S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1843–1855 (2019) УДК 512.554
DOI 10.33048/semi.2019.16.131 MSC 17A70

СУПЕРАЛГЕБРЫ ГЕЛЬФАНДА-ДОРФМАНА-НОВИКОВА-ПУАССОНА И ИХ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ

А.С. ЗАХАРОВ

Abstract. We prove some result of $\mathcal{GDNP}$–algebras for $\mathcal{GDNP}$–superalgebras and embeding some $\mathcal{GDNP}$–superalgebras into $\mathcal{GDNP}$–superalgebras of vector type. Also we prove that not every $\mathcal{GDNP}$–superalgebra can be embeded into associative supercommutative superalgebra with even derivation D and product given by $a \circ b = aD(b)$.

Keywords: Gelfand-Dorfman-Novikov-Poisson superalgebras, derivations of algebras, Jordan superalgebras.

1. Введение

Алгебры Гельфанда-Дорфман-Новикова появились в работах И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман [1], а также А. А. Балинского и С. П. Новикова [2]. В литературе они известны под именем алгебр Новикова, но ввиду того, что работа И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман была раньше, Е. И. Зельманов и Л. А. Бокуть предложили добавить также фамилии соответствующих авторов.

Е. И. Зельманов [3] показал, что конечномерная простая алгебра Гельфанда-Дорфман-Новикова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль является полем. В. Т. Филиппов [4] построил нетривиальные примеры бесконечномерных алгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова над полем характеристики нуль и конечномерные алгебры над полем простой характеристики.

Zakharov, A.S., Gelfand-Dorfman-Novikov-Poisson superalgebras and their envelopes.

© 2019 Захаров А.С.

Поступила 24 сентября 2019 г., опубликована 5 декабря 2019 г.

Дж. М. Осборн [5, 6, 7] изучал простые алгебры Гельфанда-Дорфман-Новикова. В частности, были описаны алгебры с идемпотентом над полем простой характеристики. К. Ксу [8] развил результаты Дж. М. Осборна и построил описание простых конечномерных алгебр над алгебраически замкнутыми полями простой характеристики.

Понятие алгебр Новикова-Пуассона, которые по указанной выше причине, мы будем называть алгебрами Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона, появилось в работе К. Ксу [9] для описания простых алгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова над полем характеристики 0. В [10] было построено описание бесконечномерных алгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова над полем нулевой характеристики при некоторых ограничениях.

Все примеры алгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова и Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона, полученные в указанных выше работах, получались из ассоциативных коммутативных алгебр с дифференцированием. А. С. Джумадильдаев и К. Лофволл [11] нашли базис свободной алгебры Гельфанда-Дорфман-Новикова. С помощью этой работы З. Жанг, Ю. Чен и Л. А. Бокуть [12] доказали, что любая супералгебра Гельфанда-Дорфман-Новикова вкладывается в строгую алгебру Гельфанда-Дорфман-Новикова векторного типа. Автором в [13] было показано вложение алгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона в алгебры Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона векторного типа. В [14] приведены примеры алгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона не векторного типа.

В. Н. Желябин и А. С. Тихов [15] показали связь между алгебрами Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона и йордановыми супералгебрами. В работах [16, 17] изучалась эта связь . В данной работе результаты работ [13] и [17] обобщаются на случай супералгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона.

Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики не 2. Алгебра A называется *супералгеброй* или, что тоже самое, *$\mathbb{Z}_2$–градуированной алгеброй*, если $A = A_0 + A_1$ и $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ (сложение идет по модулю 2). Элементы $A_0 \cup A_1$ называются *однородными.* Функция $|.| : A_0 \cup A_1 \to \mathbb{Z}_2$, определенная по правилу

$$|a| = \begin{cases} 0, \text{если } a \in A_0, \\ 1, \text{иначе.} \end{cases}$$

Алгеброй Грассмана называется алгебра

$$\Gamma = \langle 1, e_i \mid i \in \mathbb{N}, e_ie_j = -e_je_i \rangle.$$

Алгебра Γ имеет базис $e_{i_1} \dots e_{i_k}$, где $i_1 < \dots < i_k$, и допускает градуировку $\Gamma_0 + \Gamma_1$, где Γ_0 — пространство, порожденное произведениями четной длины, а Γ_1 — нечетными. Пусть $A = A_0 + A_1$ — произвольная супералгебра, тогда *грассмановой оболочкой* алгебры A называется

$$\Gamma(A) = A_0 \otimes \Gamma_0 + A_1 \otimes \Gamma_1.$$

Пусть Ω — многообразие алгебр. Тогда скажем, что A — Ω–супералгебра, если $\Gamma(A)$ — Ω–алгебра. Так, $\langle A, \cdot \rangle$ — *ассоциативная суперкоммутативная супералгебра*, если для однородных элементов имеют места тождества

$$(a, b, c) = 0, \tag{1}$$

где $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$,

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba. \tag{2}$$

Скажем, что $\langle A, \circ \rangle$ — супералгебра *Гельфанда-Дорфман-Новикова*, если для однородных элементов имеют места тождества

$$(x \circ y) \circ z = (-1)^{|y||z|} (x \circ z) \circ y; \tag{3}$$

$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (-1)^{|x||y|} \Big((y \circ x) \circ z - y \circ (x \circ z) \Big). \tag{4}$$

Для краткости, мы будем писать $\mathcal{GDN}$–супералгебры.

Супералгебра $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ называется супералгеброй *Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона* (или $\mathcal{GDNP}$–супералгеброй), если $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра и $\langle A, \circ \rangle$ — $\mathcal{GDN}$–супералгебра и верны тождества

$$xy \circ z = x(y \circ z); \tag{5}$$

$$(-1)^{|y||z|} xz \circ y - x \circ yz = (-1)^{|x||y|+|x||z|} yz \circ x - (-1)^{|x||y|} y \circ xz. \tag{6}$$

Оказывается, что тождества (3) и (4) излишни для некоторых результатов, поэтому также рассматривается понятие *обобщенной супералгебры Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона* или $g\mathcal{GDNP}$–супералгебры. Скажем, что $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$–супералгебра, если $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра и имеют место тождества (5) и (6).

Пример 1. *Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра и D — четное дифференцирование, то есть $D(A_i) \subseteq A_i$, и для однородных элементов имеет место $D(ab) = aD(b) + D(a)b$, где $\lambda \in A_0^{\#}$ и $A_0^{\#} = A_0 + F \cdot 1$ — алгебра с присоединенной единицей. Тогда положим*

$$a \circ b = aD(b) + \lambda ab. \tag{7}$$

Получим $\mathcal{GDNP}$–супералгебру $\langle A, \cdot, \circ \rangle$, которую будем обозначать $GDNP(A, D, \lambda)$ и называть $\mathcal{GDNP}$–супералгеброй векторного типа. Алгебру $GDNP(A, D, 0)$ будем называть строгой $\mathcal{GDNP}$–супералгеброй векторного типа.

Пример 2. *В случае, если $\langle A, \cdot \rangle$ — унитальная, то и $g\mathcal{GDNP}$–супералгебру $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ мы будем называть унитальной. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — унитальная $g\mathcal{GDNP}$–супералгебра. Тогда положим*

$$\partial(a) = 1 \circ a - a \circ 1. \tag{8}$$

Тогда

$$\partial(ab) = 1 \circ ab - ab(1 \circ 1) = a \circ b - ab \circ 1 + (-1)^{|a||b|} b \circ a - ab \circ 1 =$$
$$a(1 \circ b - b \circ 1) + (1 \circ a - a \circ 1)b = \partial(a)b + a\partial(b).$$

Таким образом, ∂ — дифференцирование, а значит $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ является $\mathcal{GDNP}$–супералгеброй векторного типа.

[0]Здесь и далее по тексту будем считать, что операция $\cdot$ перед $\circ$ имеет приоритет. При этом символ $\cdot$ мы будем опускать.

Для многообразия $\mathcal{D}er\mathcal{C}om$ ассоциативных суперкоммутативных супералгебр с четным супердифференцированием мы можем построить $\mathcal{GDNP}$–супералгебру. Для унитальных $\mathcal{GDNP}$–супералгебр можно построить ассоциативную суперкоммутативную супералгебру с четным дифференцированием, в которую она вкладывается. Таким образом мы можем говорить об обертывающих в $\mathcal{GDNP}$–супералгебр в многообразии $\mathcal{D}er\mathcal{C}om$.

Скажем, что супералгебра $\langle B, \cdot, D\rangle$ из многообразия $\mathcal{D}er\mathcal{C}om$ является *обертывающей* $\mathcal{GDNP}$–супералгебры $\langle A, \cdot, \circ\rangle$, если существует вложение $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ в $\mathcal{GDNP}$–супералгебру векторного типа, построенную по $\langle B, \cdot, D\rangle$. В таком случае супералгебру $\langle B, \cdot, D\rangle$ мы будем называть *специальной*. Если супералгебра $\langle B, \cdot, D\rangle$ не вкладывается ни в какую супералгебру $\mathcal{GDNP}$–супералгебру векторного типа, то она называется *исключительной*

Для $\mathcal{GDN}$–супералгебр в [12] доказано, что существует вложение в строгую $\mathcal{GDN}$–супералгебру векторного типа. Однако, для $\mathcal{GDNP}$–супералгебр попытка ограничится только строгими $\mathcal{GDNP}$–супералгебрами векторного типа не будет иметь успеха.

Предложение 1. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — строгая $\mathcal{GDNP}$–супералгебра векторного типа. Тогда имеет место следующее тождество*

$$a \circ bc = ab \circ c + (-1)^{|b||c|} ac \circ b. \tag{9}$$

Доказательство. Так как $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — строгая $\mathcal{GDNP}$–супералгебра векторного типа, то для некоторого четного дифференцирования имеем

$$a \circ bc = aD(bc) = abD(c) + aD(b)c = abD(c) + acD(b) = ab \circ c + (-1)^{|b||c|} ac \circ b.$$

□

Приведем пример $\mathcal{GDNP}$–супералгебры, в которой это тождество не выполнено. Для этого достаточно рассмотреть $\mathcal{GDNP}$–супералгебру векторного типа $GDNP(A, D, \lambda)$, где $\lambda \neq 0$ и для некоторых элементов x, y имеет место $\lambda xy \neq 0$. Например, возьмем супералгебру полиномов $\mathbb{F}[x]$ от одной четной переменной (нечетная часть нулевая), $\lambda = 1$, $D = 0$. Тогда

$$x \circ xx = x^3 \neq 2x^3 = xx \circ x + xx \circ x.$$

Таким образом, (9) является s–тождеством в случае, если рассматривать вложение в строгие $\mathcal{GDNP}$–супералгебры векторного типа, и существуют исключительные $\mathcal{GDNP}$–супералгебры. Поэтому мы будем рассматривать вложение в $\mathcal{GDNP}$–супералгебры векторного типа.

В конце введения мы докажем одно вспомогательное тождество.

Предложение 2. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$. Тогда для однородных элементов имеет место тождество*

$$abc \circ d - (-1)^{|a||b|+|a||c|+|a||d|} bcd \circ a = ab \circ cd - (-1)^{|a||b|+|a||d|+|c||d|} bd \circ ac. \tag{10}$$

Доказательство. Простой проверкой тождества получим

$$abc \circ d - (-1)^{|a||b|+|a||c|+|a||d|} bcd \circ a = b(-1)^{|a||b|}\Big(ac \circ d - (-1)^{|a||c|+|a||d|} cd \circ a\Big) =$$

$$b(-1)^{|a||b|}\Big(a \circ cd - (-1)^{|a||d|+|c||d|} d \circ ac\Big) = ab \circ cd - (-1)^{|a||b|+|a||d|+|c||d|} bd \circ ac.$$

□

2. Вложение $\mathcal{GDNP}$–супералгебр в $\mathcal{GDNP}$–супералгебры векторного типа

В данном разделе мы продолжим конструкцию локализации кольца на $\mathcal{GDNP}$–супералгебры. Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — $\mathcal{GDNP}$–супералгебра. Рассмотрим произвольное мультипликативно замкнутое множество $S \subseteq A_0$. Элементы A_0 относительно операции $\cdot$ коммутируют со всеми элементами A. Рассмотрим множество пар $A \times S$ и отношение эквивалентности $\sim$ такое, что $(a, s) \sim (b, t)$ в том и только том случае, если для некоторого $r \in S$ имеет место $r(at - bs) = 0$. Фактормножество $(A \times S)/\sim$ мы обозначим $S^{-1}A$, его элементы будем называть дробями и записывать $\frac{a}{s}$. Операции продолжаются так же, как и для алгебр.

$$\alpha\frac{a}{s} + \beta\frac{b}{r} = \frac{\alpha ar + \beta bs}{bs}; \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{r} = \frac{ab}{sr}. \tag{11}$$

Не трудно заметить, что операции корректны и $\langle S^{-1}A, \cdot\rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра. Обозначим через $\frac{a}{1}, \frac{1}{s}$ и 1 соответственно дроби $\frac{as}{s}, \frac{s}{s^2}$ и $\frac{s}{s}$. При этом мы, вообще говоря, не предполагаем, что $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — унитальная. Тогда преобразование $\varphi : A \to S^{-1}A$, действующее по правилу $\varphi(a) = \frac{a}{1}$, является гомоморфизмом. Если среди S нет делителей нуля, то φ — вложение. Доказательство повторяет доказательство аналогичных результатов для алгебр, так как элементы S — четные и коммутируют со всеми элементами из A.

Далее мы должны продолжить операцию $\circ$ на дроби. Положим

$$\lambda_{xyz} = \frac{xy \circ z + xz \circ y - x \circ yz}{xyz}, \tag{12}$$

где $x, y, z \in S$. Так же, как и в лемме 2 [13], мы можем получить, что $\lambda_{xyz} = \lambda_{rst}$ и, в частности, использовать обозначение λ. Тогда положим

$$\frac{a}{s} \circ \frac{b}{t} = \lambda\frac{ab}{st} + \frac{a \circ b}{st} - \frac{ab \circ t}{st^2}. \tag{13}$$

Предложение 3. *Умножение $\circ$ задано корректно на $S^{-1}A$.*

Доказательство. Пусть $\frac{a}{s} = \frac{c}{u}$ и $\frac{b}{t} = \frac{d}{v}$. Это значит, что существуют $r, w \in S$ такие, что

$$r(au - sc) = w(bv - td) = 0.$$

Мы хотим показать, что $\frac{a}{s} \circ \frac{b}{t} = \frac{c}{u} \circ \frac{d}{v}$. То есть,

$$\lambda\frac{ab}{st} + \frac{a \circ b}{st} - \frac{ab \circ t}{st^2} = \lambda\frac{cd}{uv} + \frac{c \circ d}{uv} - \frac{cd \circ v}{uv^2}.$$

Не трудно заметить, что $\lambda\frac{ab}{st} = \lambda\frac{cd}{uv}$. Тогда достаточно показать

$$\frac{a \circ b}{st} - \frac{ab \circ t}{st^2} = \frac{c \circ d}{uv} - \frac{cd \circ v}{uv^2}.$$

Что, в свою очередь, эквивалентно

$$\frac{at \circ b - ab \circ t}{st^2} = \frac{cv \circ d - cd \circ v}{uv^2}.$$

Последнее равенство будет следовать из

$$rw^2\Big((at \circ b - ab \circ t)uv^2 - (cv \circ d - cd \circ v)st^2\Big) = 0.$$

Правую часть перепишем в виде

$$rw^2\Big((at\circ b-ab\circ t)uv^2-(ct\circ b-cb\circ t)sv^2\Big)+rw^2\Big((ct\circ b-cb\circ t)sv^2-(cv\circ d-cd\circ v)st^2\Big).$$

Первую скобку преобразуем следующим образом:

$$rw^2\Big((at\circ b-ab\circ t)uv^2-(ct\circ b-cb\circ t)sv^2\Big) = w^2tv^2(r(au-sc)\circ b)-w^2v^2(r(au-sc))b\circ t = 0.$$

Вторую скобку преобразуем следующим образом:

$$rscw^2\Big((tv^2 \circ b - bv^2 \circ t) - (t^2v \circ d - t^2d \circ v)\Big).$$

По предложению 2 получим

$$rscw^2\Big((tv^2\circ b-bv^2\circ t)-(t^2v\circ d-t^2d\circ v)\Big) = rscw^2(tv\circ vb-bv\circ vt)-rscw^2(tv\circ td-td\circ tv) =$$
$$rscw^2(tv \circ vb - tv \circ td) - rscw\big(w(bv - td)\big) \circ tv = -rsc(w^2vt \circ vb - w^2vt \circ td).$$

Рассмотрим выражение в скобках:

$$w^2(tv\circ vb-tv\circ td) = w\big(tv\circ wvb-vb\circ twv+wvb\circ tv\big)-w\big(tv\circ wtd-td\circ twv+wtd\circ tv\big) =$$
$$w(tv \circ wvb - tv \circ wtd) - w(vb \circ twv - td \circ twv) + w(wvb \circ tv - wtd \circ tv).$$

Заметим, что для каждой скобки имеет место следующее:

$$w(tv \circ wvb - tv \circ wtd) = wtv \circ (w(vb - td)) = 0;$$

$$w(vb \circ twv - td \circ twv) = w(vb - td) \circ twv = 0;$$

$$w(wvb \circ tv - wtd \circ tv) = w(w(vb - td) \circ tv) = 0.$$

Таким образом, предложение доказано. □

Предложение 4. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$–супералгебра и S — мультипликативно замкнутое множество. Тогда $\langle S^{-1}A, \cdot, \circ\rangle$ — также $\mathcal{GDNP}$–супералгебра векторного типа.*

Доказательство. Проверим, что $\langle S^{-1}A, \cdot, \circ\rangle$ является $g\mathcal{GDNP}$–супералгеброй векторного типа. Сначала проверим тождество (5).

$$\frac{a}{s}\left(\frac{b}{r}\circ\frac{c}{t}\right) = \frac{a}{s}\left(\lambda\frac{bc}{rt}+\frac{b\circ c}{tr}-\frac{bc\circ r}{tr^2}\right) = \lambda\frac{abc}{srt}+\frac{ab\circ c}{str}-\frac{abc\circ r}{str^2} = \left(\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{r}\right)\circ\frac{c}{t}.$$

Тождество (6) будет иметь вид

$$(-1)^{|b||c|}\left(\frac{a}{s}\cdot\frac{c}{r}\right)\circ\frac{b}{t}-\frac{a}{s}\circ\left(\frac{b}{t}\cdot\frac{c}{r}\right) = (-1)^{|a||b|+|a||c|}\left(\frac{b}{t}\cdot\frac{c}{r}\right)\circ\frac{a}{s}-(-1)^{|a||c|}\frac{b}{t}\circ\left(\frac{a}{s}\cdot\frac{c}{r}\right).$$

По определению операций получим

$$(-1)^{|b||c|}\left(\lambda\frac{acb}{srt}+\frac{ac\circ b}{srt}-\frac{acb\circ t}{srt^2}\right)-\left(\lambda\frac{abc}{str}+\frac{a\circ bc}{srt}-\frac{abc\circ rt}{sr^2t^2}\right)-$$
$$(-1)^{|a||b|+|a||c|}\left(\lambda\frac{bca}{trs}+\frac{bc\circ a}{trs}-\frac{bca\circ s}{trs^2}\right)+(-1)^{|a||c|}\left(\lambda\frac{bac}{tsr}+\frac{b\circ ac}{trs}-\frac{bac\circ rs}{tr^2s^2}\right) = 0.$$

Тогда перепишем правую часть следующим образом:

$$\lambda\left((-1)^{|b||c|}\frac{acb}{srt}-\frac{abc}{str}-(-1)^{|a||b|+|a||c|}\frac{bca}{trs}+(-1)^{|a||c|}\frac{bac}{tsr}\right)+$$
$$(-1)^{|b||c|}\frac{ac\circ b}{srt}-\frac{a\circ bc}{srt}-(-1)^{|a||b|+|a||c|}\frac{bc\circ a}{trs}+(-1)^{|a||c|}\frac{b\circ ac}{trs}-$$
$$\left((-1)^{|b||c|}\frac{acb\circ t}{srt^2}-\frac{abc\circ rt}{sr^2t^2}-(-1)^{|a||b|+|a||c|}\frac{bca\circ s}{trs^2}+(-1)^{|a||b|}\frac{bac\circ rs}{tr^2s^2}\right).$$

Отдельно рассмотрим каждую скобку. Первая будет иметь вид

$$\lambda\left((-1)^{|b||c|}\frac{acb}{srt}-\frac{abc}{str}-(-1)^{|a||b|+|a||c|}\frac{bca}{trs}+(-1)^{|a||b|}\frac{bac}{tsr}\right)=$$
$$\lambda\left(\frac{abc}{str}-\frac{abc}{str}-\frac{abc}{str}+\frac{abc}{str}\right)=0.$$

Аналогично, из второй получим

$$(-1)^{|b||c|}\frac{ac\circ b}{srt}-\frac{a\circ bc}{srt}-(-1)^{|a||b|+|a||c|}\frac{bc\circ a}{trs}+(-1)^{|a||c|}\frac{b\circ ac}{trs}=$$
$$\frac{(-1)^{|b||c|}ac\circ b-a\circ bc-(-1)^{|a||b|+|a||c|}bc\circ a+(-1)^{|a||c|}b\circ ac}{trs}=0.$$

И, наконец, для третей скобки

$$(-1)^{|b||c|}\frac{acb\circ t}{srt^2}-\frac{abc\circ rt}{sr^2t^2}-(-1)^{|a||b|+|a||c|}\frac{bca\circ s}{trs^2}+(-1)^{|a||b|}\frac{bac\circ rs}{tr^2s^2}=$$
$$\frac{(-1)^{|b||c|}sracb\circ t-sabc\circ rt-(-1)^{|a||b|+|a||c|}trbca\circ s+(-1)^{|a||b|}tbac\circ rs}{t^2r^2s^2}=$$
$$\frac{abc(sr\circ t-s\circ rt-tr\circ s+t\circ rs)}{t^2r^2s^2}=0.$$

Таким образом, $\langle S^{-1}A,\cdot,\circ\rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$–супералагебра. Так как элемент 1 будет единицей $\langle S^{-1}A,\cdot\rangle$, то $\langle S^{-1}A,\cdot,\circ\rangle$ — $\mathcal{GDNP}$–супералгебра векторного типа и предложение доказано. □

Предложение 5. *Пусть $\langle A,\cdot,\circ\rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$–супералгебра и S — мультипликативно замкнутое множество. Тогда отображение $\varphi : A \to S^{-1}A$, определенное правилом $\varphi(a)=\frac{a}{1}$, является гомоморфизмом $g\mathcal{GDNP}$–супералгебр.*

Доказательство. Очевидно, что φ — гомоморфизм ассоциативных суперкоммутативных супералгебр. Осталось проверить выполнение тождества

$$\frac{a}{1}\circ\frac{b}{1}=\frac{a\circ b}{1}.$$

Тогда положим $\lambda=\lambda_{sss}$, а также $\frac{a}{1}=\frac{sa}{s}$, $\frac{b}{1}=\frac{sb}{s}$ и $\frac{a\circ b}{1}=\frac{s(a\circ b)}{s}$. Получим

$$\frac{(2s^2\circ s-s\circ s^2)sasb}{s^5}+\frac{sa\circ sb}{s^2}+\frac{sasb\circ s}{s^3}=\frac{sa\circ b}{s}.$$

Приведем к общему знаменателю и получим

$$\frac{s^3a(2sb\circ s-b\circ s^2+s\circ sb+sb\circ s-s^2\circ b)}{s^5}=$$

$$\frac{s^3a(sb\circ s-b\circ s^2+s\circ sb-s^2\circ b)}{s^5}=0.$$

Предложение доказано. □

Теорема 1. *Пусть $\langle A,\cdot,\circ\rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$–супералгебра и x не делитель нуля в $\langle A,\cdot\rangle$. Тогда $\langle A,\cdot,\circ\rangle$ вложима в $\mathcal{GDNP}$–супералгебру векторного типа и, в частности, сама является $\mathcal{GDNP}$–супералгеброй.*

Доказательство. Пусть $s=s_0+s_1$, где $s_i\in A_i$. Покажем, что s_0 также не делитель нуля (левый или правый). Пусть это не так и для некоторого $a\in A$ имеет место $as_0=0$ или $s_0a=0$. Пусть $as_0=0$, тогда

$$(as_1)(s_0+s_1)=as_1s_0+as_1^2=as_0s_1=0.$$

Так как s — не делитель нуля, то $as_1=0$, но тогда

$$a(s_0+s_1)=0.$$

Получаем противоречие. Аналогично, не может быть выполнено и $s_0a=0$. Таким образом, s_0 — не делитель нуля и положим $S=\{s_0^i\mid i\in\mathbb{N}\}$. Тогда S — мультипликативно замкнутое множество четных элементов без делителей нуля. А значит, существует вложение $\varphi: A\to S^{-1}A$, где $\langle S^{-1}A,\cdot,\circ\rangle$ — $\mathcal{GDNP}$–супералгебра векторного типа. В частности, отсюда следует и что $\langle A,\cdot,\circ\rangle$ — $\mathcal{GDNP}$–супералгебра. □

3. Супералгебры йордановых скобок, построенные по $\mathcal{GDNP}$–супералгебрам

В работе [15] указана конструкция, которая позволяла по унитальным $\mathcal{GDNP}$–алгебрам (которые, как уже было сказано, являются $\mathcal{GDNP}$–алгебрами векторного типа) строить супералгебры йордановых скобок. В [16] и [17] эта конструкция обобщена и для $\mathcal{GDNP}$–алгебр. Мы рассмотрим аналогичную конструкцию для супералгебр.

Скажем, что $J=J_0+J_1$ — йорданова супералгебра, если в $\Gamma(J)$ имеют место тождества

$$xy=yx,\qquad (x^2,y,x)=0.$$

Пример 3. *Пусть $\langle A=A_0+A_1,\cdot\rangle$ — супералгебра. Тогда положим новое умножение*

$$a\odot b=\frac{1}{2}\left(ab+(-1)^{|a||b|}ba\right).$$

Тогда $\langle A,\odot\rangle$ — супералгебра, которую будем обозначать $A^{(+)_s}$. Если A — ассоциативная, то $A^{(+)_s}$ — йорданова. Йорданова супералгебра называется специальной*, если она вкладывается в некоторую йорданову супералгебру $A^{(+)_s}$, где A — ассоциативная супералгебра. В случае, если вложения не существует ни для какой алгебры A, то J —* исключительная*.*

Пример 4. *Пусть $\langle A=A_0+A_1,\cdot\rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра и $\{\,,\}$ — суперкососимметрическая билинейная форма, которую мы будем называть скобка. Тогда рассмотрим $J=A+A\xi$, где $A\xi$ — изоморфная копия A. Тогда положим новое умножение следующим образом:*

$$a\bullet b=ab,\quad a\bullet b\xi=ab\xi,\quad a\xi\bullet b=(-1)^{|b|}ab\xi,\quad a\xi\bullet b\xi=(-1)^{|b|}\{a,b\}. \tag{14}$$

Градуировку определим так, что $J_0 = A_0 + A_1\xi, J_1 = A_1 + A_0\xi$. *Обозначим супералгебру* $\langle J, \bullet\rangle$ *через* $J(A, \{\ ,\ \})$ *и будем называть ее* Дублем Кантора. *Если* $J(A, \{\ ,\ \})$ *— йорданова супералгебра, то скобка* $\{\ ,\ \}$ *называется йордановой.*

Пример 5. *Пусть* $\langle A = A_0 + A_1, \cdot\rangle$ *— ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с четным дифференцированием* D. *Определим скобку*

$$\{a, b\} = D(a)b - aD(b).$$

Тогда полученная скобка — йорданова, а полученная йорданова супералгебра, которую будем обозначать $J(A, D)$, *называется* йордановой супералгеброй векторного типа. *В* [18] *доказано, что* $J(A, D)$ *— специальные.*

Для $\mathcal{GDNP}$–супералгебры $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ определим скобку

$$\{a, b\} = a \circ b - (-1)^{|a||b|} b \circ a. \tag{15}$$

Покажем, что скобка йорданова и полученная йорданова супералгебра, которую мы обозначим $J(A)$, специальна. Для этого мы построим $(-1, 1)$ супералгебру $B(A)$ такую, что искомый дубль Кантора будет иметь вид $B(A)^{(+)_s}$. Для начала напомним, что $\langle B, *\rangle$ — $(-1, 1)$–супералгебра, если в $\Gamma(B)$ выполнены следующие тождества

$$(x, y, y)_* = 0;\ (x, y, z)_* + (y, z, x)_* + (z, x, y)_* = 0,$$

где $(x, y, z) = (x*y)*z - x*(y*z)$. После линеаризации в $\langle B, *\rangle$ для однородных элементов должны быть выполнены тождества

$$(x, y, z)_* + (-1)^{|y||z|}(x, z, y)_* = 0; \tag{16}$$

$$(x, y, z)_* + (-1)^{|x||y|+|x||z|}(y, z, x)_* + (-1)^{|x||z|+|y||z|}(z, x, y)_* = 0. \tag{17}$$

Пример 6. *Пусть* $\langle A = A_0 + A_1, \cdot\rangle$ *— ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с четным дифференцированием* D. *Рассмотрим* $B = A + A\xi$, *где* $A\xi$ *изоморфная копия* A, $\gamma \in A_0$, *и определим новое умножение*

$$\begin{aligned} &a * b = ab, \quad a * b\xi = (-1)^{|b|} a\xi * b = ab\xi,\\ &a\xi * b\xi = (-1)^{|b|}\left(\gamma ab + 2D(a)b + aD(b)\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Получим $(-1, 1)$*–супералгебру, которую мы будем называть* скрученной $(-1, 1)$–супералгеброй векторного типа *и обозначать* $B(A, D, \gamma)$.

Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$–супералгебра. Рассмотрим $B = A + A\xi$ и определим умножение

$$\begin{aligned} &a * b = ab, \quad a * b\xi = (-1)^{|b|} a\xi * b = ab\xi,\\ &a\xi * b\xi = (-1)^{|b|}\left(-2a \circ b - 4(-1)^{|a||b|} b \circ a\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Градуировка определена следующим образом: $B_0 = A_0 + A_1\xi, B_1 = A_1 + A_0\xi$. Супералгебру $\langle B, *\rangle$ обозначим $B(A)$.

Предложение 6. *Пусть* $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ *—* $g\mathcal{GDNP}$*–супералгебра. Тогда* $B(A)$ *—* $(-1, 1)$*–супералгебра.*

Доказательство. Мы должны проверить тождества. Не трудно заметить, что

$$(A, A, A) = (A\xi, A, A) = (A, A\xi, A) = (A, A, A\xi) = 0.$$

Тогда тождества достаточно проверять только для тех наборов однородных элементов, где по крайней мере два элемента из $A\xi$. Сначала рассмотрим тождество (16). Для элементов $a\xi, b\xi, c$ получим

$$\begin{gathered}(a\xi * b\xi) * c - a\xi * (b\xi * c) + (-1)^{|b\xi||c|}((a\xi * c) * b\xi - a\xi * (c * b\xi)) = \\ -2(-1)^{|b|+|b||c|}ac \circ b - 4(-1)^{|a||b|+|b|+|c||a|}bc \circ a + \\ 2(-1)^{|c|+|b|+|c|}a \circ bc + 4(-1)^{|c|+|b|+|c|+|a||b|+|a||c|}bc \circ a - \\ 2(-1)^{|c|+|b|+|b||c|+|c|}ac \circ b - 4(-1)^{|c|+|b|+|b||c|+|c|+|b||a|+|b||c|}b \circ ac + \\ 2(-1)^{|b||c|+|c|+|c|+|b|}a \circ cb + 4(-1)^{|b||c|+|c|+|c|+|b|+|a||c|+|a||b|}cb \circ a = \\ -4(-1)^{|b|}\Big((-1)^{|b||c|}ac \circ b - a \circ bc - (-1)^{|a||b|+|a||c|}bc \circ a + (-1)^{|a||b|}b \circ ac\Big) = 0.\end{gathered}$$

Для $a\xi, b, c\xi$ аналогично. Для этого достаточно заметить, что b и c входят симметрично. Для элементов $a, b\xi, c\xi$ получим

$$\begin{gathered}(a * b\xi) * c\xi - a * (b\xi * c\xi) + (-1)^{|b\xi||c\xi|}((a * c\xi) * b\xi - a * (c\xi * b\xi)) = \\ -2(-1)^{|c|}ab \circ c - 4(-1)^{|c|+|a||c|+|b||c|}c \circ ab + 2(-1)^{|c|}ab \circ c + 4(-1)^{|c|+|b||c|}ac \circ b - \\ 2(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|}ac \circ b - 4(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|+|a||b|+|b||c|}b \circ ac + \\ 2(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|}ac \circ b + 4(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|+|b||c|}ab \circ c = \\ -4(-1)^{|c|}\Big((-1)^{|a||c|+|b||c|}c \circ ab - (-1)^{|b||c|}ac \circ b - (-1)^{|a||b|}b \circ ac + ab \circ c\Big) = 0.\end{gathered}$$

Для элементов $a\xi, b\xi, c\xi$ получим

$$\begin{gathered}(a\xi * b\xi) * c\xi - a\xi * (b\xi * c\xi) + (-1)^{|b\xi||c\xi|}((a\xi * c\xi) * b\xi - a\xi * (c\xi * b\xi)) = \\ -2(-1)^{|b|}(a\circ b)*c\xi - 4(-1)^{|b|+|a||b|}(b\circ a)*c\xi + 2(-1)^{|c|}a\xi*(b\circ c) + 4(-1)^{|c|+|b||c|}a\xi*(c\circ b) - \\ 2(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|c|}(a \circ c) * b\xi - 4(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|c|+|a||c|}(c \circ a) * b\xi + \\ 2(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|}a\xi * (c \circ b) + 4(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|+|b||c|}a\xi * (b \circ c) = \\ -2\Big((-1)^{|b|+|b||c|}ac \circ b + 2(-1)^{|b|+|a||b|+|a||c|}bc \circ a - \\ (-1)^{|c|+|b|+|c|}ab \circ c - 2(-1)^{|c|+|b||c|+|c|+|b|}ac \circ b + \\ (-1)^{|b||c|+|b|+1+|b||c|}ab \circ c + 2(-1)^{|b|+|b||c|+1+|a||c|+|a||b|+|b||c|}bc \circ a - \\ (-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|+|c|+|b|}ac \circ b - 2(-1)^{|c|+1+|b|+|c|}ab \circ c\Big)\xi = 0.\end{gathered}$$

Теперь докажем (17). Это тождество симметрично относительно циклической перестановки. Поэтому достаточно рассмотреть следующие варианты. Для элементов $a\xi, b\xi, c$ получим

$$\begin{gathered}(a, b\xi, c\xi) + (-1)^{|a||b\xi|+|a||c\xi|}(b\xi, c\xi, a) + (-1)^{|c\xi||a|+|b\xi||c\xi|}(c\xi, a, b\xi) = \\ (a * b\xi) * c\xi - a * (b\xi * c\xi) + \\ (-1)^{|a||b|+|a||c|}(b\xi * c\xi) * a - (-1)^{|a||b|+|a||c|}b\xi * (c\xi * a) + \\ (-1)^{|c||a|+|a|+|b||c|+|b|+|c|+1}(c\xi * a) * b\xi - (-1)^{|c||a|+|a|+|b||c|+|b|+|c|+1}c\xi * (a * b\xi) = \\ -2\bigg((-1)^{|c|}ab \circ c + 2(-1)^{|c|+|b||c|+|a||c|}c \circ ab - (-1)^{|c|}ab \circ c - 2(-1)^{|c|+|b||c|}ac \circ b + \\ (-1)^{|a||b|+|a||c|+|c|+|a||b|+|a||c|}ab \circ c + 2(-1)^{|a||b|+|a||c|+|c|+|a||b|+|a||c|+|b||c|}ac \circ b - \\ (-1)^{|a||b|+|a||c|+|a|+|a||c|+|a|+|c|}b\circ ac + 2(-1)^{|a||b|+|a||c|+|a|+|a||c|+|a|+|c|+|a||b|+|b||c|}ac\circ b + \\ (-1)^{|c||a|+|a|+|b||c|+|b|+|c|+1+|a|+|a||c|+|b|}ac \circ b +\end{gathered}$$

$$2(-1)^{|c||a|+|a|+|b||c|+|b|+|c|+1+|a|+|a||c|+|b|+|a||b|+|b||c|}b\circ ac-$$
$$(-1)^{|c||a|+|a|+|b||c|+|b|+|c|+1+|a|+|b|}c\circ ab+$$
$$2(-1)^{|c||a|+|a|+|b||c|+|b|+|c|+1+|a|+|b|+|a||c|+|b||c|}ab\circ c\Big)=$$
$$-2(-1)^{|c|}\Big(ab\circ c+2(-1)^{|b||c|+|a||c|}c\circ ab-ab\circ c-2(-1)^{|b||c|}ac\circ b+$$
$$ab\circ c+2(-1)^{|b||c|}ac\circ b-(-1)^{|a||b|}b\circ ac-2(-1)^{|b||c|}ac\circ b-$$
$$(-1)^{|b||c|}ac\circ b-2(-1)^{|a||b|}b\circ ac+(-1)^{|c||a|+|b||c|}c\circ ab+2ab\circ c\Big)=$$
$$-6(-1)^{|c|}\Big(ab\circ c-(-1)^{|a||b|}b\circ ac-(-1)^{|b||c|}ac\circ b+(-1)^{|b||c|+|a||c|}c\circ ab\Big)=0.$$

Для элементов $a\xi, b\xi, c\xi$ получим

$$(a\xi,b\xi,c\xi)+(-1)^{|a\xi||b\xi|+|a\xi||c\xi|}(b\xi,c\xi,a\xi)+(-1)^{|a\xi||c\xi|+|b\xi||c\xi|}(c\xi,a\xi,b\xi)=$$
$$(a\xi*b\xi)*c\xi-a\xi*(b\xi*c\xi)+$$
$$(-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|}(b\xi*c\xi)*a\xi-(-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|}b\xi*(c\xi*a\xi)+$$
$$(-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|b|}(c\xi*a\xi)*b\xi-(-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|b|}c\xi*(a\xi*b\xi)=$$
$$((-1)^{|b|}a\circ b+2(-1)^{|b|+|a||b|}b\circ a)*c\xi-a\xi*((-1)^{|c|}b\circ c+2(-1)^{|c|+|b||c|}c\circ b)+$$
$$(-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|+|c|}(b\circ c)*a\xi+2(-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|+|c|+|b||c|}(c\circ b)*a\xi-$$
$$(-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|+|a|}b\xi*(c\circ a)-2(-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|+|a|+|a||c|}b\xi*(a\circ c)+$$
$$(-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|b|+|a|}(c\circ a)*b\xi+2(-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|b|+|a|+|a||c|}(a\circ c)*b\xi-$$
$$(-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|b|+|b|}c\xi*(a\circ b)+2(-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|b|+|b|+|a||b|}c\xi*(b\circ a)=$$
$$\Big((-1)^{|b|+|b||c|}ac\circ b+2(-1)^{|b|+|a||b|+|a||c|}bc\circ a-$$
$$(-1)^{|c|+|b|+|c|}ab\circ c-2(-1)^{|c|+|b||c|+|b|+|c|}ac\circ b+$$
$$(-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|a||b|+|a||c|}ab\circ c+2(-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|b||c|+|a||c|+|a||b|}ac\circ b-$$
$$(-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|+|a|+|c|+|a|}bc\circ a-2(-1)^{|a||b|+|b|+|c|+|a|+|a|+|c|+|a||b|}ab\circ c+$$
$$(-1)^{|a||c|+|b||c|+|b|+|b||c|+|a||b|}bc\circ a+2(-1)^{|b||c|+|b|+|b||c|}ab\circ c-$$
$$(-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|a|+|b|+|a||c|}ac\circ b-2(-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|a||b|+|a|+|b|+|b||c|}bc\circ a\Big)\xi=$$
$$(-1)^{|b|}\Big((-1)^{|b||c|}ac\circ b+2(-1)^{|a||b|+|a||c|}bc\circ a-$$
$$ab\circ c-2(-1)^{+|b||c|}ac\circ b+ab\circ c+2(-1)^{|b||c|}ac\circ b-(-1)^{|a||b|+|a||c|}bc\circ a-2ab\circ c+$$
$$(-1)^{|a||c|+|a||b|}bc\circ a+2ab\circ c-(-1)^{|b||c|}ac\circ b-2(-1)^{|a||c|+|a||b|}bc\circ a\Big)\xi=0.$$

Предложение доказано. □

Таким образом, мы получили $(-1,1)$–супералгебру. Любая $(-1,1)$–супералгебра, в частности, является правоальтернативной. В [18] доказано, что для любой правоальтернативной супералгебры B супералгебра $B^{(+)_s}$ является специальной йордановой супералгеброй. В конце концов, мы можем доказать теорему.

Теорема 2. *Пусть* $\langle A,\cdot,\circ\rangle$ — $g\mathcal{GDNP}$*–супералгебра. Тогда* $J(A)$ — *специальная йорданова супералгебра.*

Доказательство. Напомним, что в наших обозначениях $\langle B(A), *\rangle$ — $(-1,1)$–супералгебра, $B(A)^{(+)_s} = \langle B(A), \odot\rangle$ — йорданова супералгебра, полученная из $\langle B(A), *\rangle$ с помощью симметризации, а $J(A) = \langle J(A), \bullet\rangle$ — Дубль Кантора. Достаточно проверить, что $B(A)^{(+)_s} = J(A)$. Очевидно, что они совпадают как векторные пространства. Покажем совпадение операций

$$a \odot b = \frac{1}{2}\left(a * b + (-1)^{|a||b|} b * a\right) = a * b = ab = a \bullet b;$$

$$a \odot b\xi = \frac{1}{2}\left(a * b\xi + (-1)^{|a||b\xi|} b\xi * a\right) = \frac{1}{2}\left(ab\xi + (-1)^{|a||b|+|a|+|a|} ba\xi\right) = \\ ab\xi = a \bullet b\xi;$$

$$a\xi \odot b = \frac{1}{2}\left(a\xi * b + (-1)^{|a\xi||b|} b * a\xi\right) = \frac{1}{2}\left((-1)^{|b|} ab\xi + (-1)^{|a||b|+|b|} ba\xi\right) = \\ (-1)^{|b|} ab\xi = a\xi \bullet b;$$

$$a\xi \odot b\xi = \frac{1}{2}\left(a\xi * b\xi + (-1)^{|a\xi||b\xi|} b\xi * a\xi\right) = \frac{1}{2}\Big(-2(-1)^{|b|} a \circ b - 4(-1)^{|a||b|+|b|} b \circ a + \\ (-1)^{|a||b|+|a|+|b|+1}(-2(-1)^{|a|} b \circ a - 4(-1)^{|a|+|a||b|} a \circ b)\Big) = \\ (-1)^{|b|}\left(a \circ b - (-1)^{|a||b|} b \circ a\right) = (-1)^{|b|}\{a, b\} = a\xi \bullet b\xi.$$

Так как $B(A)^{(+)_s}$ — специальная йорданова супералгебра, то и $J(A)$ также специальная йорданова супералгебра и теорема доказана. □

Автор благодарит К. А. Байкалову, В. Н. Желябина, П. С. Колесникова за внимание к работе и полезные обсуждения.

References

[1] I. M. Gel'fand, I. Ya. Dorfman, *Hamiltonian operators and algebraic structures related to them*, Functional Analysis and Its Applications, **13**:4 (1979), 248–262. MR554407

[2] A. A. Balinskii, S. P. Novikov, *Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **283**:5 (1985), 1036–1039. MR802121

[3] E. I. Zelmanov, *A class of local translation-invariant Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **292**:6: (1987), 1294–1297. Zbl 0629.17002

[4] V. T. Filippov, *A class of simple nonassociative algebras*, Mat. Zametki, **45**:1 (1989), 101–105. Zbl 0683.17002

[5] J. M. Osborn, *Modules for Novikov algebras*, Contemp. Math., **184** (1991), 327–338.

[6] J. M. Osborn, *Novikov algebras*, Nova J. Algebra Geom., **1**:1 (1992), 1–13. Zbl 0876.17005

[7] J. M. Osborn, *Simple Novikov algebra with an idempotent*, Commun. Algebra, **20**:9, (1992), 2729–2753. Zbl 0772.17001

[8] X. Xu, *On Simple Novikov Algebras and Their Irreducible Modules*, J. Algebra, **185** (1996), 905–934. MR1419729

[9] Xu, X, *Novikov-Poisson algebra*, J. Algebra, **190**:2 (1997), 253–279.

[10] Xu, X, *Classification of simple Novikov Algebra and their irreducible modules of characterestic 0*, J. Algebra, **246**:2 (2001), 673–707. MR1872120

[11] A. S. Dzhumadildaev and C. Lofwall, *Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities*, Homology, Homotopy and Applications, **4**:2 (2002), 165–190. MR1918188

[12] Z. Zhang, Y. Chen, L.A. Bokut, *On Free Gelfand-Dorfman-Novikov Superalgebras and a PBW Type Theorem*, International Journal of Algebra and Computation, **29**:3, (2019), 481–505. MR3955819

[13] A. S. Zakharov, *Embedding Novikov–Poisson algebras in Novikov–Poisson algebras of vector type*, Algebra Logika, **52**:3 (2013), 236–249. MR3137129

[14] A. S. Zakharov, *Novikov-Poisson algebras in low dimension*, Sib. Elektron. Mat. Izv, **12** (2015), 381–393. MR3493736

[15] V. N. Zhelyabin, A. S. Tikhov, *Novikov–Poisson algebras and associative commutative derivation algebras*, Algebra Logika, **47**:2 (2008), 107–117. MR2438009

[16] A. S. Zakharov, *Novikov-Poisson algebras and superalgebras of Jordan brackets*, Commun. Algebra , **42**:5 (2014), 2285–2298. MR3169704

[17] V. N. Zhelyabin, A. S. Zakharov, *Speciality of Jordan superalgebras related to Novikov–Poisson flgebras*, Mat. Zametki, **97**:3 (2015), 359—367; Math. Notes, **97**:3 (2015), 341—348. MR3370524

[18] I. P. Shestakov, *Superalgebras and counterexamples*, Sibirsk. Mat. Zh. **32**:6 (1991), 187–196; Siberian Math. J., **32**:6 (1991), 1052–1060. MR1156760

Anton Stanislavovich Zakharov
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marksa ave.,
Novosibirsk, 630073, Russia
E-mail address: antzakh@gmail.com