S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1856–1867 (2019) УДК 519.644.7
DOI 10.33048/semi.2019.16.132 MSC 65D30

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ПРОИЗВОДНЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, НА ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ

А.А. КЛЯЧИН

Abstract. In the present paper, it is proved that a functional containing second derivatives can be calculated with an error of order $O(h^{4m+1})$ with a triangular mesh of $h \to 0$ if the piecewise polynomial functions of degree $4m+1$ for $m \geq 1$. For $n = 2$ we give an example of the fact that the piecewise quadratic approximation gives the second order of accuracy for calculating the functional for a special kind of triangulation.

Keywords: piecewise polynomial function, approximation of the functional, triangulation.

1. Введение

В настоящей работе доказывается, что функционал, содержащий вторые производные, может быть вычислен с погрешностью порядка $O(h^{4m+1})$ при мелкости треугольной сетки $h \to 0$, если в качестве приближающих рассматривать специальным образом выбранные кусочно-полиномиальные функции степени $4m+1$ при $m \geq 1$. При $n = 2$ мы приводим пример того, что кусочно-квадратичная аппроксимация дает второй порядок точности вычисления функционала для специального вида триангуляции.

Klyachin, A.A., Estimation of the error of calculating the functional containing higher-order derivatives on a triangular grid.

© 2019 Клячин А.А.

Работа поддержана Российским Фондом фундаментальных исследований и Администрацией Волгоградской области (проект р_а 19-47-340015), а так же выполнена при поддержке Международного математического центра в Академгородке.

Поступила 31 января 2019 г., опубликована 6 декабря 2019 г.

Рассмотрим функционал, задаваемый интегралом

$$I(f)=\int\limits_{\Omega} G(x,f,\nabla f,D^2f)dx,\ D^2f=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)^n_{i,j=1}, \tag{1}$$

который определен для функций $f\in C^2(\overline{\Omega})$ и функция G имеет вид

$$G=G(x,u,\xi_1,...,\xi_n,\eta_{11},\eta_{12},...,\eta_{n\,n}).$$

Будем предполагать, что функция G имеет непрерывные производные до 3-го порядка включительно по переменным x,u,ξ_i,η_{ij}. Тогда они являются ограниченными в любой ограниченной области изменения этих переменных.

Для функционала $I(u)$ можно записать соответствующее уравнение Эйлера-Лагранжа вариационной задачи

$$Q[f]\equiv\sum_{i,j=1}^{n}\Big(G'_{\eta_{ij}}(x,u,\nabla f,D^2f)\Big)''_{x_ix_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\big(G'_{\xi_i}(x,f,\nabla f,D^2f)\big)'_{x_i}+G'_u(x,u,\nabla u,D^2f)=0. \tag{2}$$

В качестве примера, приведем функционал полной свободной энергии деформированной пластинки (см. [1], гл. II), играющий важную роль в теории упругости,

$$\iint\limits_{\Omega}\left\{\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\sigma)\left(\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\right\}dxdy.$$

В данной работе мы исследуем вопрос о степени аппроксимации функционала (1) кусочно-полиномиальными функциями. К подобным задачам приводят, например, вопросы сходимости вариационных методов различных краевых задач [2]–[5]. Проблема заключается в том, что интеграл (1) должен быть вычислен с достаточно высокой точностью. Например, для двумерных задач точность должна быть не хуже чем $O(h^2)$ при $h\to 0$, где h – мелкость разбиения области на треугольники. Именно в этом случае удается показать равномерную сходимость, например, кусочно-линейных решений [4], [5]. Однако, производные непрерывно дифференцируемой функции приближаются производными кусочно-линейной функции с погрешностью первого порядка относительно диаметров треугольников триангуляции (см., например, [7] – [22]). Причем с повышением гладкости функции оценка не улучшается. Тем не менее, для функционала площади и интеграла энергии натяжения равновесной капиллярной поверхности удается установить нужный порядок точности (см. [4]-[6],[23]–[25]). В нашей работе мы даем асимптотическую оценку погрешности вычисления функционала (1), содержащего вторые производные, в классе кусочно-полиномиальных функций, заданных на произвольной треугольной сетке.

2. Основные результаты

Отметим, что оценки приближения функции и ее производных алгебраическими многочленами степени m в треугольнике, приводят к тому, что функционал (1) может быть вычислен с погрешностью порядка $O(h^{m-1})$ (см. приводимые ниже оценки). В тоже время, как показано в работе [6], если функция G не зависит от вторых производных D^2u, то функционал (1) вычисляется с помощью кусочно-линейной аппроксимации с точностью $O(h^2)$, а не $O(h)$, как можно было бы ожидать. Это дало возможность надеяться, что и для кусочно-квадратичной аппроксимации функционала, в общем случае зависящего от D^2u, степень приближения будет порядка $O(h^2)$. Более того, в случае $n = 1$ можно показать, что это утверждение действительно справедливо. Однако, при $n = 2$ нам удается доказать, что кусочно-квадратичная аппроксимация может дать второй порядок точности вычисления функционала (1) только для специального вида триангуляции. В общем случае при кусочно-полиномиальной аппроксимации степени m погрешность вычисления функционала (1) будет составлять порядка $O(h^{m-1})$. Однако, используя подход, примененный в работе [6], и применяя кусочно-полиномиальные функции из $C^m(\Omega)$, можно увеличить степень аппроксимации до $O(h^m)$ при специально выбранной степени m.

Дадим необходимые определения. Пусть задана многоугольная ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Рассмотрим произвольное разбиение этого многоугольника на невырожденные треугольники T_1, T_2, ..., T_N и пусть M_1, M_2, ..., M_p - все вершины этих треугольников. Будем предполагать, что ни одна из точек M_i не является внутренней точкой ни одной стороны треугольников. Через Γ_l будем обозначать стороны всех треугольников, $l = 1, 2, ..., L$, а максимальный диаметр всех треугольников обозначим через h, т. е. $h = \max\limits_{1\le k\le N} \operatorname{diam} T_k$.

Будем рассматривать функцию $f(x_1, x_2)$, у которой все производные порядка $n+1$ ограничены некоторой постоянной M. Зафиксируем произвольное натуральное число m и считаем, что $n = 4m + 1$. Для каждого треугольника T_k будем строить полином степени $4m+1$ следующим образом (см. [8]). Пусть A_1^k, A_2^k, A_3^k вершины этого треугольника. На каждой из сторон $[A_i^k, A_j^k]$ выделим множество точек $\{B_{l,ij}^k\}_{l=1}^r$, $r = 1, ..., m$, таких, что при каждом фиксированном r эти точки делят сторону, на которой они лежат, на $r+1$ равных отрезков. Для построения интерполяционного многочлена P_{4m+1} на T_k зададим значения функции и всех ее производных до порядка $2m$ в вершинах треугольника и по r производных r-го порядка ($r = 1, ..., m$) по нормалям к каждой из сторон треугольника

$$\frac{\partial^r P_{4m+1}(A_i^k)}{\partial x_1^{r-l}\partial x_2^l} = \frac{\partial^r f(A_i^k)}{\partial x_1^{r-l}\partial x_2^l},\ 0 \le r \le 2m,\ 0 \le l \le r,\ i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^r P_{4m+1}(B_{l,ij}^k)}{\partial n_{ij}^r} = \frac{\partial^r f(B_{l,ij}^k)}{\partial n_{ij}^r},\ 1 \le r \le m,\ 1 \le l \le r,\ i, j = 1, 2, 3,\ i \ne j. \tag{4}$$

В [8] и [9] для условий (3), (4) и выбираемых некоторыми способами оставшихся условий доказаны оценки

$$\left|\frac{\partial^s (f(x_1, x_2) - P_{4m+1}(x_1, x_2))}{\partial x_1^l \partial x_2^{s-l}}\right| \le C(m) M h^{4m+2-s} (\sin\alpha)^{-s}, \tag{5}$$

где α – минимальный угол в треугольнике T_k. Получившаяся кусочно-полиномиальная функция, которую будем обозначать f^P, принадлежит классу $C^m(\Omega)$ (см. [8]).

Если не требовать гладкости кусочно-полиномиальной функции, то можно в каждом треугольнике T_k построить интерполяционный многочлен только по значениям функции. Рассмотрим систему точек

$$A_1^k + \frac{i}{m}\overrightarrow{A_1^k A_2^k} + \frac{j}{m}\overrightarrow{A_1^k A_3^k},$$

где i, j – целые числа от 0 до m и такие, что $i + j \leq m$.

Число этих точек r_m, включая вершины треугольника, равно

$$r_m = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Пусть $\tilde{A}_1^k, \tilde{A}_2^k, ..., \tilde{A}_{r_m}^k$ – полученные точки. В T_k построим интерполяционный полином $P_k^m(x)$ степени m такой, что

$$P_k^m(\tilde{A}_i^k) = f(\tilde{A}_i^k), \quad i = 1, 2, ..., r_m.$$

Полученную непрерывную кусочно-полиномиальную функцию будем обозначать через $P^m(x) = P^m(x_1, x_2)$.

Нам далее понадобится оценка погрешности приближения производных функции производными интерполяционного многочлена. Пусть $f \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$. В работе [12] доказывается, что для всех $(x_1, x_2) \in T_k$ выполнено неравенство

(6)

$$\left| \frac{\partial^s (f(x_1, x_2) - P_m(x_1, x_2))}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right| \leq K (\sin\theta)^{-s} M h^{m-s+1}, \quad 0 \leq s \leq m, \quad k_1 + k_2 = s,$$

где θ максимальный угол триангуляции, $f \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, $|\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_1^q \partial x_2^{m+1-q}}| \leq M$, $q = 0, ..., m+1$, и постоянная K не зависит от разбиения $\{T_k\}_{k=1}^N$, области Ω и f.

Из неравенства (6) можно непосредственно получить, что кусочно-квадратичная функция $P^2(x)$ аппроксимирует функционал (1) с точностью порядка $O(h)$, так как в этом случае $m = s = 2$. Однако, как показывает следующий пример, для триангуляции, построенной по прямоугольной сетке, погрешность может повышаться до $O(h^2)$.

Пример. Пусть $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ и

$$I(u) = \iint\limits_{\Omega} (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2) dx dy.$$

Рассмотрим точки $x_i = \frac{i}{n}$, $y_j = \frac{j}{n}$, $i, j = 0, ..., n$. Положим $h = \frac{1}{n}$. Введем обозначение $Q_{ij} = (x_i, y_j)$.

В каждом треугольнике $T_{ij}^1 = \triangle\, Q_{ij} Q_{i+1j} Q_{ij+1}$ заменим функцию $u(x, y)$ на квадратичную $P_1(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$, исходя из условий

$$P_1(x_i, y_j) = u(x_i, y_j),\ P_1(x_{i+1}, y_j) = u(x_{i+1}, y_j),\ P_1(x_i, y_{j+1}) = u(x_i, y_{j+1}),$$

$$P_1(x_i + 0.5h, y_j) = u(x_i + 0.5h, y_j),\ P_1(x_i, y_j + 0.5h) = u(x_i, y_j + 0.5h),$$

$$P_1(x_i + 0.5h, y_j + 0.5h) = u(x_i + 0.5h, y_j + 0.5h).$$

Аналогично, в каждом треугольнике $T^2_{ij} =\triangle\, Q_{i+1j}Q_{ij+1}Q_{i+1j+1}$ заменим функцию $u(x,y)$ на квадратичную $P_2(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$, исходя из условий

$$P_2(x_{i+1}, y_{j+1}) = u(x_{i+1}, y_{j+1}),\ P_2(x_{i+1}, y_j) = u(x_{i+1}, y_j),\ P_2(x_i, y_{j+1}) = u(x_i, y_{j+1}),$$

$$P_2(x_i + 0.5h, y_{j+1}) = u(x_i + 0.5h, y_{j+1}),\ P_2(x_{i+1}, y_j + 0.5h) = u(x_{i+1}, y_j + 0.5h),$$

$$P_2(x_i + 0.5h, y_j + 0.5h) = u(x_i + 0.5h, y_j + 0.5h).$$

Отметим, что в треугольнике T^1_{ij} выполняются равенства

$$(P_1)_{xy}(x,y) = \frac{u(x_i, y_j) + u(x_i + 0.5h, y_j + 0.5h) - u(x_i + 0.5h, y_j) - u(x_i, y_j + 0.5h)}{(h/2)^2},$$

$$(P_1)_{xx}(x,y) = \frac{u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i + 0.5h, y_j)}{(h/2)^2},$$

$$(P_1)_{yy}(x,y) = \frac{u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1} - 2u(x_i, y_j + 0.5h)}{(h/2)^2},$$

а в треугольнике T^2_{ij} выполнено

$$(P_2)_{xy}(x,y) =$$

$$= \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) + u(x_i + 0.5h, y_j + 0.5h) - u(x_i + 0.5h, y_{j+1}) - u(x_{i+1}, y_j + 0.5h)}{(h/2)^2},$$

$$(P_2)_{xx}(x,y) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) + u(x_{i+1}, y_{j+1}) - 2u(x_i + 0.5h, y_{j+1})}{(h/2)^2},$$

$$(P_2)_{yy}(x,y) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_{j+1} - 2u(x_{i+1}, y_j + 0.5h)}{(h/2)^2}.$$

Покажем, что

$$\iint\limits_{\Omega} (u^2_{xx} + 2u^2_{xy} + u^2_{yy})dxdy - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \iint\limits_{T^1_{ij}} (((P_1)_{xx})^2 + 2((P_1)_{xy})^2 + ((P_1)_{yy})^2)dxdy -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \iint\limits_{T^2_{ij}} (((P_2)_{xx})^2 + 2((P_2)_{xy})^2 + ((P_2)_{yy})^2)dxdy = O(h^2)$$

при $h \to 0$. Доказательство проведем для каждой производной второго порядка в отдельности. Рассмотрим сначала случай смешанной производной. Считая, что функция $u(x,y)$ четырежды непрерывно дифференцируема и используя формулу Тейлора с центром в точке $(ih + 0.5h, jh + 0.5h)$, имеем

$$u(x,y) = u^{ij} + u^{ij}_x(x - ih - 0.5h) + u^{ij}_y(y - jh - 0.5h) + 0.5(u^{ij}_{xx}(x - ih - 0.5h)^2 +$$

$$+ 2u^{ij}_{xy}(x - ih - 0.5h)(y - jh - 0.5h) + u^{ij}_{yy}(y - jh - 0.5h)^2) + \frac{1}{6}\left(u^{ij}_{xxx}(x - ih - 0.5h)^3 +\right.$$

$$+ 3u^{ij}_{xxy}(x - ih - 0.5h)^2(y - jh - 0.5h) + 3u^{ij}_{xyy}(x - ih - 0.5h)(y - jh - 0.5h)^2 +$$

$$\left. + u^{ij}_{yyy}(y - jh - 0.5h)^3\right) + O(((x - ih - 0.5h)^2 + (y - jh - 0.5h)^2)^2)$$

при $(x,y) \to (ih + 0.5h, jh + 0.5h)$, где u^{ij}, u^{ij}_x, u^{ij}_y ... – значения функции u и ее соответствующих производных в точке $(ih + 0.5h, jh + 0.5h)$. Следовательно,

$$u(ih, jh) = u^{ij} - u^{ij}_x 0.5h - u^{ij}_y 0.5h + \frac{h^2}{8}(u^{ij}_{xx} + 2u^{ij}_{xy} + u^{ij}_{yy}) -$$

$$-\frac{h^3}{48}(u_{xxx}^{ij} + 3u_{xxy}^{ij} + 3u_{xyy}^{ij} + u_{yyy}^{ij}) + O(h^4),$$

$$u(ih + 0.5h, jh) = u^{ij} - u_y^{ij} 0.5h + \frac{h^2}{8} u_{yy}^{ij} - \frac{h^3}{48} u_{yyy}^{ij} + O(h^4),$$

$$u(ih, jh + 0.5h) = u^{ij} - u_x^{ij} 0.5h + \frac{h^2}{8} u_{xx}^{ij} - \frac{h^3}{48} u_{xxx}^{ij} + O(h^4).$$

$$u(ih + h, jh + h) = u^{ij} + u_x^{ij} 0.5h + u_y^{ij} 0.5h + \frac{h^2}{8}(u_{xx}^{ij} + 2u_{xy}^{ij} + u_{yy}^{ij}) +$$

$$+\frac{h^3}{48}(u_{xxx}^{ij} + 3u_{xxy}^{ij} + 3u_{xyy}^{ij} + u_{yyy}^{ij}) + O(h^4),$$

$$u(ih + 0.5h, jh + h) = u^{ij} + u_y^{ij} 0.5h + \frac{h^2}{8} u_{yy}^{ij} + \frac{h^3}{48} u_{yyy}^{ij} + O(h^4),$$

$$u(ih + h, jh + 0.5h) = u^{ij} + u_x^{ij} 0.5h + \frac{h^2}{8} u_{xx}^{ij} + \frac{h^3}{48} u_{xxx}^{ij} + O(h^4).$$

Откуда, для треугольника T_{ij}^1, получаем

$$(P_1)_{xy} = \frac{u(ih, jh) + u(ih + 0.5h, jh + 0.5h) - u(ih + 0.5h, jh) - u(ih, jh + 0.5h)}{(h/2)^2} =$$

$$= u_{xy}^{ij} - \frac{h}{4}(u_{xxy}^{ij} + u_{xyy}^{ij}) + O(h^2).$$

Аналогично, для треугольника T_{ij}^2, имеем

$$(P_2)_{xy} = u_{xy}^{ij} + \frac{h}{4}(u_{xxy}^{ij} + u_{xyy}^{ij}) + O(h^2).$$

Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} u_{xy}^2 dxdy - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \iint\limits_{T_{ij}^1} ((P_1)_{xy})^2 dxdy - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \iint\limits_{T_{ij}^2} ((P_2)_{xy})^2 dxdy =$$

$$\iint\limits_{\Omega} u_{xy}^2 dxdy - \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \Big((u_{xy}^{ij} - \frac{h}{4}(u_{xxy}^{ij} + u_{xyy}^{ij}) + O(h^2))^2 +$$

$$(u_{xy}^{ij} + \frac{h}{4}(u_{xxy}^{ij} + u_{xyy}^{ij}) + O(h^2))^2 \Big) = \iint\limits_{\Omega} u_{xy}^2 dxdy - h^2 \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} (u_{xy}^{ij})^2 - O(h^2) = O(h^2)$$

в силу известной оценки погрешности вычисления двойного интеграла по формуле средних (см., например, гл.4, §3 в [26]).

Рассмотрим теперь случай производной u_{xx}. Оценим следующую разность

$$\int\limits_{jh}^{jh+h} \int\limits_{ih}^{ih+h} u_{xx}^2 dxdy - \frac{u(ih, jh) + u(ih + h, jh) - 2u(ih + 0.5h, jh)}{(h/2)^2} \frac{h^2}{2} -$$

$$-\frac{u(ih, jh + h) + u(ih + h, jh + h) - 2u(ih + 0.5h, jh + h)}{(h/2)^2} \frac{h^2}{2}.$$

Нам понадобится следующее равенство (см., например, гл.3, п. 2 в [26])

$$(7) \qquad u_{xx}(ih + 0.5h, y) = \frac{u(ih, y) + u(ih + h, y) - 2u(ih + 0.5h, y)}{(h/2)^2} + O(h^2).$$

Причем, эта оценка равномерная относительно $y \in [0,1]$. Тогда

$$\int\limits_{jh}^{jh+h}\int\limits_{ih}^{ih+h} u_{xx}^2 dxdy = \int\limits_{jh}^{jh+h}\left(\int\limits_{ih}^{ih+h} u_{xx}^2(x,y)dx - hu_{xx}^2(ih+0.5h,y)\right)dy+$$

$$+h\int\limits_{jh}^{jh+h} u_{xx}^2(ih+0.5h,y)dy = \int\limits_{jh}^{jh+h}\left(\int\limits_{ih}^{ih+h} u_{xx}^2(x,y)dx - hu_{xx}^2(ih+0.5h,y)\right)dy+$$

$$+h\int\limits_{jh}^{jh+h}\left(u_{xx}^2(ih+0.5h,y) - \frac{u(ih,y)+u(ih+h,y)-2u(ih+0.5h,y)}{(h/2)^2}\right)dy+$$

$$+h\int\limits_{jh}^{jh+h}\frac{u(ih,y)+u(ih+h,y)-2u(ih+0.5h,y)}{(h/2)^2}dy. \tag{8}$$

Далее, пользуясь формулой трапеций вычисления определенного интеграла и ее оценкой погрешности (см., например, гл.4, §1 в [26])

$$\int\limits_{jh}^{jh+h}\frac{u(ih,y)+u(ih+h,y)-2u(ih+0.5h,y)}{(h/2)^2}dy =$$

$$= \frac{u(ih,jh)+u(ih+h,jh)-2u(ih+0.5h,jh)}{(h/2)^2}\frac{h}{2}+$$

$$+\frac{u(ih,jh+h)+u(ih+h,jh+h)-2u(ih+0.5h,jh+h)}{(h/2)^2}\frac{h}{2}+O(h^3).$$

Отметим, что здесь мы используем, что функция

$$\frac{u(ih,y)+u(ih+h,y)-2u(ih+0.5h,y)}{(h/2)^2}$$

имеет ограниченную производную 2-го порядка по y равномерно по $h \in [0,1]$. Суммируя вышеприведенное равенство (8) по i и j, пользуясь (7) и оценкой погрешности вычисления определенного интеграла для центральных прямоугольников (см., например, гл.4, §1 в [26]) для первого слагаемого в (8), получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int\limits_{jh}^{jh+h}\int\limits_{ih}^{ih+h} u_{xx}^2 dxdy = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u(ih,jh)+u(ih+h,jh)-2u(ih+0.5h,jh)}{(h/2)^2}\frac{h^2}{2}+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u(ih,jh+h)+u(ih+h,jh+h)-2u(ih+0.5h,jh+h)}{(h/2)^2}\frac{h^2}{2}+O(h^2)$$

при $h \to 0$. Для производной u_{yy} рассуждения аналогичны.

Нужно отметить, что при доказательстве данной асимптотической оценки мы существенно использовали прямоугольный вид треугольной сетки. Для триангуляции общего вида доказать, что погрешность имеет второй порядок точности не удается.

Отметим, что оценки (5), непосредственно примененные оценке погрешности вычисления $I(f)$ в каждом треугольнике T_k, дадут асимптотическую оценку

$$I(f) - I(f^P) = O(h^{4m}), \quad I(f^P) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} G(x, f^P, \nabla f^P, D^2 f^P)\, dx,$$

при $h \to 0$. Однако, если воспользоваться идеей, изложенной в работе [6], то можно установить более высокий порядок точности за счет гладкости кусочно-полиномиальной функции f^P. Итак, мы предполагаем, что $f(x_1, x_2) \in C^{4m+2}(\Omega)$ и $g^t(x) = f^P(x) + t(f(x) - f^P(x))$, $t \in [0,1]$. Для краткости введем следующие обозначения

$$G_i^t = G'_{\xi_i}(x, g^t, \nabla g^t, D^2 g^t), \quad G_{ij}^t = G'_{\eta_{ij}}(x, g^t, \nabla g^t, D^2 g^t).$$

Применяя формулу Ньютона – Лейбница, имеем

$$I(f) - I(f^P) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} \big(G(x, f, \nabla f, D^2 f) - G(x, f^P, \nabla f^P, D^2 f^P)\big)\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_0^1 \Bigg[\int\limits_{T_k} (f - f^P) G'_u(x, g^t, \nabla g^t, D^2 g^t)\, dx + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{T_k} (f - f^P)'_{x_i} G_i^t\, dx +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{T_k} (f - f^P)''_{x_i x_j} G_{ij}^t\, dx \Bigg] dt. \tag{9}$$

Ниже через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ будем обозначать внешнюю нормаль как к границе треугольника T_k, так и к границе области Ω. Для второго слагаемого, применяя формулу Гаусса – Остроградского в каждом треугольнике T_k, получаем

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{T_k} (f - f^P)'_{x_i} G_i^t\, dx = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial T_k} (f - f^P) \nu_i G_i^t\, dS -$$

$$- \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{T_k} (f - f^P)(G_i^t)'_{x_i}\, dx.$$

Тогда, разбивая интеграл по ∂T_k на интегралы отдельно по сторонам, лежащим на границе $\partial\Omega$, и на интегралы по внутренним сторонам Γ_l, получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{T_k} (f - f^P)'_{x_i} G_i^t\, dx = - \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} (f - f^P)(G_i^t)'_{x_i}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega} (f - f^P) \sum_{i=1}^{2} \nu_i G_i^t\, dS +$$

$$+ \sum_{\text{внутр. } \Gamma_l} \int\limits_{\Gamma_l} (f - f^P) \sum_{i=1}^{2} \nu_i (G'_{\xi_i}(x, g_+^t, \nabla g_+^t, D^2 g_+^t) - G'_{\xi_i}(x, g_-^t, \nabla g_-^t, D^2 g_-^t) dS,$$

где g^t_+, g^t_- – функции, равные g^t и рассматриваемые в треугольниках с общей стороной Γ_l, причем g^t_+ соответствует тому треугольнику, для которого нормаль ν является внешней. Аналогично поступаем и с третьим слагаемым в (9). Применяя два раза формулу Гаусса – Остроградского для треугольника T_k, имеем

$$\sum_{k=1}^N \int\limits_{T_k} G^t_{ij}(f-f^P)''_{x_ix_j}dx = \sum_{k=1}^N \left[\int\limits_{T_k} (G^t_{ij})''_{x_ix_j}(f-f^P)dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\partial T_k} (f-f^P)(G^t_{ij})'_{x_j}\nu_i dS + \int\limits_{\partial T_k} (f-f^P)'_{x_i} G^t_{ij}\nu_j dS \right] =$$

$$= \int\limits_{\Omega} (G^t_{ij})''_{x_ix_j}(f-f^P)dx - \int\limits_{\partial\Omega} (f-f^P)(G^t_{ij})'_{x_j}\nu_i dS + \int\limits_{\partial\Omega} (f-f^P)'_{x_i} G^t_{ij}\nu_j dS -$$

$$- \sum_{\text{внутр. } \Gamma_l} \int\limits_{\Gamma_l} (f-f^P)\nu_i((G^t_{ij})^+_{x_j} - (G^t_{ij})^-_{x_j})dS + \sum_{\text{внутр. } \Gamma_l} \int\limits_{\Gamma_l} (f-f^P)'_{x_i}\nu_j((G^t_{ij})^+ - (G^t_{ij})^-)dS,$$

где

$$(G^t_{ij})^\pm = G'_{\eta_{ij}}(x, g^t_\pm, \nabla g^t_\pm, D^2 g^t_\pm),$$
$$(G^t_{ij})^\pm_{x_j} = (G'_{\eta_{ij}}(x, g^t_\pm, \nabla g^t_\pm, D^2 g^t_\pm))'_{x_j}.$$

Окончательно, получаем

$$I(f) - I(f^P) = \int\limits_0^1 \left[\sum_{k=1}^N \int\limits_{T_k} (f-f^P)Q[g^t]dx + \right.$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega} (f-f^P) \sum_{i=1}^2 \nu_i G^t_i \, dS +$$

$$+ \sum_{\text{внутр. } \Gamma_l} \int\limits_{\Gamma_l} (f-f^P) \sum_{i=1}^2 \nu_i (G'_{\xi_i}(x, g^t_+, \nabla g^t_+, D^2 g^t_+) - G'_{\xi_i}(x, g^t_-, \nabla g^t_-, D^2 g^t_-)dS -$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega} (f-f^P) \sum_{i,j=1}^2 (G^t_{ij})'_{x_j}\nu_i dS + \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^2 (f-f^P)'_{x_i} G^t_{ij}\nu_j dS -$$

$$- \sum_{\text{внутр. } \Gamma_l} \int\limits_{\Gamma_l} (f-f^P) \sum_{i,j=1}^2 \nu_i ((G^t_{ij})^+_{x_j} - (G^t_{ij})^-_{x_j})dS +$$

$$\left. + \sum_{\text{внутр. } \Gamma_l} \int\limits_{\Gamma_l} \sum_{i,j=1}^2 (f-f^P)'_{x_j}\nu_j((G^t_{ij})^+ - (G^t_{ij})^-)dS \right] dt.$$

Данное равенство будем использовать для получения асимптотической оценки погрешности вычисления функционала (1) при мелкости разбиения $h \to 0$. При этом будем предполагать, что величина минимального угла α по всем треугольникам T_k, является отделенной от нуля при таком измельчении. Так же будем считать, что найдется постоянная C, независящая от h, для которой

$$h \cdot \sum_{\text{внутр. } \Gamma_l} |\Gamma_l| \le C. \tag{10}$$

Для начала отметим, что в каждом треугольнике T_k из неравенств (5) следуют оценки

$$|f(x) - f^P(x)| \le C_1 h^{4m+2}.$$

$$|(f(x) - f^P(x))'_{x_i}| \le C_1 h^{4m+1},\ i = 1, 2,$$

$$|(f(x) - f^P(x))''_{x_i x_j}| \le C_1 h^{4m},\ i, j = 1, 2,$$

где C_1 – некоторая постоянная, независящая от h. Отметим, что выражение $Q[g^t]$ содержит производные функции g^t до 4-го порядка включительно. Поэтому из неравенства (5) следует ограниченность $Q[g^t]$ при $h \to 0$. Тоже самое можно сказать и о величине $\sum_{i=1}^2 \nu_i G_i^t$. Поэтому

$$\int\limits_\Omega (f - f^P) Q[g^t] dx = O(h^{4m+2})$$

и

$$\int\limits_{\partial\Omega} (f - f^P) \sum_{i=1}^2 \nu_i G_i^t \, dS = O(h^{4m+2})$$

при $h \to 0$. Далее, на стороне Γ_l выполнено

$$|G'_{\xi_i}(x, g_+^t, \nabla g_+^t, D^2 g_+^t) - G'_{\xi_i}(x, g_-^t, \nabla g_-^t, D^2 g_-^t| \le$$

$$\le |G'_{\xi_i}(x, g_+^t, \nabla g_+^t, D^2 g_+^t) - G'_{\xi_i}(x, f, \nabla f, D^2 f)| +$$

$$+ |G'_{\xi_i}(x, f, \nabla f, D^2 f) - G'_{\xi_i}(x, g_-^t, \nabla g_-^t, D^2 g_-^t)|. \tag{11}$$

Заметим, что

$$g_\pm^t - f = (1 - t)(f^P - f),\ \nabla g_\pm^t - \nabla f = (1 - t)(\nabla f^P - \nabla f),$$

$$D^2 g_\pm^t - D^2 f = (1 - t)(D^2 f^P - D^2 f).$$

Поэтому из неравенства (5) можем получить, что

$$|g_\pm^t - f| \le C_1 h^{4m+2},\quad |\nabla g_\pm^t - \nabla f| \le C_1 h^{4m+1},$$

$$|D^2 g_\pm^t - D^2 f| \le C_1 h^{4m}.$$

Следовательно, используя (10) и то, что $f - f^P$ непрерывна, из (11) получаем

$$\sum_{\text{внутр. } \Gamma_l} \int\limits_{\Gamma_l} (f - f^P) \sum_{i=1}^2 \nu_i (G'_{\xi_i}(x, g_+^t, \nabla g_+^t, D^2 g_+^t) - G'_{\xi_i}(x, g_-^t, \nabla g_-^t, D^2 g_-^t) dS = O(h^{8m+1})$$

при $h \to 0$. Рассуждая аналогично, имеем

$$\sum_{\text{внутр. } \Gamma_l} \int\limits_{\Gamma_l} (f - f^P) \sum_{i,j=1}^2 \nu_i ((G_{ij}^t)_{x_j}^+ - (G_{ij}^t)_{x_j}^-) dS = O(h^{8m+1}).$$

Далее, используя, что $(f - f^P)'_{x_i}$ непрерывны (их значения пределов на Γ_l со стороны обоих треугольников совпадают), как и выше, получаем

$$\sum_{\text{внутр. } \Gamma_l} \int\limits_{\Gamma_l} \sum_{i,j=1}^2 (f - f^P)'_{x_j} \nu_j ((G_{ij}^t)^+ - (G_{ij}^t)^-) dS = O(h^{8m}) \tag{12}$$

при $h \to 0$. Наконец, не трудно видеть, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} (f - f^P)(G^t_{ij})'_{x_j} \nu_i dS = O(h^{4m+2})$$

и

$$\int\limits_{\partial\Omega} (f - f^P)'_{x_i} G^t_{ij} \nu_j dS = O(h^{4m+1})$$

при $h \to 0$. Объединяя полученные равенства, приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Если при $h \to 0$ семейство триангуляций $\{T_k\}_{k=1}^N$ таково, что величина угла α остается отделенной от нуля и выполняется условие (10), то справедлива асимптотическая оценка*

$$|I(f^P) - I(f)| = O(h^{4m+1}). \tag{13}$$

Замечание. В приведенных выше рассуждениях существенным было использование непрерывности производных $(f - f^P)'_{x_i}$. Если бы кусочно- полиномиальная функция f^P была бы только непрерывной, то вместо равенства (12), мы имели бы более слабую оценку

$$\sum_{\text{внутр. } \Gamma_l} \int\limits_{\Gamma_l} \sum_{i,j=1}^{2} (f - f^P)'_{x_j} \nu_j ((G^t_{ij})^+ - (G^t_{ij})^-) dS = O(h^{4m}),$$

что привело бы, очевидно, к худшей оценке погрешности

$$|I(f) - I(f^P)| = O(h^{4m}).$$

References

[1] L.D.Landau, E.M. Lifshits, *Theoretical physics. Volume VII. Theory of elasticity: Textbook. allowance*, M.: Science. Ch. ed. physical-mat. Lit., 1987.

[2] L. V. Kantorovich, *Approximate methods of higher analysis*, M.: Nauka, 1950.

[3] S. G. Mikhlin, *Variational methods in mathematical physics*, M.: Nauka, 1970.

[4] A. A. Klyachin, *On the uniform convergence of piecewise linear solutions to the equilibrium capillary surface equation*, J. Appl. Industr. Math., **9**:3 (2015), 381—391. MR3549828

[5] A. A. Klyachin, M. A. Gatsunayev, *On uniform convergence of piecewise linear solutions of the minimal surface equation*, Ufa Mathematical Journal, **6**:3 (2014), 3–16. MR3427546

[6] A. A. Klyachin, *Estimation of the error in the computation of integral functionals using piecewise linear functions*, Bulletin of Volgograd State University, Series 1: Mathematics. Physics, **1(26)** (2015), 6–12.

[7] V. A. Klyachin, E. A. Pabat, *C^1 is an approximation of level surfaces of functions defined on irregular grids*, Siberian Journal of Industrial Mathematics, **XIII**:2 (2010), 69–78. MR2839600

[8] A. Ženišek, *Interpolation Polynomials on the Triangle*, Numer. Math., **15** (1970), 283–296. MR275014

[9] J. H. Bramble, M. Zlamal, *Triangular elements in the finite element method*, Math. Comp., **24** (1970), 809—820. MR282540

[10] I. Babuska, A. K. Aziz, *On the angle condition in the finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., **13**:2 (1976), 214—226. MR455462

[11] Yu.N. Subbotin, *Multidimensional piecewise polynomial interpolation*, In: Approximation and interpolation methods, Novosibirsk: VTsN, (1981), 148—153. MR827819

[12] Yu.N. Subbotin, *The dependence of estimates of a multidimensional piecewise-polynomial approximation on the geometric characteristics of a triangulation*, Proc. Steklov Inst. Math., **189** (1990), 135—159. Zbl 0716.41008

[13] Yu.N. Subbotin, *The dependence of estimates of approximation by interpolation polynomials of the fifth degree on the geometric characteristics of a triangle*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **2** (1992), 110–119. MR1299806

[14] V. Latypova, *Piecewise-cubic error interpolation on a triangle*, Bulletin of Udmurt University. Maths., (2003), 3—10.

[15] Yu. V. Matveeva, *On the Hermitian interpolation of many members of the third degree on the triangle using mixed derivatives*, Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, **7**:1 (2007), 23—27.

[16] N. V. Baidakova, *Influence of smoothness on the error of approximation of derivatives under local interpolation on triangulations*, Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), **277**:1 (2012), 33—47. MR3547192

[17] N. V. Baidakova, *Above Estimates for the Error Values of the Approximation of Derivatives in the Finite Element of Cie—Klaf-– Tocher*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **18**:4 (2012), 80—89.

[18] N. V. Baidakova, *New Estimates of the Error Values for the Approximation of Derivatives in the Interpolation of a Function by Third Degree Polynomials on a Triangle*, Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, **13**:1 (2013), 15—19.

[19] V. A. Klyachin, A. A. Shiroky, *The Delaunay triangulation for multidimensional surfaces and its approximative properties*, Russian Math. (Iz. VUZ), **56**:1 (2012), 27—34. Zbl 1254.68338

[20] V. A. Klyachin, A. A. Shiroky, *Delone Triangulation of Multidimensional Surfaces*, Vestn. SamSU. Natural Science Ser., **4(78)** (2010), 51—55.

[21] V. A. Klyachin, D. V. Shurkaeva, *Isoperimetric Coefficient of a Simplex in the Problem of the Approximation of Derivatives*, Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, **15**:2 (2015), 151—160.

[22] V. A. Klyachin, *Algorithm of triangulation, based on the condition of an empty convex set*, Bulletin of VolSU. Series 1. Mathematics. Physics, **3(28)** (2015), 27—33.

[23] M. A. Gatsunaev, *Approximate calculation of surface area*, Materials of the Scientific Session, Volgograd, April 26–30, **6** (2010) 66–70.

[24] A.F. Rasmussen, F. Atgeirr, *Approximation of Curve Length and Surface Area*, CMA, University of Oslo Darmstadt, 2006.

[25] A.F. Rasmussen, M. S. Floater, *Approximation of Curve Length and Surface Area*, In Proceedings of the SIAM conference on Geometric Design and Computing, Phoenix, 2005.

[26] N. N. Kalitkin, *Numerical methods*, M.: «Nauka», 1978. MR514844

Alexey Alexandrovich Klyachin
Volgograd State University,
100, Universitetskij ave.,
Volgograd, 400062, Russia
E-mail address: matf@volsu.ru, klyachin-aa@yandex.ru