [6], [8], [9]).

Вопросы о поведении при $|x| \to \infty$ решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения (1) рассматривались в [4], [10], в которых при определенных условиях геометрического характера на границу области получены также оценки, характеризующие поведение $|u(x)|$ и $|\nabla\, u(x)|$ при $|x| \to \infty$.

В данной статье таким условием является ограниченность интеграла Дирихле с весом:

$$D_a(u,\Omega) \equiv \int_\Omega |x|^a \sum_{|\alpha|=2} |\partial^\alpha u|^2\, dx < \infty, \quad a \in \mathbb{R}.$$

В [1] изучается слабое решение смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения на плоскости. При решении, используя формулу Грина, задача превращается в систему интегральных уравнений Фредгольма для неизвестных данных на другой части границы. В соответствующих пространствах Соболева установлены существование и единственность решений системы граничных интегральных уравнений.

Отметим также работу [2], в которой методом отражения исследованы единственность решений основных краевых задач для бигармонического уравнения и системы уравнений Стокса в весовых L^p –пространствах в полупространстве.

В [8] с условием конечности интеграла Дирихле на поведение решения на бесконечности изучены вопросы единственности решений задачи Дирихле для эллиптических систем высокого порядка в неограниченных областях.

В разных классах неограниченных областей с конечным весовым интегралом энергии (Дирихле) автором в [11]–[27] изучены вопросы единственности, а также найдены размерности пространств решений краевых задач для системы теории упругости и бигармонического (полигармонического) уравнения. Развивая подход, основанный на использовании неравенств типа Харди [6]-[8], в данной работе удалось получить критерий единственности решения смешанной задачи Дирихле–Фарвига для бигармонического уравнения. Для построения решения используется вариационный метод, т.е. минимизируется соответствующий функционал в классе допустимых функций.

Данная работа содержит полные доказательства результатов, анонсированных в [26].

Введем обозначения: $C_0^\infty(\Omega)$ - пространство бесконечно дифферцируемых функций в области Ω и имеющих компактный носитель в Ω; $H^2(\Omega,\Gamma)$, $\Gamma \subset \overline{\Omega}$, – пространство, полученное пополнением множества функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, равных нулю в окрестности Γ, по норме

$$||u; H^2(\Omega,\Gamma)|| = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le 2} |\partial^\alpha u|^2\, dx \right)^{1/2},$$

где $\partial^\alpha \equiv \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ - мультииндекс, $\alpha_j \ge 0$ – целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; если $\Gamma = \emptyset$, то пространство $H^2(\Omega,\Gamma)$ будем обозначать $H^2(\Omega)$;

$\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ - пространство функций в Ω, полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства Соболева $H^2(\Omega)$;

$\overset{\circ}{H}{}^2_{loc}(\Omega)$ – пространство функций в Ω, полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ в системе полунорм $||u; H^2(G_0)||$, где $G_0 \subset \overline{\Omega}$ - произвольный компакт.

Обозначим

$$D(u,\Omega) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} |\partial^\alpha u|^2\, dx, \quad D_a(u,\Omega) = \int_\Omega |x|^a \sum_{|\alpha|=2} |\partial^\alpha u|^2\, dx,$$

$$\Omega_R = \Omega \cap \{x : |x| < R\}, \quad \partial\Omega_R = \partial\Omega \cup \{x : |x| = R\}.$$

Под конусом K в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат будем понимать такую область, что если $x \in K$, то $\lambda x \in K$ при всех $\lambda > 0$. Будем считать, что начало координат $x_0 = 0$ находится вне $\overline{\Omega}$.

2. Определения и вспомогательные утверждения

Определение 1. *Решением однородного бигармонического уравнения* (1) *в* Ω *будем называть функцию* $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ *такую, что для всякой функции* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *выполнено интегральное тождество*

$$\int_\Omega \Delta u\, \Delta\varphi\, dx = 0.$$

Лемма 1. *Пусть* u *- решение уравнения* (1) *в* Ω*, удовлетворяющее условию* $D_a(u,\Omega) < \infty$*. Тогда*

$$u(x) = P(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x),\ x \in \Omega, \tag{3}$$

где $P(x)$ *- многочлен,* $\operatorname{ord} P(x) < m_0 = \max\{2, 2-n/2-a/2\}$, $\beta_0 = 2-n/2+a/2$, $\Gamma(x)$ *- фундаментальное решение уравнения* (1), $C_\alpha = \mathrm{const}$, $\beta \ge 0$ *- целое число, а для функции* $u^\beta(x)$ *справедлива оценка*

$$|\partial^\gamma u^\beta(x)| \le C_{\gamma\beta} |x|^{3-n-\beta-|\gamma|},\ C_{\gamma\beta} = \mathrm{const}$$

для любого мультииндекса γ*.*

Замечание 1. *Для фундаментального решения* $\Gamma(x)$ *бигармонического уравнения, известно* [29]*, что*

$$\Gamma(x) = \begin{cases} C|x|^{4-n}, & \text{если} \quad 4-n<0 \quad \text{или} \quad n \quad \text{нечетно}, \\ C|x|^{4-n}\ln|x|, & \text{если} \quad 4-n \ge 0 \quad \text{и} \quad n \quad \text{четно}. \end{cases}$$

Доказательство леммы 1. Рассмотрим функцию $v(x) = \theta_N(x)u(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$,
$\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ 0 \le \theta \le 1,\ \theta(s) = 0$ при $s \le 1,\ \theta(s) = 1$ при $s \ge 2$, причем $N \gg 1$ и $G \subset \{x : |x| < N\}$. Продолжим функцию v на $\mathbb{R}^n$, полагая $v = 0$ на $G = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Тогда функция $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 v = f,$$

где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} f \subset \{x : |x| < 2N\}$. Легко видеть, что $D_a(v, \mathbb{R}^n) < \infty$.

Теперь мы можем использовать теорему 1 из [5], поскольку она основывается на лемме 2 из [5], в которой никаких ограничений на знак σ нет. Следовательно, разложение

$$v(x) = P(x) + \sum_{\beta_0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x),$$

справедливо для любого a, где $P(x)$ - многочлен, $\operatorname{ord} P(x) < m_0 = max\{2, 2 - n/2 - a/2\}$, $\beta_0 = 2 - n/2 + a/2$, $C_\alpha = \mathrm{const}$ и

$$|\partial^\gamma v^\beta(x)| \le C_{\gamma\beta}|x|^{3-n-\beta-|\gamma|}, \quad C_{\gamma\beta} = \mathrm{const}\,.$$

Отсюда и из определения функции v следует равенство (3). Лемма доказана. □

Определение 2. *Решением однородной задачи Дирихле–Фарвига* (1), (2) *будем называть функцию* $u \in \overset{\circ}{H}{}^2_{loc}(\Omega, \Gamma_1) \cap \overset{\circ}{H}{}^1_{loc}(\Omega)$, $\partial u/\partial\nu = 0$ *на* Γ_2, *такую, что для всякой функции* $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2_{loc}(\Omega, \Gamma_1) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\partial\varphi/\partial\nu = 0$ *на* Γ_2, *выполнено интегральное тождество*

$$\int_\Omega \Delta u\, \Delta\varphi\, dx = 0. \tag{4}$$

Обозначим через $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ пространство обобщенных решений задачи Дирихле–Фарвига (1), (2), имеющих конечный интеграл Дирихле, т.е.

$$\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) = \{u : \Delta^2 u = 0,\ u\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_2} = 0,\ D(u,\Omega) < \infty\}.$$

Положим по определению

$$\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \{u : \Delta^2 u = 0,\ u\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_2} = 0,\ D_a(u,\Omega) < \infty\}.$$

Через $\dim \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$ обозначим размерности пространств $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$ соответственно. В зависимости от значения параметра a будем вычислять $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Задача Дирихле–Фарвига* (1), (2) *с условием* $D(u,\Omega) < \infty$ *имеет* $n+1$ *линейно независимых решений, т.е.* $\dim \mathrm{Ker}_0(\Delta^2) = n+1$.

Proof. Доказательство теоремы 1 приведено в [26]. □

Теорема 2. *Если* $-n \le a < n-4,\ n > 4$, *то*

$$\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n+1.$$

Proof. Сначала рассмотрим случай $0 \le a < n-4,\ n > 4$.

Очевидно, что $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$, если $a \ge 0$.

Докажем, что $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

Пусть $u \in \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. Тогда, согласно лемме 1, решение u имеет вид (3), т. е.

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ - многочлен, $\operatorname{ord} P(x) \le 1$,

$$R(x) = \sum_{|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

Легко заметить, что $D_a(P(x),\Omega) = 0$ и $D_a(R(x),\Omega) < \infty$ при $a < n-4$. Следовательно, $D_a(u,\Omega) < \infty$, т.е. $u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

Итак, $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \dim \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. Согласно теореме 1,

$$\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n+1.$$

Теперь рассмотрим случай $-n \le a < 0,\ n > 4$.

Пусть $u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$, где $-n \le a < 0$. Согласно лемме 1 решение уравнения (1) в Ω имеет вид (3).

Так как $\operatorname{ord} P(x) \le 1$, то $D(P(x),\Omega) < \infty$. Легко проверить, что $D(R(x),\Omega) < \infty$ при $n > 4$. Следовательно, $D(u,\Omega) < \infty$, т. е. $u \in \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$.

С другой стороны, очевидно, что $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$, если $a < 0$.

Таким образом, $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \dim \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. В силу теоремы 1, имеем

$$\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n+1.$$

Теорема доказана.

□

Теорема 3. *Если* $n-4 \le a < n-2,\ n > 4$, *то*

$$\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n.$$

Proof. Для произвольного числа $e \ne 0$ построим обобщенное решение уравнения (1) с граничными условиями

$$u_e\big|_{\Gamma_1} = e, \quad \frac{\partial u_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \tag{5}$$

с условием

$$\chi(u_e,\Omega) \equiv \int_\Omega \left(\frac{|u_e|^2}{|x|^4} + \frac{|\nabla u_e|^2}{|x|^2} + |\nabla\nabla u_e|^2 \right) dx < \infty. \tag{6}$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя функционал

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta v|^2\, dx$$

в классе $\{v : v \in H^2(\Omega),\ v\big|_{\Gamma_1} = e,\ \frac{\partial v}{\partial \nu}\big|_{\Gamma_1} = 0,\ v$ имеет компактный носитель в $\overline{\Omega}\}$ допустимых функций.

Справедливость условия (6) как следствие неравенства Харди следует из результатов работ [6]– [8]. Согласно лемме 1 решение u_e имеет вид

$$u_e(x) = P_e(x) + R_e(x),$$

где $P_e(x)$ - многочлен, $\operatorname{ord} P_e(x) \le 1$,

$$R_e(x) = C_0'\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x).$$

Из условия (6) следует, что $P_e(x) \equiv 0$.

Покажем, что $C_0' \ne 0$. Предположим, что $C_0' = 0$. Умножив уравнение (1) на 1 и проинтегрировав по Ω_R, получим

$$\left(\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} + \int_{|x|=R} \right) \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\, ds = 0.$$

Покажем сначала, что

$$\int_{|x|=R} \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\, ds \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Так как $C_0' = 0$, то

$$\left|\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\right| \le C|x|^{-n},$$

$$\left|\int_{|x|=R} \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\, ds\right| \le \text{const} \int_{|x|=R} \left|\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\right| ds \le \text{const} \int_{|x|=R} |x|^{-n}\, ds =$$

$$= \text{const}\, R^{-1} \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Следовательно, принимая во внимание граничные условия на Γ_2, получим

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\, ds = 0. \tag{7}$$

Теперь докажем, что

$$\int_{\Omega} (\Delta u_e)^2\, dx = -e \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\, ds. \tag{8}$$

Умножив уравнение (1) на u_e и проинтегрировав по Ω_R с учетом граничных условий (5), получим

$$\int_{\Omega_R} (\Delta u_e)^2\, dx = -\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} u_e \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\, ds + J_1(u_e) + J_2(u_e), \tag{9}$$

где

$$J_1(u_e) = \int_{|x|=R} \Delta u_e \frac{\partial u_e}{\partial \nu}\, ds, \quad J_2(u_e) = -\int_{|x|=R} u_e \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\, ds.$$

Покажем, что $J_1(u_e) \to 0, J_2(u_e) \to 0$ при $R \to \infty$. Так как

$$|u_e| \le C|x|^{4-n}, \quad |\Delta u_e| \le C|x|^{2-n}, \quad \left|\frac{\partial u_e}{\partial \nu}\right| \le C|x|^{3-n}, \quad \left|\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\right| \le C|x|^{1-n},$$

то при $R \to \infty$, $n > 4$ имеем

$$|J_i(u_e)| \le C \int_{|x|=R} |x|^{5-2n}\, ds = \text{const}\, R^{4-n} \to 0, \quad i = 1, 2.$$

Переходя к пределу в равенстве (9) при $R \to \infty$, получим требуемое равенство (8), так как $u_e\big|_{\Gamma_1} = e$. Из равенств (7) и (8) следует, что

$$\int_{\Omega} (\Delta u_e)^2\, dx = 0,$$

и, значит, $\Delta u_e = 0$ в Ω. Отсюда и из граничных условий (5) следует [3, Гл. 2.4], что $u_e \equiv e \ne 0$. Полученное соотношение противоречит условию (6).

Таким образом, $C_0' \ne 0$. Положим $s = e/C_0'$.

Рассмотрим теперь уравнение (1) с граничными условиями

$$u_A(x)\big|_{\Gamma_1} = (Ax)\big|_{\Gamma_1}, \ \left.\frac{\partial u_A(x)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = \left.\frac{\partial (Ax)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1}, \quad \left.\frac{\partial u_A(x)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = \left.\frac{\partial \Delta u_A}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = 0, \tag{10}$$

где A - ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$, Ax обозначает стандартное скалярное произведение A и x.

Для любого ненулевого вектора A построим обобщенное решение бигармонического уравнения (1) с граничными условиями (10) и с условием

$$\chi(u_A, \Omega) < \infty. \tag{11}$$

Решение задачи (1), (10) строится вариационным методом, минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций

$$\{v : v \in H^2(\Omega),\ v(x)\big|_{\Gamma_1} = (Ax)\big|_{\Gamma_1},\ \left.\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = \left.\frac{\partial (Ax)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1},$$

v имеет компактный носитель в $\overline{\Omega}\}$.

Согласно лемме 1 имеет место равенство

$$u_A(x) = P_A(x) + R_A(x),$$

где $P_A(x)$ - многочлен, $\operatorname{ord} P_A(x) \le 1$,

$$R_A(x) = C_0\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u_A^\beta(x).$$

Из условия (11) следует, что $P_A(x) \equiv 0$.

Рассмотрим функцию

$$v = (u_A(x) - Ax) - (u_e - e),$$

где $e = sC_0$, число s определено выше. Очевидно, что v - решение задачи (1), (2).

Докажем, что $D_a(v, \Omega) < \infty$ при $a < n-2$. Имеем

$$u_A(x) = C_0\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u_A^\beta(x), \tag{12}$$

$$u_e(x) = C_0'\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x), \tag{13}$$

причем $C_0' = e/s = sC_0/s = C_0$.

Следовательно,

$$u_A(x) - u_e(x) = \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha'' + u_0^\beta(x),$$

где $C_\alpha'' = C_\alpha - C_\alpha'$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$.

Нетрудно проверить, что $D_a(\partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha'', \Omega) < \infty$, $D_a(u_0^\beta, \Omega) < \infty$ при $a < n-2$. Отсюда следует, что $D_a(u_A - u_e, \Omega) < \infty$ и $D_a(v, \Omega) < \infty$. Легко заметить, что $v \not\equiv 0$.

Таким образом, каждому ненулевому вектору A из $\mathbb{R}^n$ отвечает ненулевое решение v_A задачи (1), (2) с условием $D_a(v_A, \Omega) < \infty$, причем

$$v_A = u_A(x) - u_e - Ax + e.$$

Пусть $A_1, \dots, A_n$ – базис в $\mathbb{R}^n$. Докажем, что соответствующие решения $v_{A_1}, \dots, v_{A_n}$ - линейно независимы.

Пусть $\sum_{i=1}^n C_i v_{A_i} \equiv 0$, где $C_i = \text{const}$. Положим $W_1 \equiv \sum_{i=1}^n C_i A_i x$. Тогда

$$W_1 = \sum_{i=1}^n C_i (u_{A_i} - u_e + e)$$

и

$$\int_\Omega |x|^{a-2} |\nabla W_1|^2 \, dx < \infty.$$

Покажем, что $W_1 \equiv \sum_{i=1}^n C_i A_i x \equiv 0$. Пусть $T = \sum_{i=1}^n C_i A_i = (t_1, \dots, t_n)$. Тогда

$$\int_\Omega |x|^{a-2} |\nabla W_1|^2 \, dx = \int_\Omega |x|^{a-2} (t_1^2 + \dots + t_n^2) \, dx = \infty,$$

если $T \neq 0$.

Следовательно, $T = \sum_{i=1}^n C_i A_i = 0$, откуда в силу линейной независимости векторов $A_1, \dots, A_n$ получим, что $C_i = 0,\ i = 1, \dots, n$.

Таким образом, задача (1), (2) с условием $D_a(u, \Omega) < \infty$ имеет по крайней мере n линейно независимых решений.

Докажем, что любое решение u задачи (1), (2) с условием $D_a(u, \Omega) < \infty$ представляется в виде линейной комбинации функций $v_{A_1}, \dots, v_{A_n}$, т. е.

$$u = \sum_{i=1}^n C_i v_{A_i},$$

где $C_i = \text{const}$.

Согласно лемме 1 решение уравнения (1) в Ω имеет вид

$$u(x) = Ax + B + \sum_{|\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x),$$

где A - постоянный вектор, B - некоторое число.

Так как $A_1, \dots, A_n$ - базис в $\mathbb{R}^n$, то существуют константы $C_1, \dots, C_n$ такие, что

$$A = -\sum_{i=1}^n C_i A_i.$$

Положим

$$u_1 \equiv u - \sum_{i=1}^n C_i v_{A_i}.$$

Очевидно,что функция u_1 является решением задачи (1), (2) и $D_a(u_1, \Omega) < \infty$.

Докажем, что $u_1 \equiv 0$ в Ω. Имеем

$$u_1 = b + z(x),$$

где $b = B - \sum_{i=1}^n C_i e_i$,

$$z(x) = \sum_{|\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x) - \sum_{i=1}^n C_i [u_{A_i} - u_{e_i}],$$

т. е. $z = u_1 - b$ и

$$z\big|_{\Gamma_1} = -b, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta z}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_2} = 0.$$

Легко заметить, что $\chi(z, \Omega) < \infty$.

Таким образом, z является решением задачи (z_b):

$$\Delta^2 z = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$z\big|_{\Gamma_1} = -b, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(z,\Omega) < \infty.$$

Кроме того, $D_a(z,\Omega) < \infty$.

Докажем, что если $e \neq 0$, то $D_a(u_e,\Omega) = \infty$, где u_e – построенное выше решение задачи (e):

$$\Delta^2 u_e = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_e\big|_{\Gamma_1} = e, \quad \frac{\partial u_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(u_e,\Omega) < \infty.$$

Имеем $u_e(x) = C_0'\Gamma(x) + R_1(x)$, причем $C_0' \neq 0$, если $\vec{e} \neq 0$, и

$$R_1(x) = \sum_{0<|\alpha|\leq\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x).$$

Легко проверить, что $D_a(R_1(x),\Omega) < \infty$.

Так как $\Gamma(x) = C|x|^{4-n}$, то внутри некоторого конуса K справедливо неравенство

$$|\nabla\nabla\Gamma(x)| \geq C|x|^{2-n}.$$

Поэтому

$$D_a(C_0'\Gamma(x),\Omega) \geq C(C_0') \int_{K\cap\{|x|>H\}} |x|^{2(2-n)+a} dx = \infty,$$

если $C_0' \neq 0$ и $a \geq n-4$. Отсюда следует, что $D_a(u_e,\Omega) = \infty$ при $e \neq 0$.

Теперь докажем единственность решения u_e задачи (e). Пусть существуют два решения v_1 и v_2 такие, что

$$v_1\big|_{\Gamma_1} = e, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta v_1}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$v_2\big|_{\Gamma_1} = e, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta v_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

Тогда функция $v_e = v_1 - v_2$ удовлетворяет условиям:

$$v_e\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(v_e,\Omega) < \infty.$$

Покажем, что $v_e \equiv 0$, $x \in \Omega$. Для этого в интегральном тождестве (4) для функции v_e подставляя функцию $\varphi = v_e\,\theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \geq 2$, $\theta(s) = 1$ при $s \leq 1$, получим

$$\int_\Omega (\Delta v_e)^2\,\theta_N(x)\,dx = -J_1(v_e) - J_2(v_e), \tag{14}$$

где

$$J_1(v_e) = 2\int_\Omega \Delta v_e \nabla v_e \nabla\,\theta_N(x)\,dx,$$

$$J_2(v_e) = \int_\Omega \Delta v_e\, v_e \Delta\theta_N(x)\,dx.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского с учетом условия $\chi(v_e,\Omega) < \infty$ легко показать, что $J_1(v_e) \to 0$ и $J_2(v_e) \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, переходя к пределу в (14) при $N \to \infty$, получим

$$\int_\Omega (\Delta v_e)^2\,dx = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta v_e = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$v_e\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

Отсюда следует [3, Гл. 2.4], что $v_e \equiv 0$ в Ω. Тем самым, решение u_e задачи (e) единственно. Следовательно, $z = u_e$ при $e = -b$ и $D_a(z,\Omega) = \infty$ при $b \neq 0$.

С другой стороны, $D_a(z,\Omega) < \infty$, где $z = u_1 - b$, откуда $b = 0$. Таким образом, $u_1 = z$ является решением следующей задачи (z_0):

$$\Delta^2 z = 0,\ x \in \Omega,$$
$$z\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(z,\Omega) < \infty.$$

В силу единственности решения задачи (e) $u_1 \equiv 0$ в Ω. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Если* $n-2 \le a < \infty,\ n > 4$, *то*

$$\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = 0.$$

Proof. Пусть $a = n-2,\ u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$ и $u \not\equiv 0$.

Так как $\mathrm{Ker}_{n-2}(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_{n-4}(\Delta^2)$, то в силу Теоремы 3, решение u имеет вид

$$u = u_A - Ax - u_e + e, \tag{15}$$

где $e = sC_0$, а C_0 определяется из формулы (12).

Подставляя формулы (12) и (13) в (15) получим,

$$u(x) = P_0(x) + (C_0 - C_0')\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x),$$

где $P_0(x) = -Ax + e,\ \tilde{C}_\alpha = C_\alpha - C_\alpha',\ u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$.

Так как $C_0' = C_0$, то $C_0 - C_0' = 0$. Следовательно,

$$u(x) = P_0(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x). \tag{16}$$

Докажем, что $\tilde{C}_1 \neq 0$ в (16).

Пусть $\tilde{C}_1 = 0$, тогда

$$u(x) = P_0(x) + \sum_{1<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x)$$

Умножив уравнение (1) на u и проинтегрировав по Ω_R, учитывая граничные условия (2), получим

$$\int_{\Omega_R} (\Delta u)^2\,dx = \int_{|x|=R} \Delta u \frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds - \int_{|x|=R} u \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\,ds. \tag{17}$$

Из (16) следует, что

$$|u| \le C|x|, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \le C, \quad |\Delta u| \le C|x|^{-n}, \quad \left|\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\right| \le C|x|^{-n-1}.$$

Поэтому,

$$\left|\int_{|x|=R} \left(\Delta u \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\right) ds\right| \le \mathrm{const} \int_{|x|=R} |x|^{-n}\, ds$$
$$= \mathrm{const}\, R^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в равенстве (17), получим

$$\int_\Omega (\Delta u)^2\, dx = 0.$$

Отсюда и из граничных условий (2) следует [3, Гл. 2.4], что $u \equiv 0$ в Ω. Полученное противоречие показывает, что $\tilde{C}_1 \ne 0$ в (16).

Так как $u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$, то $D_a(u, \Omega) < \infty$. Легко проверить, что $D_a(P_0(x), \Omega) = 0$ и $D_a(R_2(x), \Omega) < \infty$, где

$$R_2(x) = \sum_{1<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) \tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x).$$

Тогда, в силу (16) и неравенства треугольника, получим $D_a((\tilde{C}_1 \cdot \nabla)\Gamma(x), \Omega) < \infty$.

С другой стороны, $\Gamma(x) = C|x|^{4-n}$. Тогда внутри некоторого конуса K имеет место неравенство

$$|\nabla\nabla(\tilde{C}_1 \cdot \nabla)\Gamma(x)| \ge C|x|^{1-n}.$$

Следовательно,

$$\infty > D_a((\tilde{C}_1 \cdot \nabla)\Gamma(x), \Omega) \ge C \int_{K\cap\{|x|>H\}} |x|^{2-2n+a}\, dx = \infty \quad \text{при} \quad a \ge n-2.$$

Полученное противоречие означает, что $u \equiv 0$. Теорема доказана.

□

Теорема 5. *Смешанная задача Дирихле–Фарвига* (1), (2) *с условием* $D_a(u, \Omega) < \infty$ *имеет* $k(r, n)$ *линейно независимых решений при* $-2r + 2 - n \le a < -2r + 4 - n$, $n > 4$, $r > 1$, *где*

$$k(r, n) = \frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-4)!}{n!(r-4)!}.$$

Proof. Для доказательства теоремы нужно определить число линейно независимых решений бигармонического уравнения (1), степени которых не превосходят заданного числа.

Известно, что размерность всех многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна $(r+n)!/r!n!$ [28]. Тогда размерность всех бигармонических многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна

$$\frac{(r+n)!}{r!n!} - \frac{(r-4+n)!}{(r-4)!n!},$$

так как бигармоническое уравнение представляет собой равенство нулю некоторого многочлена степени $(r-4)$ в $\mathbb{R}^n$.

Если через $k(r, n)$ обозначим число линейно независимых полиномиальных решений уравнения (1), степени которых не превосходят r, а через $l(r, n)$ -

число линейно независимых однородных многочленов степени r, являющихся решениями уравнения (1), то

$$k(r,n)=\sum_{s=0}^{r} l(s,n),$$

где

$$l(s,n)=\frac{(s+n-1)!}{(n-1)!s!}-\frac{(s+n-5)!}{(n-1)!(s-4)!},\ s>0.$$

Докажем сначала, что задача (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega)<\infty$ при $-2r+2-n\le a<-2r+4-n$ имеет $k(r,n)$ линейно независимых решений.

Пусть $w_1,\dots,w_k$ - базис в пространстве полиномиальных решений уравнения (1), степени которых не превосходят r. Так как $\operatorname{ord} w_i\le r$, то $D_a(w_i,\Omega)<\infty$ при $-2r+2-n\le a<-2r+4-n$.

По каждому $w_i,\ i=1,\dots,k$, построим решение v_i уравнения (1) такое, что

$$v_i\big|_{\Gamma_1}=w_i\big|_{\Gamma_1},\ \frac{\partial v_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1}=\frac{\partial w_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1},\ \frac{\partial v_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2}=\frac{\partial w_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2},\ \frac{\partial\Delta v_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta w_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2},$$

$$D(v_i,\Omega)<\infty,\quad \int_\Omega|\nabla v_i|^2|x|^{-2}\,dx<\infty,\quad \int_\Omega|v_i|^2|x|^{-4}\,dx<\infty.$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя функционал

$$F(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta v|^2\,dx$$

в классе допустимых функций

$$\{v: v\in H^2(\Omega),\ v\big|_{\Gamma_1}=w,\ \frac{\partial v}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1}=\frac{\partial w}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1},\ v\text{ имеет компактный носитель в }\overline{\Omega}\}.$$

Рассмотрим разность $q_i=w_i-v_i$.Имеем

$$\Delta^2 q_i=0,\quad x\in\Omega,$$

$$q_i\big|_{\Gamma_1}=\frac{\partial q_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1}=0,\quad \frac{\partial q_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta q_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2}=0,\quad D(q_i,\Omega)<\infty.$$

Докажем, что $q_i,\ i=1,\dots,k$, линейно независимы. Действительно, если

$$\sum_{i=1}^{k}c_iq_i=0,\ c_i=\text{const},$$

то

$$\sum_{i=1}^{k}c_i(w_i-v_i)=0,$$

т.е.

$$W\equiv\sum_{i=1}^{k}c_iw_i=\sum_{i=1}^{k}c_iv_i\equiv V,$$

следовательно, $|W|^2=|V|^2,\ |\nabla W|^2=|\nabla V|^2,\ |\nabla\nabla W|^2=|\nabla\nabla V|^2$, и

$$D(W,\Omega)=D(V,\Omega)<\infty,$$

$$\int_\Omega|\nabla W|^2|x|^{-2}\,dx=\int_\Omega|\nabla V|^2|x|^{-2}\,dx<\infty,$$

$$\int_\Omega |W|^2|x|^{-4}\,dx = \int_\Omega |V|^2|x|^{-4}\,dx < \infty.$$

Согласно лемме 1 решение V уравнения (1) в Ω имеет вид

$$V(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ - многочлен,

$$R(x) = \sum_{|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha + v^\beta(x).$$

Легко проверить, что $D(R(x),\Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla R(x)|^2|x|^{-2}\,dx < \infty, \quad \int_\Omega |R(x)|^2|x|^{-4}dx < \infty \quad \text{при} \quad n > 4.$$

В силу неравенства треугольника, $D(P(x),\Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla P(x)|^2|x|^{-2}\,dx < \infty, \quad \int_\Omega |P(x)|^2|x|^{-4}\,dx < \infty.$$

Докажем, что $P(x) = 0$.

Пусть $\operatorname{ord} P(x) = r_1$. Тогда внутри некоторого конуса K выполняется неравенство

$$|P(x)| \ge C|x|^{r_1}.$$

Следовательно,

$$\infty > \int_\Omega |P(x)|^2|x|^{-4}\,dx \ge C\int_{K\cap\{|x|>H\}} |x|^{(r_1-2)2}\,dx = C\int_{|x|>H} |x|^{2r_1-4+n}|x|^{-1}\,d|x|.$$

Так как $n > 4$, то полученный интеграл сходится только при $r_1 < 0$.

Таким образом, $P(x) \equiv 0$ и $V(x) = R(x)$, где $R(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^k c_i w_i \equiv W = V(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty.$$

Так как W - многочлен, то

$$\sum_{i=1}^k c_i w_i = 0.$$

Отсюда $c_i = 0,\ i = 1,\dots,k$, в силу того, что $w_i,\ i = 1,\dots,k$, - базис в пространстве полиномиальных решений.

Таким образом, смешанная задача Дирихле–Фарвига (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ имеет по крайней мере $k(r,n)$ линейно независимых решений.

Докажем теперь, что всякое решение u смешанной задачи Дирихле–Фарвига (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ можно представить в виде линейной комбинации построенных решений $q_i,\ i = 1,\dots,k, \quad q_i = w_i - v_i$.

Согласно лемме 1, решение уравнения (1) в Ω можно представить в виде

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ - многочлен, $\operatorname{ord} P(x) < m_0 = [2 - n/2 - a/2]$,

$$R(x) = \sum_{|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha + u^\beta(x).$$

Так как $-2r + 2 - n \le a < -2r + 4 - n$, то $1 - n/2 - a/2 \le r < 2 - n/2 - a/2$, следовательно, $r = [2 - n/2 - a/2] = m_0$. Таким образом, $\operatorname{ord} P(x) \le r$.

Покажем, что $P(x)$ - решение уравнения (1). Имеем

$$0 = \Delta^2 u = \Delta^2 P(x) + \Delta^2 R(x),$$

причем $\Delta^2 R(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Так как $\Delta^2 P(x)$ - многочлен и

$$\Delta^2 P(x) = -\Delta^2 R(x) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty,$$

то $\Delta^2 P(x) \equiv 0$, т.е. $P(x)$ - полиномиальное решение бигармонического уравнения (1). Следовательно, оно представляется линейной комбинацией функций $w_i,\ i = 1, \dots, k$:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i w_i.$$

Докажем, что $u = \sum_{i=1}^{k} c_i q_i$. Положим

$$u_2 = u - \sum_{i=1}^{k} c_i q_i,$$

т.е.

$$u_2 = R(x) + \sum_{i=1}^{k} c_i v_i.$$

Тогда имеем

$$\Delta^2 u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

По построению решения v_i, имеем $D(v_i, \Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla v_i|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |v_i|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty,\ i = 1, \dots, k.$$

Кроме того, легко проверить, что $D(R(x), \Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla R(x)|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |R(x)|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Отсюда следует, что $D(u_2, \Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |u_2|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Таким образом, u_2 является решением следующей задачи (u_2):

$$\Delta^2 u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$D(u_2, \Omega) < \infty, \quad \int_\Omega |\nabla u_2|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |u_2|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Покажем, что $u_2 \equiv 0, \quad x \in \Omega$.

Для любой функции $\varphi \in H^2_{loc}(\Omega)$,

$$\varphi\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0,$$

справедливо интегральное тождество (4):

$$\int_\Omega \Delta u_2\, \Delta\varphi\, dx = 0.$$

Подставим $\varphi = u_2\theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N),\ \theta \in C^\infty(\mathbb{R}),\ 0 \le \theta \le 1,\ \theta(s) = 0$ при $s \ge 2,\ \theta(s) = 1$ при $s \le 1$, получим

$$\int_\Omega (\Delta u_2)^2 \theta_N(x)\, dx = -J_1(u_2) - J_2(u_2), \tag{18}$$

где

$$J_1(u_2) = 2\int_\Omega \Delta u_2 \nabla u_2 \nabla\theta_N(x)\, dx,$$

$$J_2(u_2) = \int_\Omega \Delta u_2\, u_2 \Delta\theta_N(x)\, dx.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского и учитывая условия задачи (u_2), легко показать, что $J_1(u_2) \to 0$ и $J_2(u_2) \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, переходя к пределу в (18) при $N \to \infty$, получим

$$\int_\Omega (\Delta u_2)^2\, dx = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u_2}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

Отсюда следует [3, Гл. 2.4], что $u_2 \equiv 0$ в Ω. Теорема доказана.

□

References

[1] F. Cakoni, G.C. Hsiao, W.L. Wendland, *On the boundary integral equation method for a mixed boundary value problem of the biharmonic equation*, Complex Variables, **50**:7–11 (2005), 681–696. MR2155437

[2] R. Farwig, *A note on the reflection principle for the biharmonic equation and the Stokes system*, Acta Appl. Math., **37** (1994), 41–51. MR1308744

[3] G. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Berlin: Springer-Verlag, 1977. MR0473443

[4] V. A. Kondratiev, O. A. Oleinik, *Estimates for solutions of the Dirichlet problem for biharmonic equation in a neighbourhood of an irregular boundary point and in a neighbourhood of infinity Saint-Venant's principle*, Proc. Royal Society Edinburgh, **93A** (1983), 327–343. Zbl 0524.35036

[5] V. A. Kondratiev, O. A. Oleinik, *On the behavior at infinity of solutions of elliptic systems with a finite energy integral*, Arch. Rat. Mech. Anal., **99**:1 (1987), 75–99. MR881286

[6] V. A. Kondrat'ev, O. A. Oleinik, *Boundary value problems for the system of elasticity theory in unbounded domains. Korn's inequalities*, Russ. Math. Surveys, **43**:5 (1988), 65–119. Zbl 0669.73005

[7] V. A. Kondratiev, O. A. Oleinik, *Hardy's and Korn's inequality and their application*, Rend. Mat. Appl., Serie VII. **10** (1990), 641–666. MR1080319

[8] A. A. Kon'kov, *On the dimension of the solution space of elliptic systems in unbounded domains*, Mat. Sb., **184**:12 (1993), 23–52; Russian Acad. Sci. Sb. Math., **80**:2 (1995), 411–434. Zbl 0832.35038

[9] L. D. Kudryavtsev, *The solution of the first boundary-value problem for self-adjoint elliptic equations in the case of an unbounded region*, Math. USSR-Izv., **1**:5 (1967), 1131–1151ю

[10] O. A. Oleinik, V. A. Kondrat'ev, I. Kopachek, *On the asymptotic properties of solutions of the biharmonic equation*, Differ. Equations, **17**:10 (1981), 1886–1899. MR634885

[11] O. A. Matevosyan, *On solutions of boundary value problems for a system in the theory of elasticity and for the biharmonic equation in a half-space*, Differ. Equations, **34**:6 (1998), 803–808. MR1690885

[12] O. A. Matevosyan, *The exterior Dirichlet problem for the biharmonic equation: solutions with bounded Dirichlet integral*, Math. Notes, **70**:3 (2001), 363–377. MR1882250

[13] O. A. Matevossian, *Solutions of exterior boundary-value problems for the elasticity system in weighted spaces*, Sb. Math., **192**:12 (2001), 1763–1798. MR1885912

[14] H. A. Matevossian, *On solutions of mixed boundary value problems for the elasticity system in unbounded domains*, Izvestiya Math., **67**:5 (2003), 895–929. MR2018740

[15] O. A. Matevosyan, *On solutions of a boundary value problem for the polyharmonic equation in unbounded domains*, Russ. J. Math. Phys., **21**:1 (2014), 130–132. MR3182551

[16] H. A. Matevossian, *On solutions of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in unbounded domains*, P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis Appl., **7**:1 (2015), 74–78.

[17] O. A. Matevosyan, *Solution of a mixed boundary value problem for the biharmonic equation with finite weighted Dirichlet integral*, Differ. Equations, **51**:4 (2015), 487–501. MR3374824

[18] O. A. Matevossian, *On solutions of the Neumann problem for the biharmonic equation in unbounded domains*, Math. Notes, **98**:6 (2015), 990–994. MR3438551

[19] O. A. Matevosyan, *On solutions of the mixed Dirichlet–Navier problem for the polyharmonic equation in exterior domains*, Russ. J. Math. Phys., **23**:1 (2016), 135–138. MR3482773

[20] O. A. Matevosyan, *On solutions of one boundary value problem for the biharmonic equation*, Differ. Equations, **52**:10 (2016), 1379–1383. MR3582687

[21] H. A. Matevossian, *On the biharmonic Steklov problem in weighted spaces*, Russ. J. Math. Phys., **24**:1 (2017), 134–138.

[22] Hovik A. Matevossian, *On solutions of the mixed Dirichlet–Steklov problem for the biharmonic equation in exterior domains*, p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl., **9**:2 (2017), 151–157.

[23] H. A. Matevossian, *On the Steklov–type biharmonic problem in unbounded domains*, Russ. J. Math. Phys., **25**:2 (2018), 271–276.

[24] Hovik A. Matevossian, *On the polyharmonic Neumann problem in weighted spaces*, Complex Variables & Elliptic Equations, **64**:1 (2019), 1–7.

[25] Hovik Matevossian, *On the Mixed Dirichlet–Steklov-Type and Steklov-Type Biharmonic Problems in Weighted Spaces*, Math. Comput. Appl., **24**:1 (2019), 1–9.

[26] Hovik Matevossian, *On the mixed Dirichlet–Farwig biharmonic problem in exterior domains*, J. Adv. Math., **16** (2019), 8322–8329.

[27] Hovik A. Matevossian, *Mixed Boundary Value Problems for the Elasticity System in Exterior Domains*, Math. Comput. Appl., **24**:2 (2019), 1–7.

[28] S. G. Mikhlin, *Linear Partial Differential Equations*, Moscow: Vyssaya Shkola, 1977 (in Russian). MR510535

[29] S. L. Sobolev, *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, 3th ed., Moscow: Nauka, 1988; *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. Amer. Math. Soc., Providence 1991. MR986735

Hovik A. Matevossian

Federal Research Center „Computer Science & Control“, Russian Academy of Sciences,

40–42, R374, Vavilov str.,

Moscow, 119333, Russia

Moscow Aviation Institute (National Research University),

4, Volokolomskoe Shosse,

Moscow, 125993, Russia

E-mail address: hmatevossian@graduate.org