S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 187–205 (2019) УДК 517.925.54, 517.983.35
DOI 10.33048/semi.2019.16.011 MSC 15A06, 15A09, 11B37

О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ДВУСТОРОННЕЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АЛГЕБРЕ

А.О. ЕГОРШИН

Abstract. In this article it is proved that the equations of sequential solution of a number of computational algebra problems are the consequences of equations of counter orthogonalization and biorthogonalization in Hilbert and Euclidean spaces. The basis of these equations is the known sequential method of direct Gram–Sonin–Schmidt orthogonalization. It is considered the problems related to matrix inversions, their triangular factorizations, and solving systems of linear algebraic equations.

Keywords: Gram–Sonin–Schmidt orthogonalization, bilateral orthogonalization, Frobenius formula, triangular factorization, general matrix inverse, least square method, innovation process, Kalman filter

1. Введение

Ортогональные системы и процессы ортогонализации — важные инструменты в функциональном анализе и приложениях. Особенно важны процессы ортогонализации Грама–Сонина–Шмидта [1]. Одна из причин такой исключительности заключается в том, что это унитреугольные преобразования [2]. Треугольные преобразования сохраняют цепи вложенных подпространств и цепочки проекторов на эти подпространства, которые сопутствуют данной системе векторов [3, 4].

Треугольные преобразования являются математической моделью физически реализуемых систем, сохраняющих причинно-следственные связи. Прямые

Egorshin, A.O., On some applications of bilateral orthogonalization in computational algebra.

© 2019 Егоршин А.О.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00754.

Поступила 22 августа 2018 г., опубликована 6 февраля 2019 г.

(*forward*) процессы ортогонализации обеспечивают верхне-треугольные (реализуемые в прямом времени) преобразования. Возвратные (*backward)* или встречные процессы осуществляют нижне-треугольные преобразования (реализуемые в обратном времени).

Отметим основополагающее значение уравнений встречной ортогонализации в однородных системах [5–7]. Они порождаются изометрическими операторами. Такие системы дают математические модели изотропных сред и стационарных систем [8, 9].

В статье показано, что встречные процессы ортогонализации и биортогонализации являются основой матричных уравнений линейной вычислительной алгебры. Из уравнений ортогонализации и биортогонализации выводятся уравнения последовательного решения следующих задач вычислительной алгебры: последовательного обращения окаймленных матриц и сумм матриц, треугольные факторизации, псевдообращения, сопутствующие задачи, в том числе рекуррентное решение недо– и переопределенных систем линейных и алгебраических уравнений. Рассмотрены также вопросы устранения неопределенностей, возникающих в рекуррентных алгоритмах при наличии вырождения в порождающих системах векторов.

2. Системы векторов и ортопроекторы

Запись $\{x_i\}_k^l$ с одним индексом будет обозначать столбец, а с двумя индексами — матрицу некоторых элементов x_i (скаляров, строк, столбцов, матричных блоков). Запись $|x_j|_k^l$ будет обозначать строку указанных элементов. В частности: $X_{\overline{j,\,k}} = |x_j, \ldots, x_k| = |x_i|_j^k$, $j \leqslant k$, $X_{\overline{1,\,k}} = X_k$, $k = \overline{1, M}$. Также обозначаются подсистемы системы X_M. Символ индекса переменной при описании ее свойств, имеющих место для всех значений индекса, может быть опущен.

Пусть имеется линейно независимая система векторов $X = X_M = |x_1, \ldots, x_M| = |x_i|_1^M \in H \otimes E^M = \mathcal{H}$ в унитарном (функциональном или конечномерном размерности $L \geqslant M$) пространстве H. Такая система называется невырожденной. Процессы ортогонализации невырожденной системы X есть невырожденное преобразование $X \to \Phi$ системы независимых векторов X в пространстве H в ортогональную систему $\Phi = \Phi_M = |f_i|_1^M$, такую, что $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \|f_i\|^2$. Здесь $\langle f_i, f_j \rangle$ и $\|f_i\|^2 = \langle f_i, f_i \rangle$ — скалярное произведение и квадрат нормы в H, а δ_{ij} — символ Кронекера.

Аргументами в угловых скобках могут быть системы векторов. Матрицы $\langle X, Y \rangle = C = \|C_{ij}\|_{i,j=1}^{l,k} = \{\langle x_j, y_i \rangle\}_{i,j=1}^{l,k}$ есть матрицы попарных «скалярных произведений» систем $X = |x_j|_1^k$, $Y = |y_j|_1^l$. Столбцы последних x_j и y_j есть векторы из H. Нетрудно увидеть, что в таком билинейном виде может быть представлена произвольная матрица, причем множеством способов. Например, пусть $X = X_k$ невырожденная векторная система. Тогда заданная матрица $C = C_k$ может быть представлена в виде: $C = \langle X, Y \rangle = Y^* X$, если $Y = X^{-*} C^*$. Матрицы вида $\langle X, X \rangle = \langle x_j, x_i \rangle_1^M$ являются матрицами Грама системы X. Если системы X и Y имеют мощности M_1 и M_2, то матрица $\langle X, Y \rangle$ этих систем есть $(M_2 \times M_1)$–матрица. Иначе: $\langle X, Y \rangle \in (M_2 \times M_1)$.

Пусть X и Y есть системы из конечномерных элементов. Тогда матрицы, столбцы которых есть векторы систем X и Y, обозначаются теми же символами X и Y. Если $\{X, Y\} \subset E^L$, то матрицы X и Y этих систем есть $(L \times M_1)$– и $(L \times M_2)$–матрицы соответственно.

Рассматриваются унитреугольные прямые и возвратные (встречные) преобразования системы X [2]. Записывать такие преобразования будем в нормированном виде: $\Phi = XF$ и $\widetilde{\Phi} = X\widetilde{F}$, где, соответственно, $F \in \mathbb{R}$, и $\widetilde{F} \in \mathbb{L}$ — верхне– (право– $\mathbb{R}$) и нижне– (лево– $\mathbb{L}$) унитреугольные $(M \times M)$–матрицы с единичными главными диагоналями. Через, $\mathbb{R}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{D}$ обозначаем классы указанных унитреугольных и диагональных преобразований. Нас будут интересовать $\mathbb{RDL}$– и $\mathbb{LDR}$– факторизации квадратных матриц.

Как выше отмечено, пространство H может быть не функциональным, а конечномерным унитарным L-пространством с $L \geqslant M$. Тогда $H = E = E^L$. Система $X = X_M$ мощности $M \leqslant l$ в конечномерном пространстве E^l обозначается (в случае необходимости) индексом в квадратных скобках: $X = X_{M/[l]}$. В конечномерных пространствах $H = E^l$, $l = \overline{1, L}$ возникают задачи анализа алгебраических процессов, связанных с последовательным увеличением размерности l элементов систем.

Определение 1. *Системы $X_{M/l}$ в E_l, $M \leqslant l$ с возрастающей мощностью M называются растущими, а с увеличивающейся размерностью l будут называться увеличивающимися.*

В конечномерных случаях рассматриваются уравнения рекуррентных алгоритмов как для растущих, так и для увеличивающихся систем.

Через $S(*)$ обозначаются подпространства — замкнутые линейные оболочки аргументов в $(*)$. Выражение $S(X)$ будет обозначать оболочку элементов невырожденной системы X. Это один из базисов в S. Обозначаем также: $S_{\overline{k,l}} = S(X_{\overline{k,l}})$, $S_k = S(X_k)$, $S = S(X)$, $S_k^{\perp} = S(X_k^{\perp})$ — ортогональные дополнения к S_k. Через $X_k^{\perp}$ обозначается любой базис в $S_k^{\perp}$.

Операторы P, $P_{\overline{k,l}}$, $P_{\overline{1,k}} = P_k$ есть ортопроекторы на подпространства S и $S_{\overline{k,l}}$, S_k. Оператор $\Pi = I - P$ есть ортопроектор на соответствующее ортогональное дополнение $S^{\perp}$. Далее: $\Pi_{\overline{k,l}} = I - P_{\overline{k,l}}$, $\Pi_{\overline{1,k}} = \Pi_k = I - P_k$. Также: $P = P_X = P_S$, $\Pi_X = I - P_X = \Pi_S$. Матрица оператора ортогонального проектирования на подпространство S может быть выписана с помощью произвольного базиса в S. Например: $P = P_S = \Big\langle \,\cdot\,, X \langle X, X\rangle^{-1} \langle \,\cdot\,, X\rangle \Big\rangle = \langle X, \,\cdot\,\rangle \langle X, X\rangle^{-1} \langle \,\cdot\,, X\rangle$. Тогда, в частности, имеем для проекций $\widehat{y} = Py$ вектора y на S: $\langle y, \widehat{y}\rangle = \langle \widehat{y}, \widehat{y}\rangle = \langle X, y\rangle \langle X, X\rangle^{-1} \langle y, X\rangle$.

3. Встречные процессы ортогонализации

Лемма 1. *Пусть невырожденная векторная система X с помощью прямой и возвратной (встречной) процедур ортогонализации типа Грама–Сонина–Шмидта последовательно преобразуются к двум ортогональным системам Φ и $\widetilde{\Phi}$. Соответственно:*

$$\Phi_{k+1} = |f_i|_1^{k+1} = |\Phi_k, f_{k+1}| = X_{k+1}F_{k+1}, \quad \text{где} \quad k = \overline{1, M-1} \quad \text{и} \tag{1}$$

$$\widetilde{\Phi}_{k+1} = \left|f_{i/k+1}\right|_{i=1}^{k+1} = \left|f_{1/k+1}, \Phi_{k/k+1}\right| = \left|\widetilde{f}_{k+1}, \Phi_{k/k+1}\right| = X\widetilde{F}_{k+1}. \tag{2}$$

Тогда матрицы F_{k+1} и F_k, $\widetilde{F}_{k+1}$ и $\widetilde{F}_k$ связаны рекуррентными соотношениями:

$$F_{k+1} = \left\| \begin{matrix} F_k \\ 0 \end{matrix} \;\middle|\; F_{(k+1)} \right\| = \left\| \begin{matrix} F_k \\ 0 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \overrightarrow{F}_{(k+1)} \\ 1 \end{matrix} \right\| = \left\|F_{k/0}, F_{(k+1)}\right\|, \qquad F_1 = 1, \tag{3}$$

$$(4)\qquad \widetilde{F}_{k+1} = \left\| \widetilde{F}_{(k+1)} \middle| \begin{matrix} 0 \\ \widetilde{F}_k \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ \overleftarrow{F}_{(k+1)} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ \widetilde{F}_k \end{matrix} \right\| = \left| \widetilde{F}_{(k+1)}, \widetilde{F}_{0/k} \right|, \qquad \widetilde{F}_1 = 1.$$

Доказательство. Прямые процессы ортогонализации Грама–Сонина–Шмидта описываются уравнениями:

$$(5)\qquad \begin{gathered} f_{k+1} = \Pi_k x_{k+1} = (I - P_k)\, x_{k+1}, \qquad k = \overline{0, M-1}, \qquad \text{где} \quad P_0 = 0, \\ P_k = X_k \langle X_k, X_k \rangle^{-1} \langle\,\cdot\,, X_k\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^{k} f_i a_i \langle\,\cdot\,, f_i\rangle\,. \end{gathered}$$

Здесь $\langle f_i, f_j\rangle = \delta_{ij}\|f_i\|^2 = \delta_{ij}\theta_i$, $\forall\ i\ \theta_i > 0$. Если $i = j$, то $\theta_i = a_i^{-1}$. Ортопроекторы P_k и $\Pi_k = I - P_k$ есть проекторы соответственно на подпространства S_k и их ортогональные дополнения $S_k^{\perp}$ в S или, что то же, в H [3].

Соотношения (3) для матриц F_{k+1} и F_k следуют из уравнений ортогонализации (5). Из уравнений (5) следуют соотношения и для столбцов $F_{(k+1)}$, обновляющих ортогональную систему Φ_k в (1) в соответствии с формулой $f_{k+1} = x_{k+1} - P_k x_{k+1} = X_{k+1}F_{(k+1)}$, вытекающей из (5). Действительно, из уравнений (5) имеем для $k = \overline{1, M-1}$:

$$(6)\qquad \begin{gathered} P_k(\cdot) = X_k C_k^{-1} \langle\,\cdot\,, X_k\rangle\,, \qquad \overrightarrow{F}_{(k+1)} = -C_k^{-1}\bar{c}_{k+1}\,, \\ \text{где} \qquad C_k = \langle X_k, X_k\rangle\,, \qquad \text{а} \qquad \bar{c}_{k+1} = \langle x_{k+1}, X_k\rangle\,. \end{gathered}$$

Соотношения (3), (4) свидетельствуют об очевидной (в силу треугольности преобразований ортогонализации Грама–Шмидта) унитреугольности матриц $F_{k+1} \in \mathbb{R}$ и $\widetilde{F}_{k+1} \in \mathbb{L}$.

Прямые процессы ортогонализации, описываемые уравнениями (5), (1), (3) систем X_{k+1} для всех $k = \overline{1, M-1}$, начинаются с одного вектора. Это x_1. Поэтому в равенстве (1) k векторов $|f_i|_1^k$ ортогональных систем Φ_k и Φ_{k+j} $(0 < j < M-k,\ k = \overline{1, M})$ совпадают. Возвратные процессы ортогонализации подсистем X_k и X_{k+1} начинаются с разных векторов, а именно с векторов x_k и x_{k+1} соответственно. В результате, в равенстве (2) ортогональные системы $\widetilde{\Phi}_k = \left|f_{i/k}\right|_1^k$ и $\widetilde{\Phi}_{k+1} = \left|f_{i/k+1}\right|_1^{k+1}$ полностью различны. Для $k = \overline{0, M-1}$ имеем:

$$(7)\qquad f_{i/k+1} = \Pi_{\overline{i+1,k+1}}\, x_i, \qquad i = \overline{k+1, 1}, \qquad f_{k+1/k+1} = x_{k+1}, \qquad \Pi_{\overline{k+2,k+1}} = I.$$

Проекторы $\Pi_{\overline{i+1,k+1}}$ описываются возвратными уравнениями:

$$(8)\qquad \Pi_{\overline{i,k+1}}(\cdot) = \Pi_{\overline{i+1,k+1}}(\cdot) - f_{i/k+1} a_{i/k+1} \left\langle\,\cdot\,, f_{i/k+1}\right\rangle, \quad a_{i/k+1} = \left\|f_{i/k+1}\right\|^{-2}.$$

Обозначим через $\widetilde{f}_{k+1}$ последний в процессе возвратной ортогонализации (но первый по расположению в системе $\widetilde{\Phi}_{k+1}$) ортогонализирующий вектор $f_{1/k+1}$ подсистемы X_{k+1}. Из уравнения (8) получим, что

$$(9)\qquad \begin{gathered} \widetilde{f}_{k+1} = f_{1/k+1} = x_1 - P_{\overline{2,k+1}}\, x_1 = X_{k+1}\widetilde{F}_{(k+1)}, \quad \|\widetilde{f}_{k+1}\|^{-2} = a_{1/k+1} = \widetilde{a}_{k+1}, \\ \widetilde{F}_{(k+1)} = \left| \begin{matrix} 1 \\ \overleftarrow{F}_{(k+1)} \end{matrix} \right|, \qquad \text{где} \qquad \overleftarrow{F}_{(k+1)} = -C_{k+1}^{-1}\langle x_1, X_{k+1}\rangle\,. \end{gathered}$$

Здесь $\widetilde{F}_{(k+1)}$ — начальный столбец матрицы $\widetilde{F}_{k+1}$, а $C_{k+1} = \langle X_{k+1}, X_{k+1}\rangle\,.$

Таким образом, для $k = \overline{0, M-1}$ получаем ортогональные, полностью обновляемые при каждом $k+1$, системы векторов $\widetilde{\Phi}_{k+1}$, приведенные в лемме, и сформулированный в ней результат об ортогональных преобразованиях $\widetilde{F}_{k+1}$ исходной системы X. □

Следствие 1. *Вектор* $\overrightarrow{F}_{(k+1)}$ *в составе вектора* $F_{(k+1)}$ *в* (3) *есть координаты проекции вектора* x_{k+1} *на подпространство* $S_k = S(X_k)$.

Доказательство. Этот факт следует из равенства (1) и вытекающего из него равенства $f_{k+1} = |X_k, x_{k+1}|F_{k+1}$. Из (5), (6) имеем: $x_{k+1} = -X_k\overrightarrow{F}_{(k+1)} + f_{k+1}$. Здесь $f_{k+1} \perp X_k$. □

В равенствах (6), (9) определены важные объекты. В частности, матрицы Грама $C_{k+1} = \langle X_{k+1}, X_{k+1}\rangle = \begin{vmatrix} C_k & \overline{c} \\ \overline{c}^* & c \end{vmatrix}$, где $X_{k+1} = |X_k, x_{k+1}|$. Здесь и далее: $\begin{vmatrix} \overline{c} \\ c \end{vmatrix} = c_{k+1} = \langle x_{k+1}, X_{k+1}\rangle$ — последний столбец $\big((k+1)\times(k+1)\big)$-матрицы Грама C_{k+1}, $\overline{c} = \langle x_{k+1}, X_k\rangle$, $c = \langle x_{k+1}, x_{k+1}\rangle$.

4. Уравнения обновления и устранение неопределенности

Лемма 2. *Пусть система X невырождена. Тогда для $k = \overline{0, M-1}$ проекторы Π_{k+1} подчиняются следующим встречным уравнениям:*

(10)

$$\textbf{a}.\ \Pi_{k+1}(\cdot) = \Pi_k(\cdot) - f_{k+1}a_{k+1}\langle\,\cdot\,, f_{k+1}\rangle, \qquad \Pi_0 = I, \qquad a_{k+1} = \|f_{k+1}\|^{-2},$$

$$\textbf{b}.\ \Pi_{k+1}(\cdot) = \Pi_{\overline{2,k+1}}(\cdot) - \widetilde{f}_{k+1}\widetilde{a}_{k+1}\Big\langle\,\cdot\,, \widetilde{f}_{k+1}\Big\rangle,\ \Pi_{\overline{k+2,k+1}} = I,\ \widetilde{a}_{k+1} = \|\widetilde{f}_{k+1}\|^{-2}.$$

Доказательство. Ортогонализирующие векторы f_{k+1}, $\widetilde{f}_{k+1}$, для $k = \overline{0, M-1}$ определены уравнениями (1), (7) в лемме 1. Уравнения (10) для проекторов Π_{k+1} есть следствие того факта, что проектор на сумму ортогональных подпространств есть сумма проекторов на эти подпространства. Уравнение (10a) есть следствие уравнения (1). Уравнение (10b) есть следствие уравнения (6) при значении $i = 0$ в этом уравнении. □

Замечание 1. В уравнениях (10) ортогонализирующие векторы f и $\widetilde{f}$ есть решения не связанных между собой систем уравнений прямой (1) и встречной (6) ортогонализации. В однородных системах эти векторы являются решениями совместной системы встречных уравнений ортогонализации [3]. Однородными названы в [3] системы $X = X_M$ такие, что $x_{i+1} = Ux_i$, где $i = \overline{0, M-1}$, а U есть изометрический оператор на $S(X)$. □

Ошибки прогнозов в уравнениях прямой ортогонализации (10a) есть векторы

$$f_{k+1} = x_{k+1} - P_k x_{k+1} = \Pi_k x_{k+1} = x_{k+1} - \widehat{x}_{k+1/k}.$$

Таким образом, прогнозами очередного вектора x_{k+1} в уравнениях прямой ортогонализации (10a) являются векторы $P_k x_{k+1} = \widehat{x}_{k+1/k}$.

В уравнениях (10b) встречной ортогонализации ошибки прогнозов есть векторы

$$\widetilde{f}_{k+1} = \Pi_{\overline{2,k+1}}x_1 = x_1 - P_{\overline{2,k+1}}x_1 = x_1 - \widehat{x}_{1/\overline{2,k+1}}.$$

Таким образом, прогнозами вектора x_1 являются векторы $P_{\overline{2,k+1}}x_1 = \widehat{x}_{1/\overline{2,k+1}}$.

Из уравнений (10) видно, что проекторы обновляются лишь в том случае, когда ортогонализирующие векторы f_{k+1} или $\widetilde{f}_{k+1} = f_{1/k+1}$ отличны от нуля. Это означает, что $x_{k+1} \neq \widehat{x}_{k+1/k}$ и $x_1 \neq \widehat{x}_{1/\overline{2,k+1}}$, то есть $x_{k+1} \notin S_k$ или $x_1 \notin S_{\overline{2,k+1}}$. Если это не так, то $x_{k+1} \in S_k$ или $x_1 \in S_{\overline{2,k+1}}$. Это значит, что новый вектор не обеспечивает рост размерности подпространства $S(X_k) = S_k$. В этом случае в уравнениях (10) возникает неопределенность типа $0/0$. Она есть следствие нормирования ортогонализирующих векторов в формулах проекторов. Возникает необходимость устранения этой неопределенности.

Лемма 3. *Пусть в процессе последовательной ортогонализации системы* $X = X_M$ *для некоторого* k *имеет место равенство* $f_{k+1} = 0$. *Тогда ортогональная система* $\Phi_{j/(k+1)}$, $j > k$, *в которой вектор* $f_{k+1} = 0$ *удален, есть результат ортогонализация системы* $X_{j/(k+1)}$ *с удаленным зависимым или нулевым вектором* x_{k+1} *в исходной системе* X.

Доказательство. В процессе ортогонализации системы $X = X_M$ вычисляется ортогональная система $\Phi = \Phi_M = |f_i|_1^M$, которая имеет ту же цепочку $\mathbb{S} = \mathbb{S}_M = \{S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots \subseteq S_{M-1} \subseteq S_M\}$ вложенных подпространств $S_k = S(X_k) = S(\Phi_k)$, что и система X. Если $f_{k+1} = 0$, то это означает, что вектор x_{k+1} либо равен нулю, либо зависим от предыдущих векторов процесса ортогонализации. Назначение $a_{k+1} = \|f_{k+1}\|^{-2} = \phi = 0$ при $f_{k+1} = 0$ исключает соответствующее слагаемое из суммы (1) для проекторов P_{k+1} и $I - P_{k+1}$. Кроме того, такое назначение устраняет возникающую особенность (неопределенность). Так как цепочка $\mathbb{S}$ вложенных подпространств S_j, $j = \overline{0, M}$, $j \neq k+1$, порождаемая системой X, не изменяется при исключении из нее нулевых или зависимых векторов, то другие члены суммы (1) при этом остаются прежними. □

Замечание 2. Предложенный способ устранения возникающих неопределенностей в процессе ортогонализации позволяет выявить и удалить все зависимые и нулевые векторы в исходной системе X и получить ортогональную систему Φ для всех ее независимых и ненулевых векторов. Рассмотренная модель вырожденности выделяет в процессе ортогонализации и остальные зависимые векторы. Они также исключаются из системы. Предложенный способ устранения неопределенности, возникающей в процессе ортогонализации реализуем и для встречного процесса ортогонализации. □

5. Формулы Фробениуса и их следствия

1. Встречные формулы Фробениуса и лемма об обращении матриц. Напомним формулу Фробениуса для обращения блочных матриц M. Приведем ее из известной монографии [11], стр. 60, сохранив и обозначения:

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

$$\text{где} \qquad H = D - CA^{-1}B.$$

Лемма 4. (**«лемма об обращении матриц»**) *Имеют место следущее уравнение для обратной суммы* (*разности*) *матриц. Для матрицы* H *оно имеет вид:*

$$H^{-1} = \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} = D^{-1} + D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1}. \tag{12}$$

Доказательство. Формула (11) получена в работе [11] в предположении, что блок A невырожден. Предположим, что и блок D невырожден. Выведем (тем же способом, что и в работе [11]) встречную (возвратную) формулу Фробениуса:

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \widetilde{H}^{-1} & -\widetilde{H}^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C\widetilde{H}^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C\widetilde{H}^{-1}BD^{-1} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

$$\text{где} \qquad \widetilde{H} = A - BD^{-1}C.$$

Сравнивая выражения для главных блоков матриц (11), (13) получим известную так называемую «лемму об обращении матриц» (сумм или разности матриц). Здесь она приобретает форму (12). Для обратной матрицы $\widetilde{H}$ получаем аналогичное уравнение

$$\widetilde{H}^{-1} = \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1}. \qquad \square \tag{14}$$

Замечание 3. Лемму об обращении матриц — иллюстрируемую уравнениями (12), (14) в работах о фильтрации Р. Калмана (см. напр. [12, 13]) — связывают с матричным дискретным уравнением Риккати. Основание такой терминологии, по-видимому, — наличие двух степеней обратной матрицы как в левой части уравнения обращения сумм матриц, так и в уравнениях для матриц ковариаций в фильтрах Р. Калмана [12], получаемых из леммы об обращении матриц. $\square$

Дискретное матричное уравнение Риккати, как и лемма об обращении матриц будут получены в статье в виде следствия уравнений двусторонней ортогонализации.

Следствие 2. *Матрицы H^{-1} и $\widetilde{H}^{-1}$ — верхний и нижний угловые блоки в двусторонних формулах Фробениуса для матрицы M^{-1} — связаны соотношениями:*

$$H^{-1} = D^{-1} + D^{-1}C\widetilde{H}^{-1}BD^{-1}, \qquad \widetilde{H}^{-1} = A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1}.$$

2. Формулы Фробениуса и обращение окаймленных матриц. Введем обозначения для блоков матрицы M (11). Они окаймляют ее главные блоки A или D:

$$\mathbf{A}: \quad G_c = \begin{vmatrix} B \\ D \end{vmatrix}, \quad G_l^* = \begin{vmatrix} C & D \end{vmatrix}, \tag{15.1}$$

$$\mathbf{D}: \quad \widetilde{G}_c = \begin{vmatrix} A \\ C \end{vmatrix}, \quad \widetilde{G}_l^* = \begin{vmatrix} A & B \end{vmatrix}. \tag{15.2}$$

Пусть блоки A и D в M невырождены. Введем обозначения:

$$\mathbf{A}: \quad A_{/0}^{-1} = \begin{vmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad F_c = \begin{vmatrix} -A^{-1}B \\ I \end{vmatrix}, \quad F_l^* = \begin{vmatrix} -CA^{-1} & I \end{vmatrix}, \tag{16.1}$$

$$\mathbf{D}: \quad D_{0/}^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{vmatrix}, \quad \widetilde{F}_c = \begin{vmatrix} I \\ -D^{-1}C \end{vmatrix}, \quad \widetilde{F}_l^* = \begin{vmatrix} I & -BD^{-1} \end{vmatrix}. \tag{16.2}$$

Лемма 5. *Формулы Фробениуса* $\big($*прямая* (11) *и возвратная* (13)$\big)$ *есть уравнения рекуррентных вычислений обратных окаймляемых матриц:*
(17)
$$\mathbf{A}: \ M^{-1} = A_{/0}^{-1} + F_c H^{-1} F_l^* \quad \text{или} \quad \mathbf{D}: \ M^{-1} = D_{0/}^{-1} + \widetilde{F}_c \widetilde{H}^{-1} \widetilde{F}_l^*, \quad \text{где}$$
$$H = G_l^* F_c = F_l^* G_c = D - CA^{-1}B, \quad \widetilde{H} = \widetilde{G}_l^* \widetilde{F}_c = \widetilde{F}_l^* \widetilde{G}_c = A - BD^{-1}C.$$

Доказательство. Уравнения (17) прямо следуют из формул (11) и (13). □

Итак, показано, что формулы Фробениуса — прямая (11) из работы [11] и возвратная (13) — содержат в себе основные уравнения последовательного рекуррентного обращения матриц: как их сумм, так и двух видов окаймлений.

Далее в статье уравнения рекуррентных алгоритмов, в том числе и связанных с двусторонними (встречными) формулами Фробениуса, выводятся из уравнений прямой и возвратной ортогонализации векторных систем.

6. Уравнения обращения самосопряженных матриц

Теорема 1. *Прямая и возвратная формулы Фробениуса последовательного обращения окаймляемых самосопряженных матриц вида* $C = \langle X, X\rangle$ *есть следствия уравнений встречной* (*двусторонней*) *ортогонализации векторной системы* X.

Доказательство. Пусть $\theta_j = a_j^{-1}$, $j = \overline{1, M}$, $\Theta = \operatorname{diag}(\theta_j)_1^M \in \mathbb{D}$, а $\Theta_{k+1} = \operatorname{diag}(\theta_j)_1^{k+1}$. Из леммы **1** следует, что
(18)
$$\Theta = \langle \Phi, \Phi\rangle = \langle XF, XF\rangle = F^* \langle X, X\rangle F = F^* C F \implies C_{k+1}^{-1} = F_{k+1} \Theta_{k+1}^{-1} F_{k+1}^*.$$

Так как $F_{k+1} \in \mathbb{R}$, то разложение (18) матрицы C_{k+1}^{-1} есть ее $\mathbb{RDL}$-факторизация. Называем последнюю формулу в (18) разложением (или факторизацией) Фробениуса. Название оправдано тем, что, как сейчас будет показано, представления (18) для матриц C^{-1} есть решение уравнений Фробениуса (11), представленных в лемме **5** в виде уравнений (15**A**), (16**A**), (17**A**) последовательного обращения окаймляемых (снизу и справа) матриц $C = \langle X, X\rangle$.

Введем $(k+1)$-матрицу $C_{k/0}^{-1}$. Так обозначена $k+1$-матрица,полученная окаймлением матрицы $C_k^{-1} = \langle X_k, X_k\rangle^{-1}$, нулевыми столбцом и строкой справа и снизу. Теперь уравнения Фробениуса вытекают из разложения (18) с учетом (1), (3), (6). Для $k = \overline{1, M-1}$ имеем:

$$C_{k+1}^{-1} = C_{k/0}^{-1} + F_{(k+1)} a_{k+1} F_{(k+1)}^*, \quad \text{где} \quad a_{k+1} = \langle f_{k+1}, f_{k+1}\rangle^{-1} = \theta_{k+1}^{-1},$$
(19)
$$\theta_{k+1} = F_{(k+1)}^* c_{k+1} = c - \overrightarrow{F}_{(k+1)}^* \overline{c} = c - \overline{c}^* C_k^{-1} \overline{c}.$$

Из встречных уравнений (9) следуют уравнения Фробениуса для обращения симметричных матриц, окаймляемых сверху и слева. Введем $(k+1)$-матрицу $C_{0/\overline{2,k+1}}^{-1}$. Это k-матрица $C_{\overline{2,k+1}}^{-1}$, окаймленная сверху и слева нулевыми строкой и столбцом. Через $\widetilde{\Theta}_{k+1} = \operatorname{diag}\left(\widetilde{\theta}_j\right)_{j=1}^{k+1} = \operatorname{diag}\left(\widetilde{a}_j^{-1}\right)_{j=1}^{k+1} \in \mathbb{D}$ обозначим диагональную $(k+1)$-матрицу множителей $\widetilde{a}_{k+1}^{-1} = \widetilde{\theta}_{k+1}$ из формул (9). Получаем, во-первых, $\mathbb{LDR}$-разложение Фробениуса для матрицы C_{k+1}^{-1}. Во-вторых, получаем возвратные уравнения Фробениуса для обращения матрицы

$C_{k+1} = \langle X_{k+1}, X_{k+1}\rangle = \begin{vmatrix} \widetilde{c}_1 & \bar{c}_1^* \\ \bar{c}_1 & C_{2,k+1} \end{vmatrix}$. Здесь $\widetilde{c}_1 = \langle x_1, x_1\rangle$, $\bar{c}_1 = \Big\langle x_1, X_{\overline{2,k+1}}\Big\rangle$.
Пусть $c_1 = \begin{vmatrix} \widetilde{c}_1 \\ \bar{c}_1 \end{vmatrix} = \langle x_1, X_{k+1}\rangle$. Тогда

$$C_{k+1}^{-1} = \widetilde{F}_{k+1}\widetilde{\Theta}_{k+1}^{-1}\widetilde{F}_{k+1}^* = C_{0/\overline{2,k+1}}^{-1} + \widetilde{F}_{(k+1)}\widetilde{a}_{k+1}\widetilde{F}_{(k+1)}^*,$$
$$\widetilde{a}_{k+1} = \left\|\widetilde{f}_{k+1}\right\|^{-2} = \left(\widetilde{F}_{(k+1)}^* c_1\right)^{-1} = \widetilde{\theta}_{k+1}^{-1}\,. \tag{20}$$

Матрицы $\widetilde{F}_{k+1} \in \mathbb{L}$ для $k = \overline{0, M-1}$ определены в (7). Теорема доказана. □

7. Псевдообращения Мура–Пенроуза

Основное назначение псевдообратных операторов Мура–Пенроуза — решение методами наименьших квадратов (МНК) — методами ортогонального проектирования — переопределенных и недоопределенных систем линейных уравнений.

Решения $\widehat{\mathbf{y}}$ переопределенных систем $\mathbf{y} = \widehat{\mathbf{y}}+\xi$, $\widehat{\mathbf{y}} = Xd$, и недоопределенных систем $d = \langle\widehat{\mathbf{y}}, X\rangle$ при $\widehat{\mathbf{y}} = \xi$ отыскиваются в S. При этом $\widehat{\mathbf{y}} = Xd$ в первом случае и, например, $\widehat{\mathbf{y}} = Xx$ во втором. Эти условия обеспечиваются минимизацией величины $\|\xi\|^2$ [11,12]. Тем самым решаются соответственно прямая и обратная задачи ортогонального проектирования. Соответствующие решения: $\widehat{d} = X^{-1}\mathbf{y}$ и $\widehat{\mathbf{y}} = X^{-*}d$. Это псевдообратные операторы Мура–Пенроуза: $X^{-1} = C^{-1}\langle\,\cdot\,, X\rangle$ и сопряженные им $X^{-*} = \left(X^{-1}\right)^* = \left\langle\,\cdot\,, X^{-1}\right\rangle = XC^{-1}$. Более общим методам псевдообращения посвещено замечание **7** в разделе **12** — «Методы наименьших квадратов».

Лемма 6. *В уравнениях последовательного псевдообращения матриц* $X_{k+1} = |X_k, x_{k+1}|$ *и в уравнениях прямой ортогонализации Грама–Шмидта* (19) *векторной системы* X *прогнозы и ошибки совпадают. Это оответственно проекции* $\widehat{x}_{k+1/k}$ *и ортогонализирующие векторы* $f_{k+1} = \Pi_k x_{k+1} = x_{k+1} - \widehat{x}_{k+1/k}$, $k = \overline{1, M-1}$.

Доказательство. Пусть матрица $C_{k+1} = \langle X_{k+1}, X_{k+1}\rangle$ не вырождена и оператор X_k^{-1} вычислен. Обозначим как $X_{k/0} = |X, 0|$ систему X_k, дополненную нулевым элементом. Из определения матрицы $C_{k/0}^{-1}$ в доказательстве теоремы 1 имеем: $C_{k/0}^{-1}\left\langle\,\cdot\,, X_{k/0}\right\rangle = C_{k/0}^{-1}\langle\,\cdot\,, X_{k+1}\rangle = X_{k/0}^{-1}$.

Из уравнений (19) и равенств (1), (3) получим уравнение обновления для псевдообратного оператора наилучшего приближения переопределенных систем уравнений:

$$X_{k+1}^{-1} = C_{k/0}^{-1}\langle\,\cdot\,, X_{k+1}\rangle + F_{(k+1)}a_{k+1}F_{(k+1)}^*\langle\,\cdot\,, X_k\rangle \quad \longrightarrow$$

$$X_{k+1}^{-1} = X_{k/0}^{-1} + F_{(k+1)}a_{k+1}\langle\,\cdot\,, f_{k+1}\rangle\,, \quad \text{где} \quad f_{k+1} = x_{k+1} - \widehat{x}_{k+1/k}. \tag{21}$$

Последовательность векторов f_{k+1} таких, что
$$f_{k+1} = X_{k+1}F_{(k+1)} = x + X_k\overrightarrow{F}_{(k+1)} = \Pi_k x = x - P_k x = x_{k+1} - \widehat{x}_{k+1/k}$$
есть последовательность ошибок $\pi_{k+1} = x_{k+1} - \widehat{x}_{k+1/k} = f_{k+1}$ прогнозов $\widehat{x}_{k+1/k} \in S_k$. Последние есть прогнозы, которые дают системы X_k на их расширения x_{k+1} до систем $X_{k+1} = |X_k, x_{k+1}|$. Если расширение $x_{k+1} \in S_k = S(X_k)$, то $\widehat{x}_{k+1/k} = x_{k+1}$ и обновление $\pi_{k+1} = f_{k+1} = 0$.

Из уравнения (21) следует уравнение обновления и для сопряженного оператора.

(22) $$X^{-*}_{k+1} = X^{-*}_{k/0} + (x_{k+1} - \widehat{x}_{k+1/k})a_{k+1}F^*_{(k+1)} = X^{-*}_{k/0} + \pi_{k+1}a_{k+1}F^*_{(k+1)}.$$

В уравнениях (19), (21), (22) множитель $F_{(k+1)}$ представи́м в виде:

$$F^*_{(k+1)} = \left|\overrightarrow{F}^*_{(k+1)}, 1\right| = c^*_{k+1}\left(C^{-1}_{k+1} - C^{-1}_{k/0}\right) = c^*_{k+1}\Delta C^{(-1)}_{k+1}\,.$$

Лемма доказана. □

8. Биортогонализация

Полученные выше результаты для процессов ортогонализации и самосопряженных матриц $C = \langle X, X\rangle$ можно распространить на процессы биортогонализации и на произвольные отображения вида $C = \langle X, Y\rangle$.

Получим биортогональные системы $\Phi = XF_y = |f_i|_1^M$ и $\Psi = YF_x = |g_i|_1^M$ такие, что $\langle f_j, g_i\rangle = \delta_{ij}\langle f_j, g_i\rangle$ из невырожденных систем X и Y в H. Ясно, что матрица $C = \langle X, Y\rangle$ не вырождена. Индексы $X\|Y$ и $X\perp Y$ будут означать, что соответствующий оператор проектирует на подпространство $S(X)$ параллельно или перпендикулярно подпространству $S(Y)$ соответственно. Индекс $\perp X\|Y$ означает проектирование на ортогональное дополнение $S(X^\perp)$ параллельно $S(Y)$.

Лемма 7. *Пусть заданы «косые» проекторы* $\Pi_{y,k} = P_{\perp Y\|X,k}$ *и* $\Pi_{x,k} = P_{\perp X\|Y,k}$. *Тогда*

a. *системы векторов* $\Phi = \Phi_M = |f_j|_1^M$ *и* $\Psi = \Psi_M = |g_j|_1^M$, *полученные из систем* $X = |x_j|_1^M$, *и* $Y = |y_j|_1^M$ *с помощью уравнений*

(23) $$f_{k+1} = \Pi_{y,k}x_{k+1}, \quad g_{k+1} = \Pi_{x,k}y_{k+1}, \quad \textit{где} \quad \Pi_0 = I, \quad k = \overline{0, M-1}$$

таковы, что $\langle\Phi_{k+1}, \Psi_{k+1}\rangle = A_{k+1} \in \mathbb{D}$, *где* $A_{k+1} = \operatorname{diag}\{a_j\}_1^{k+1}$, $a_j = \langle f_j, g_j\rangle^{-1}$,

b. *проекторы* $\Pi_y = \Pi_x^*$ *подчиняются уравнению*

(24) $$\Pi_{y,k+1}(\,\cdot\,) = \Pi_{y,k}(\,\cdot\,) - f_{k+1}\langle f_{k+1}, g_{k+1}\rangle^{-1}\langle\,\cdot\,, g_{k+1}\rangle, \quad k = \overline{0, M-1}.$$

Доказательство. **a.** Проектор Π_y в соответствии с функцией, указанной в его индексе, имеет вид: $\Pi_{y,k} = P_{\perp Y\|X,k} = I - X_k\langle X_k, Y_k\rangle^{-1}\langle\,\cdot\,, Y_k\rangle = I - P_{X\perp Y,k}$, причем $\Pi_{x,k} = \Pi^*_{y,k}$. Докажем, что из уравнений (23) для биортогонализирующих векторов f, g и из уравнений (24) для проекторов Π_y, Π_x следуют соотношения $\Phi_{k+1} = X_{k+1}F_{y,k+1}$, $\Psi_{k+1} = Y_{k+1}F_{x,k+1}$, которые обеспечивают выполнения утверждения **a** леммы.

Уравнения (23) подобны уравнениям (5). Вытекающие из них соотношения подобны уравнениям (1,3,6). Структура матриц $\{F_{y,k+1}, F_{x,k+1}\} \subset \mathbb{R}$ аналогична структуре матриц F_{k+1} из формул (3). В обновляющих векторах $F_{y,(k+1)}$ имеем: $C_k = C_{y,k} = \langle X_k, Y_k\rangle$, $\bar{c} = \bar{c}_y = \langle x_{k+1}, Y_k\rangle$, $c = c_y = \langle x_{k+1}, y_{k+1}\rangle$. В $F_{x,(k+1)}$ имеем: $C_{x,k} = C^*_{y,k}$, $\bar{c}_x = \langle y_{k+1}, X_k\rangle$, $c_x = c^*_y = \langle y_{k+1}, x_{k+1}\rangle$.

Подобно (1) можем записать: $\Phi_{k+1} = |\Phi_k, f_{k+1}|$, $\Psi_{k+1} = |\Psi_k, g_{k+1}|$. Поэтому

$$\langle\Phi_{k+1}, \Psi_{k+1}\rangle = \begin{vmatrix} \langle\Phi_k, \Psi_k\rangle & \langle f_{k+1}, \Psi_k\rangle \\ \langle\Phi_k, g_{k+1}\rangle & \langle f_{k+1}, g_{k+1}\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle\Phi_k, \Psi_k\rangle & 0 \\ 0 & \langle f_{k+1}, g_{k+1}\rangle \end{vmatrix}.$$

Нулевые блоки связаны с тем, что $\Psi_k = Y_kF_{x,k} \perp f_{k+1}$, так как $f_{k+1} \perp Y_k$. Так же $\Phi_k = X_kF_{y,k} \perp g_{k+1}$, поскольку $g_{k+1} \perp X_k$ (23). Повторяя эти рассуждения для матриц $\langle \Phi_{k-j}, \Psi_{k-j} \rangle$, $j = \overline{0, k-1}$, $k = \overline{1, M-1}$, приходим к выводу, что матрицы $\langle \Phi, \Psi \rangle \in \mathbb{D}$.

b. Оператор проектирования не зависит от выбора систем координат. В случае проектора Π_y речь идет о подпространствах $S(X)$ и $S(Y)$. Так как $X = \Phi F_y^{-1}$, а $Y = \Psi F_x^{-1}$, то $\Pi_y = \Pi_x^* = I - \Phi \langle \Phi, \Psi \rangle^{-1} \langle \cdot, \Psi \rangle$. Отсюда и из результата **a** следует, что $\Pi_{y,k+1} = I - \sum_{j=1}^{k+1} f_j \langle f_j, g_j \rangle^{-1} \langle \cdot, g_j \rangle = \Pi_{y,k} - f_{k+1} \langle f_{k+1}, g_{k+1} \rangle^{-1} \langle \cdot, g_{k+1} \rangle$. Утверждение **b** для прямой биортогонализации также доказано.

Вывод уравнений возвратной биортогонализации опускаем. Пример двусторонней биортогонализации показан при доказательстве уравнений Риккати в теореме 4. □

Проиллюстрируем на простых наглядных примерах описанные процессы биортогонализации. Выбраны примеры с нетривиальными результатами.

Пример 1. Пусть $C = Y^* X$, где $X = X_M \subset E^{M+1}$ — невырожденная $\big((M+1) \times (M+1)\big)$–матрица, а $Y = I = I_{M+1}$. Проведем прямую биортогонализацию систем X и $Y = I$ в E^{M+1}. Надо построить преобразования $\{F_y, F_x\} \subset \mathbb{R}$, такие что

a. $\Phi = X F_y$, $\Psi = Y F_x$, **b.** $\langle \Phi, \Psi \rangle = F_x^* Y^* X F_y = F_x^* C F_y \in \mathbb{D}$.

Получим $\mathbb{LDR}$–факторизацию для матрицы $C = Y^* X$. Используем $\mathbb{RDL}$–факторизацию Фробениуса для матрицы C^{-1}, и обратим ее. Имеем: $C^{-1} = (Y^* X)^{-1} = G A F^*$, где $\{G, F\} \subset \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{D}$. Далее: $C = F^{-*} A^{-1} G^{-1} \longrightarrow F_x^* C F_y = F_x^* F^{-*} A^{-1} G^{-1} F_y \in \mathbb{D}$. Поэтому $F_y = G \in \mathbb{R}$, $F_x = F \in \mathbb{R}$. Учтем, что $C = Y^* X = X$. Отсюда получаем результаты биортогонализации систем X и $Y = I$: $\Phi = XG = CG = F^{-*} A^{-1}$, $\Psi = YF = F$. Действительно: $\Psi^* \Phi = \langle \Phi, \Psi \rangle = A^{-1} \in \mathbb{D}$. □

Пример 2. Пусть $X \in \mathbb{R}$, $Y = I$. Используем метод, результаты и обозначения примера 1. В данном случае $C^{-1} = X^{-1} = G \to C = G^{-1} \to F = I$. Результат биортогонализации: $\Phi = XG = CG = I$, $\Psi = YF = F = I$, $\Psi^* \Phi = I$. □

9. Общие формулы Фробениуса

Теорема 2. *Общие формулы Фробениуса* (11) [11] *для произвольных окаймляемых невырожденных матриц следуют из уравнений биортогонализации.*

Доказательство. Как отмечалось в разделе **2**, любая матрица множеством способов представима в виде $C = \langle X, Y \rangle$, где X, Y — векторные системы из некоторого гильбертова пространства H. Из условий теоремы следует невырожденность систем X, Y и отсутствие особенностей в процессе биортогонализации этих систем. Лемма 7, формула (19) в доказательстве теоремы 1 дают уравнения прямых формул Фробениуса:

(25)
$$C_{k+1}^{-1} = C_{k/0}^{-1} + F_{y,(k+1)} a_{k+1} F_{x,(k+1)}^*, \quad \text{где} \quad a_{k+1} = \langle f_{k+1}, g_{k+1} \rangle^{-1} = \theta_{k+1}^{-1},$$
$$\theta_{k+1} = F_{x,(k+1)}^* c_{y,k+1} = c - \overrightarrow{F}_{x,(k+1)}^* \overline{c}_y = c - \overline{c}_x^* C_k^{-1} \overline{c}_y,$$
$$C_k = \langle X_k, Y_k \rangle, \quad \overline{c}_x^* = \langle X_k, y_{k+1} \rangle, \quad \overline{c}_y = \langle x_{k+1}, Y_k \rangle, \quad k = \overline{1, M-1}.$$

Аналогичным образом с использованием уравнений (20) выводятся возвратные общие формулы Фробениуса. □

10. Треугольные факторизации

Для самосопряженных матриц треугольные факторизации представлены теоремой **1** в разделе **6** (18). Это формулы $C^{-1} = F\Theta^{-1}F^* \in \mathbb{RDL}$ и $C^{-1} = \widetilde{F}\widetilde{\Theta}^{-1}\widetilde{F}^* \in \mathbb{LDR}$. Соответствующие $\mathbb{LDR}$- и $\mathbb{RDL}$-факторизации для матрицы: $C = \langle X, X\rangle = F^{-*}\Theta F^{-1} = \widetilde{F}^{-*}\widetilde{\Theta}\widetilde{F}^{-1}$.

Формулы для последовательного вычисления компонент $\mathbb{LDR}$- и $\mathbb{RDL}$-разложений матрицы C могут быть получены также непосредственно из равенств $C = L\mathcal{D}R$ и $C = \widetilde{R}\widetilde{\mathcal{D}}\widetilde{L}$. Здесь $\{R, \widetilde{R}\} \subset \mathbb{R}$, $\{L, \widetilde{L}\} \subset \mathbb{L}$, $\{\mathcal{D}, \widetilde{\mathcal{D}}\} \subset \mathbb{D}$.

Теорема 3. *Уравнения треугольных $\mathbb{LDR}$– и $\mathbb{RDL}$–факторизаций матрицы $C = \langle X, X\rangle$ следуют из уравнений прямой и возвратной (встречной) ортогонализации системы векторов X.*

Доказательство. При выводе уравнений алгебраического процесса $\mathbb{LDR}$-факторизации на основе разложений Фробениуса и, следовательно, уравнений ортогонализации, вернемся (для упрощения) к предположению, что $C = \langle X, X\rangle$. Тогда $C = L\mathcal{D}L^* \in \mathbb{LDR}$ (следствие прямых формул Фробениуса и уравнений ортогонализации) или $C = \widetilde{R}\widetilde{\mathcal{D}}\widetilde{R}^* \in \mathbb{RDL}$ (следствие возвратных формул Фробениуса или уравнений встречной ортогонализации). Выведем необходимые уравнения из равенства $C = F^{-*}\Theta F^{-1} \in \mathbb{LDR}$.

Обращения унитреугольных матриц $F_{k+1} \in \mathbb{R}$ просты. Из формул (3), (19) можно увидеть, что вычисленный ранее блок F_k^{-1} треугольной матрицы F_{k+1}^{-1} не изменяется. На каждом такте $(k+1)$ вычисляется только последний (новый) ее столбец — вектор $\overrightarrow{F}^{(-1)}_{(k+1)}$ без его диагонального элемента, равного единице. Из формул (19) следует, что

$$\overrightarrow{F}^{(-1)}_{(k+1)} = -F_k^{-1}\overrightarrow{F}_{(k+1)} = F_k^{-1}C_k^{-1}\overline{c}_{k+1} = F_k^{-1}F_k\Theta_k^{-1}F_k^*\overline{c}_{k+1}, \qquad k = \overline{1, M-1}.$$

Из этих уравнений и из формул для множителя $a_{k+1} = \theta_{k+1}^{-1}$ в (19) получим уравнения рекуррентного алгоритма $\mathbb{LDR}$-факторизации матрицы $C = \{C_{i,j}\}_1^M$:

$$(26)\quad \begin{array}{ll} \mathbf{a.}\ \ \overrightarrow{F}^{(-1)}_{(k+1)} = \Theta_k^{-1}F_k^*\overline{c}_{k+1}, & \mathbf{b.}\ \ \overrightarrow{F}_{(k+1)} = -F_k\overrightarrow{F}^{(-1)}_{(k+1)}, \\ \mathbf{c.}\ \ \theta_{k+1} = F_{(k+1)}^*c_{k+1}, & \mathbf{d.}\ \ F_1 = 1,\ \theta_1 = \langle x_1, x_1\rangle,\ k = \overline{1, M-1}. \end{array}$$

Очевидно, что если системы X, а значит и матрицы C невырождены, то для всех $k = \overline{0, M-1}$ отличны от нуля множители θ: $\theta_{k+1} = D_{k+1} = \|f_{k+1}\|^2 \neq 0$.

Встречные уравнения $\mathbb{RDL}$-факторизации $C = \widetilde{F}^{-*}\widetilde{\Theta}\widetilde{F}^{-1}$ матрицы Грама C системы X могут быть получены аналогичным образом из формул Фробениуса (20). □

Пример 3. Сравним результаты непосредственных вычислений по легко получаемым формулам прямой факторизации из разложения

$$(27)\quad C_3 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & R_{12} & R_{13} \\ 0 & 1 & R_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(см. также [14], стр. 126) с результатами, получаемыми из уравнений (26). Отметим, сравнивая уравнения (26) и разложение (27), что $F_{(k)}^{(-1)} = \{R_{ik}\}_{i=1}^{k}$, $\Theta_k = \operatorname{diag}(D_i)_1^k$. Пусть $k = 1$. Используем обозначения из уравнений (26) и разложения (27). Из (26), (27) получаем:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}: \quad \overrightarrow{F}_{(2)}^{(-1)} = R_{12} = \Theta_1^{-1} F_1 \overline{c}_2 = D_1^{-1} C_{12} = C_{11}^{-1} C_{12},\\
&\qquad \text{где} \quad D_1^{-1} = \Theta_1^{-1} = a_1, \quad \overline{c}_2 = C_{12}.\\
&\mathbf{b}: \quad \overrightarrow{F}_{(2)} = -\overrightarrow{F}_{(2)}^{-1} = -R_{12} = -D_1^{-1} C_{12},\\
&\mathbf{c}: \quad \theta_2 = D_2 = C_{22} - C_{12}^* C_{11}^{-1} C_{12}.
\end{aligned}
$$

Пусть теперь в равенствах (26), (27) имеем значение: $k = 2$.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}: \quad \overrightarrow{F}_{(3)}^{(-1)} = \Theta_2^{-1} F_2^* \overline{c}_3.\\
&\mathbf{b}: \quad \overrightarrow{F}_{(3)} = -F_2 \overrightarrow{F}_{(3)}^{(-1)} = -F_2 \Theta_2^{-1} F_2^* \overline{c}_3 = C_2^{-1} \overline{c}_3.\\
&\mathbf{c}: \quad a_3^{-1} = D_3 = F_{(3)}^* c_3 = C_{33} + \overrightarrow{F}_{(3)}^* \overline{c}_3.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\overrightarrow{F}_{(3)}^{(-1)} = \begin{vmatrix} R_{13} \\ R_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_1^{-1} & 0 \\ 0 & D_2^{-1} \end{vmatrix} \cdot F_2^* \cdot \begin{vmatrix} C_{13} \\ C_{23} \end{vmatrix}, \quad F_2 = \begin{vmatrix} 1 & -C_{11}^{-1} C_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.
$$

Замечание 4. Можно увидеть, в частности, в процессе прямой факторизации по А. Хаусхолдеру ([14], стр. 126), использованной в примере **3** для разложения (27), что если вектор x_i вложен в линейную оболочку $x_1, \ldots, x_{i-1}$, то соответствующий диагональный элемент D_i равен нулю. Таким образом можно исключить все зависмые элементы системы X. Аналогичные результаты имеют место и для $\mathbb{RDL}$-факторизации. □

Пример 4. Пусть в разложении (27) $C = \langle X, X \rangle$ и вектор x_2 системы X зависим от x_1 (то есть эти векторы коллинеарны). Покажем, что тогда в (27) $D_2 = \theta_2 = 0$. Действительно, при указанной зависимости имеет место равенство $\det(C_2) = (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) = 0$. Тогда $C_{22} = C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}$. Из (27) тогда имеем: $C_{22} = L_{21}D_1R_{12} \Longrightarrow D_2 = 0$. Таким образом, на этом примере показано, что зависимость вектора x системы X от предыдущего исключает его из системы. Это сказывается при вычислении проектора $S(X) = XC_M^{-1}X^*$ и факторизации матрицы Грама $C_M = \langle X, X \rangle$.

11. Двусторонняя ортогонализация и лемма об обращении матриц

Даны системы $X_{k+1} = |X, x|$, $Y_{k+1} = |Y, y|$ такие, что $\{S(X), S(Y)\} \subseteq \mathcal{H}_{k+1}$. Здесь $X = X_k = |x_i|_1^k$, $x = x_{k+1}$, $Y = Y_k$, $y = y_{k+1}$. Пусть $C = C_k \langle X, Y \rangle \in (k \times k)$. Покажем, что уравнения последовательного обращения сумм матриц вида $C + urv^*$ следуют из уравнений двусторонней биортогонализации систем X_{k+1} и Y_{k+1}.

Теорема 4. *Пусть матрица $C_{k+1} = \langle X_{k+1}, Y_{k+1} \rangle$ невырождена. Тогда*

1, *главные блоки* $C^{(-1)}_{1,k}$ *и* $c^{(-1)} = c^{(-1)}_{k+1,k+1}$ *в матрице* C^{-1}_{k+1}, *соответствующие блокам* $C = C_k = \langle X, Y\rangle$ *и* $c = c_{k+1,k+1} = \langle x, y\rangle$ *матрицы* $C_{k+1} = \langle X_{k+1}, Y_{k+1}\rangle$, *имеют вид:* $C^{(-1)}_{0,k} = \mathbf{c}^{-1}$, $c^{(-1)} = \mathbf{a}^{-1}$,

2, *матрица* $\mathbf{c}^{-1}$ *и скаляр* $\mathbf{a}^{-1}$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}. \quad \mathbf{c}^{-1} = \left(C - \overline{c}_y c^{-1}\overline{c}^*_x\right)^{-1} = C^{-1} + C^{-1}\overline{c}_y\mathbf{a}^{-1}\overline{c}^*_x C^{-1}, \\ &\mathbf{b}. \quad \mathbf{a}^{-1} = (c - \overline{c}^*_x C^{-1}\overline{c}_y)^{-1} = c^{-1} + c^{-1}\overline{c}^*_x\mathbf{c}^{-1}\overline{c}_y c^{-1}, \end{aligned} \tag{28}$$

где $\overline{c}_y = \langle x, Y\rangle$, $\overline{c}^*_x = \langle X, y\rangle$.

Доказательство. **1.** Из формулировки теоремы следует, что

$$C_{k+1} = \langle X_{k+1}, Y_{k+1}\rangle = \begin{vmatrix} \langle X, Y\rangle & \langle x, Y\rangle \\ \langle X, y\rangle & \langle x, y\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & \overline{c}_y \\ \overline{c}^*_x & c \end{vmatrix}.$$

Из уравнений (25)

$$\mathbf{a} = a^{-1}_{k+1} = \langle f_{k+1}, g_{k+1}\rangle = \theta_{k+1} = c - \widehat{c}, \qquad \text{где} \qquad \widehat{c} = \overline{c}^*_x C^{-1}\overline{c}_y. \tag{29}$$

Прямая и встречная биортогонализации блочных систем $|X, x|$ и $|Y, y|$ могут быть записаны в виде:

прямая — $\quad \Xi = |X, \Pi_Y x| = X_{k+1}F_y, \quad \Theta = |Y, \Pi_X y| = Y_{k+1}F_x,$

встречная — $\quad \widetilde{\Xi} = |\Pi_y X, x| = X_{k+1}\widetilde{F}_y \quad \widetilde{\Theta} = |\Pi_x Y, y| = Y_{k+1}\widetilde{F}_x.$

Здесь

$$\begin{aligned} \Pi_Y &= I - P_{X\perp Y} = P_{\perp Y\|X} = I - XC^{-1}\langle\,\cdot\,, Y\rangle, \qquad \Pi_X = \Pi^*_Y, \\ \Pi_y &= I - P_{x\perp y} = P_{\perp y\|x} = I - xc^{-1}\langle\,\cdot\,, y\rangle, \qquad \Pi_x = \Pi^*_y, \qquad I = I_K. \end{aligned} \tag{30}$$

Выпишем матрицы полученных биортогональных систем.

$$\langle\Xi, \Theta\rangle = A^{-1} = F^*_x C_{k+1}F_y, \quad \left\langle\widetilde{\Xi}, \widetilde{\Theta}\right\rangle = \widetilde{A}^{-1} = \widetilde{F}^*_x C_{k+1}\widetilde{F}_y. \qquad \text{Здесь}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & \langle\Pi_Y x, y\rangle = \mathbf{a} \end{vmatrix} \in \mathbb{D}, \quad \widetilde{A}^{-1} = \begin{vmatrix} \langle\Pi_y X, Y\rangle = \mathbf{c} & 0 \\ 0 & c = \langle x, y\rangle \end{vmatrix} \in \mathbb{D},$$

$$F_y = \begin{vmatrix} I & -C^{-1}\overline{c}_y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}, \quad F_x = \begin{vmatrix} I & -C^{-*}\overline{c}_x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \in \mathbb{R},$$

$$\widetilde{F}_y = \begin{vmatrix} I & 0 \\ -c^{-1}\overline{c}^*_x & 1 \end{vmatrix} \in \mathbb{L}, \quad \widetilde{F}_x = \begin{vmatrix} I & 0 \\ -c^{-*}\overline{c}^*_y & 1 \end{vmatrix} \in \mathbb{L}.$$

Получаем для обратной матрицы C_{k+1} прямую и возвратную формулы Фробениуса: $C^{-1}_{k+1} = F_y A F^*_x = \widetilde{F}_y\widetilde{A}\widetilde{F}^*_x$. Выпишем диагональные блоки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ в матрицах A^{-1} и $\widetilde{A}^{-1}$:

$$\mathbf{a} = c - \overline{c}^*_x C^{-1}\overline{c}_y, \qquad \mathbf{c} = C - \overline{c}_y c^{-1}\overline{c}^*_x. \tag{31}$$

Теперь имеем два блочных разложения билинейной матрицы C^{-1}_{k+1}. Они получены как следствия прямой и возвратной биортогонализации систем X и Y.

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}. \quad C^{-1}_{k+1} = \begin{vmatrix} C^{-1} + C^{-1}\overline{c}_y\mathbf{a}^{-1}\overline{c}^*_x C^{-1} & -C^{-1}\overline{c}_y\mathbf{a}^{-1} \\ -\mathbf{a}^{-1}\overline{c}^*_x C^{-1} & \mathbf{a}^{-1} \end{vmatrix}, \\ &\mathbf{b}. \quad C^{-1}_{k+1} = \begin{vmatrix} \mathbf{c}^{-1} & -\mathbf{c}^{-1}\overline{c}_y c^{-1} \\ -c^{-1}\overline{c}^*_x\mathbf{c}^{-1} & c^{-1} + c^{-1}\overline{c}^*_x\mathbf{c}^{-1}\overline{c}_y c^{-1} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{32}$$

2. Сравнение двух представлений матрицы C_{k+1}^{-1} доказывает теорему. □

Замечание 5. Теорема 4, разложения (32) в других обозначениях доказаны в разделе **5** из общих — прямой (11) и возвратной (13) — формул Фробениуса. Здесь эти формулы получены как следствие процессов двусторонней ортгонализации. □

Следствие 3. *Из теоремы* 4 *следует известная «**лемма об обращении матриц**» (дискретное матричное уравнение Риккати).*

Доказательство. Уравнение этой леммы записывают, в частности, так:

$$C_{(k+1)}^{(-1)} = (C + urv^*)^{-1} = C^{-1} - C^{-1}u\left(r^{-1} + v^*C^{-1}u\right)^{-1} v^*C^{-1}. \tag{33}$$

Это уравнение следует из системы уравнений (28) теоремы **4** после соответствующей подстановки и замены переменных

$$u = \overline{c}_y = \langle Y, x\rangle\,, \quad v = \overline{c}_x = \langle X, y\rangle\,, \quad r = -c^{-1} = \langle x, y\rangle\,, \quad v^*C^{-1}u = -\widehat{c}. \tag{34}$$

В Замечании **3** в разделе **5** предложен комментарий к связи уравнения (33) и матричного дискретного уравнения Риккати. □

Следствие 4. *Величина* $c = -r^{-1}$ *из* $(29), (34)$ *есть прогнозирумая величина, а число* $\widehat{c}$ *в* (29) *— ее прогноз. Разность* $c-\widehat{c}$ *есть ошибка прогноза в уравнении обновления* (33) *рукррентного обращения матрицы* C_{k+1}^{-1}.

Доказательство. Из (25) и (29) имеем в (28): $\mathbf{a} = c - \widehat{c} = \langle f, g\rangle$, где $f = \Pi_y x$, а $g = \Pi_x y$ (22). Если $\langle f, g\rangle = c - \widehat{c} = 0$, то матрица $C_{(k+1)}$ становится проектором, то есть необратимой. Действительно, если $c = \widehat{c} = \overline{c}_x^* C^{-1}\overline{c}_y = v^*C^{-1}u$, то

$$C_{(k+1)} = C - u\left(v^*C^{-1}u\right)^{-1} v^* = \left(I - u\left(v^*C^{-1}u\right)^{-1} v^*C^{-1}\right) C = \Pi_{\perp(C^{-1}v)\|u} C.$$

Кроме того, прогноз $\widehat{c}$ величины c есть скалярное произведение проекций множителей прогнозируемого значения параметра $c = \langle x, y\rangle$. Как было показано ранее, аналогичными признаками характеризуется и прогноз $\widehat{x}_{k+1/k}$ расширения $x = x_{k+1}$ системы $X = X_{k+1} = |X_x, x_{k+1}|$. Для прогноза величины $-r^{-1} = c = \langle x, y\rangle$ имеем в (33):

$$\widehat{c} = \overline{c}_x^* C^{-1}\overline{c}_y = \langle X, y\rangle \langle X, Y\rangle^{-1} \langle x, Y\rangle = \langle P_{X\perp Y}x, P_{X\perp Y}^* y\rangle = \langle P_{X\perp Y}x, P_{Y\perp X}y\rangle\,.$$

Утверждение доказано. □

Замечание 6. Если положить $(c - \widehat{c})^{-1} = -(r^{-1} - \widehat{r}^{-1})^{-1} = 0$ при $c = \widehat{c}$ в правой части уравнения Риккати (33), то устраняется неопределенность в этом уравнении. Этот результат следует из того, что правая часть уравнения (33) стремится к матрице C^{-1} при $r \to 0$. В левой части, если $r = -c^{-1} = 0$, получаем: $C_{k+1}^{-1} = (C + urv^*)^{-1} = C^{-1} = C_k^{-1}$.

12. Методы наименьших квадратов

Уравнения рекуррентных алгоритмов МНК хорошо известны [10, 12]. Эти уравнения вытекают из уравнений псевдообращения матриц (раздел **7**). Связь уравнений МНК с уравнениями ортогонализации естественна, так как задачи оценивания в основе своей есть задачи проектирования.

Рассматриваем два основых типа алгебраических задач: переопределенные и недоопределенные линейные системы уравнений. Эти задачи, есть прямая и обратная задачи ортогонального проектирования на заданное подпространство $S = S(X)$. Приводим их формулировки и решения $\widehat{\mathbf{y}} \in S$. Решения получаются минимизацией величины $\|\xi\|^2$ и реализуются с помощью псевдообратных матриц Мура–Пенроуза:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{a}.\quad \mathbf{y} = \widehat{\mathbf{y}} + \xi, \quad \widehat{\mathbf{y}} = Xd: \qquad \widehat{d} = \langle X, X\rangle^{-1}\langle \mathbf{y}, X\rangle = X^{-1}\mathbf{y},\\
&\textbf{b}.\quad d = \langle \widehat{\mathbf{y}}, X\rangle, \quad \widehat{\mathbf{y}} = \xi: \qquad \widehat{\mathbf{y}} = X\langle X, X\rangle^{-1} d = \left(X^{-1}\right)^* d.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Замечание 7. Для иллюстрации основных фактов и технических средств здесь нет необходимости рассматривать решения систем равнений (35), требующие применения уравнений биортогонализации и обобщенного псевдобращения то есть задачи «косого» проектирования с так называемыми инструментальными переменными Y. Эти задачи и переменные обусловлены приложениями. В разделе **7** были рассмотрены псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза, решающие прямую и обратную задачи (35) ортогонального проектирования (МНК). Для такого их решения достаточно было условия $\widehat{\mathbf{y}} \in S(X)$, либо минимизации величины $\|\xi\|^2$.

В задачах «косого» проектирования система Y инструментальных переменных определяет направление проектирования. В задачах МНК (35) ортогонального проектирования эти направления определены условиями: в задаче (35a) — $\xi \perp S(X)$, в задаче (35b) — $\xi \in S(X)$. В задачах обобщенного псевдопроектирования эти условия таковы: в задаче (35a) — $\xi \perp S(Y)$, в задаче (35b) — $\xi \in S(Y)$. При их учете получим решения: в задаче (35a) — $\widehat{d} = \langle X, Y\rangle^{-1}\langle \mathbf{y}, Y\rangle = X_Y^{-g}\mathbf{y}$, в задаче (35b) — $\widehat{\mathbf{y}} = Y\langle Y, X\rangle^{-1} d = \left(X_Y^{-g}\right)^* d$. Здесь X_Y^{-g} матрица оператора обобщенного псевдообращенния. $\square$

Для приведенных решений систем в (35) можно получить уравнения обновления. Их основой являются уравнения обновления для псевдообратных матриц. Они выведены из уравнений ортогонализации в разделе **7**.

Для примера приведем вывод уравнений обновления для решений (35a) при увеличении размерности векторов в системе X. Пусть $X = X_n = X_{n/[l]}$. Необходимо получить уравнения для оценок $\widehat{d}_{[l+1]}$ n–вектора параметров d, уточняемых при переходе $[l] \to [l+1]$. Переход означает «обработку» очередного отсчета $y_{[l+1]} = v^*_{[l+1]}d + \xi_{[l+1]}$ в реализации $\mathbf{y}$. Подобные уравнения используются в рекуррентных методах наименьших квадратов, фильтрах Калмана и т.д. [10, 12, 13].

Пусть матрица $C^{-1}_{[l]}$ и решение $\widehat{d}_{[l]} = X^{-1}\mathbf{y} = C^{-1}X^*R\mathbf{y}$ системы (35a) в E^l известны. Здесь: $C = C_n = C_{[l]} = C_{n/[l]} = X^*RX$, $X = X_{n/[l]}$, $R = I_{[l+1]}r$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{[l]}$, $l = \overline{l_0, L-1}$, где число l_0 таково, что $C_{n/[l_0]} = C_0$, и $\det C_0 \neq 0$. Вычислим решение $\widehat{d}_{[l+1]} = X^{-1}_{[l+1]}\mathbf{y}_{[l+1]}$ и матрицу $C^{-1}_{n/[l+1]} = (C + vrv^*)^{-1}$ системы (35a) в E_{l+1}.

Лемма 8. *Система уравнений рекуррентного оценивания векторного параметра $\widehat{d}_{[l+1]}$ по МНК переопределенной системы уравнений* (35) *предусматривает двукратное использование уравнения Риккати* (*леммы об обращении матриц*).

Доказательство. Во–первых, вывод указанной системы начинается с использования рекуррентной формулы вычисления псевдообратного оператора (21).

Она получена в разделе **7** с помощью леммы об обращении матриц. Кроме того, система полученных уравнений также предусматривает последовательное вычисление матрицы C^{-1}. Приведем полученнную таким образом систему уравнений рекуррентного оценивания векторного параметра $\widehat{d}_{[l+1]}$ по МНК переопределенной системы уравнений (35). Начальные условия: $C = C_{[0]}$, $X_{[l_0]}$, $y_{[l_0]}$, $\widehat{d}_{[l_0]} = C_{[0]}^{-1} \left\langle y_{[l_0]}, X_{[l_0]} \right\rangle$. Обозначим как $g = C^{-1}v$ вектор, требующий для своего вычисления использования уравнения Риккати. Для $l = \overline{l_0, L-1}$ имеем:

$$\widehat{d}_{[l+1]} = (C + vrv^*)^{-1} \left(X^* R\mathbf{y} + vry_{[l+1]} \right) =$$

$$C^{-1}X^*R\mathbf{y} + g\left(r^{-1} + v^*g\right)^{-1} \left(\left(r^{-1} + v^*g\right) ry_{[l+1]} - v^*g\, ry_{[l+1]} - v^*C^{-1}X^*R\mathbf{y} \right)$$

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \ \widehat{d}_{[l+1]} = \widehat{d}_{[l]} + K_{[l+1]}\pi_{[l+1]}, \qquad \text{где} \qquad K = g(r^{-1} + v^*g)^{-1}, \\ &\text{а} \qquad \pi_{[l+1]} = y_{[l+1]} - \widehat{y}_{[l+1/l]}\,, \qquad \widehat{y}_{[l+1/l]} = v^*_{[l+1]}\widehat{d}_{[l]}. \end{aligned} \tag{36}$$ □

Последнее выражение есть прогноз на отсчет y_{l+1} нового уравнения в системе (35а). Он основан на предыдущем решении $\widehat{d}_{[l]}$. Этот прогноз дается новой $(l+1)$–строкой v^* в системе алгебраических уравнений $\mathbf{y}_{[l+1]} = X_{n/[l+1]}d + \xi_{[l+1]} = \begin{vmatrix} X_{n/[l]} \\ v^* \end{vmatrix} d + \xi_{[l+1]}$.

13. Фильтрация и идентификация

Пусть n-вектор параметров d системы уравнений (35а) есть не постоянный вектор, а состояние линейной динамической системы порядка n:

$$d_{[l+1]} = A_{[l+1]}d_{[l]}, \quad y_{[l+1]} = v^*_{[l+1]}d_{[l+1]} + \xi_{l+1}, \quad l = \overline{l_0, L-1}. \tag{37}$$

Здесь $y_{[l+1]}$ — наблюдаемые комбинации компонент состояний $d_{[l+1]}$ этой системы, $v^*_{[l+1]}$ — «наблюдатель» состояний, а ξ_{l+1} — ошибки наблюдений. Система уравнений (37) для указанных значений параметра l заменяет систему уравнений (35а).

К уравнениям (33) и (36) добавим уравнения динамической системы (37) для ее текущего состояния $d_{[l+1]}$ и наблюдателя $v^* = v^*_{[l+1]}$. После несложных преобразований получим систему уравнений одного из калмановских фильтров, соответствующих модели (37) [10,12,13]. Таким образом, и в основе уравнений рекуррентных алгоритмов фильтров Р. Калмана лежат уравнения ортогонализации (1), (2).

Пусть система (37) автономна, то есть матрица перехода $A_{[l+1]}$ и наблюдатель $v_{[l+1]}$ не зависят от параметра $l = \overline{0, L-1}$. Уравнения фильтрации для автономных систем — так называемые быстрые (*fast*) алгоритмы фильтрации — получены Т. Кайлатом и сотрудниками [13] на основе общих уравнений Р. Калмана. Основное отличие быстрых алгоритмов Т. Кайлата от уравнений фильтров Р. Калмана — отсутствие уравнения Риккати для вычисления матрицы ковариаций оценок состояний.

Если стационарная система (37) имеет каноническое описание, эквивалентное одному уравнению порядка n (в этом случае переходая матрица A в (37) является канонической матрицей Фробениуса [1]), то могут быть получены еще более простые и быстрые уравнения фильтрации. Для стационарных систем, приведенных к каноническому виду, вариационные быстрые фильтры были предложены в [6]. Они основаны на уравнениях встречной ортогонализации однородных систем [3].

Вариационные фильтры обладают важными преимуществами. Эти преимущества обусловлены использованием канонического описания модели сигналов. Во–первых, они проще, чем фильтры Калмана и Кайлата. Во–вторых, вариационные фильтры позволяют оперативно решать задачи идентификации (оценивания коэффициентов) моделей (37) с каноническим описанием [5,6]. Вариационный подход к задачам фильтрации и идентификации обобщен и на «квазиканонические» описания систем. Это системы разностных уравнений заданного порядка [3, 5, 8].

Замечание 8. Идентификация систем с помощью фильтров Калмана и Кайлата возможна и известна. Это могут быть расширенные фильтры Калмана и Кайлата. Они реализуются с помощью расширения векторов состояний динамических систем за счет включения в них неизвестных варьируемых (оцениваемых) коэффициентов уравнений этих систем. Система фильтрации сразу становится нелинейной даже для линейной системы. Такие фильтры есть трудно сходящиеся и слабо устойчивые процессы. Они требуют хороших начальных приближений коэффициентов уравнений. Этот факт есть следствие «острого» и овражного характера экстремумов в подобных задачах идентификации. Поэтому использование градиентных и ньютоновских итерационных процедур в подобных методах идентификации мало эффективно. Теоретическое исследование таких рекуррентных алгоритмов и нелинейных уравнений фильтрации очень сложно.

Описанный рекуррентный подход к идентификации систем на основе фильтров Калмана и Кайлата существенно менее надежен и более сложен, чем явный вариационный подход [6]. В последнем используются специальные итерационные процедуры для оптимизации коэффициентов модели. Эти процедуры обладают большой скоростью и областью сходимости. Для теоретического изучения этот подход также весьма сложен. $\square$

Замечание 9. Уравнения фильтров Р. Калмана, основанные на общих моделях вида (37), как правило, рассматриваются и выводятся на основе теории случайных процессов. Первым исключением и демонстрацией нового взгляда на фильтр Р. Калмана (с позиций МНК) стала в свое время работа Р. Ли [10]. В частности, этот факт объяснет известность этой небольшой книги. Но дальше этого Р. Ли не пошел: он вернулся в пространство состояний моделей (37). В работе [6] автор остался в пространстве реализаций и использовал канонические модели с описанием Фробениуса. Это привело к новым вариационным методам решения задач идентификации таких моделей [5, 6, 7, 9]. $\square$

14. Заключение

Цель настоящей статьи — показать, что основой уравнений рекуррентных алгоритмов как в задачах вычислительной алгебры, так и в задачах оценивания являются проекционные подходы (в частности, МНК) и процессы ортогонализации.

Показано, что уравнения рекуррентных алгоритмов, описывающих последовательные вычисления в линейной алгебре (задачи обращения матриц, их треугольные факторизации, задачи оценивания и проектирования) и инициируемых ошибками прогнозов вычисляемых и оцениваемых величин, есть следствия встречных процессов ортогонализации (и биортогонализации) векторных систем в унитарных пространствах.

С помощью уравнений двусторонней ортогонализации и биортогонализации показана связь известной леммы об обращении (сумм) матриц и формул Фробениуса для обращения окаймляемых матриц. Показано, что уравнения оценивания и проектирования (методы наименьших квадратов, фильтры Калмана) также есть следствия указанных уравнений.

В случае вырожденности систем векторов и возникновения соответствующих особенностей как в процессах их ортогонализации, так и связанных с ними иных алгебраических процессах, предложен способ устранения этих особенностей.

Автор благодарит рецензента за конструктивные замечания и полезные методические рекомендации.

References

[1] I.M. Glazman, Ju.I. Ljubic, *Finite-Dimensional Linear Analysis*, Moscow: Nauka, 1969 [in Russian]. MR0354715

[2] V.G. Bardakov, M.V. Neshchadim, Yu.V. Sosnovsky, *Groups of triangular automorphisms of a free associative algebra and a polynomial algebra*, Journal of Algebra, **362**:1 (2012), 201–220. MR2921639

[3] A.O. Egorshin, *On counter orthogonalization processes*, Numerical Analysis and Applications, **5**:4 (2012), 307–319. Zbl 1299.65071

[4] I.C. Gohberg, M.G. Krein, *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space*, Amer. Math. Soc., Providence, 1970. MR0264447

[5] A.O. Egorshin, *Parameters optimization of the stationary models in unitary space*, Automation and Remote Control, **65**:12 (2004), 1734–1756. MR2128190

[6] A.O. Egorshin, *On a method for estimating of coefficients of simulating equation for sequences*, Sibirskii Zhurnal Industrial'noy Matematiki, **3**:2 (2000), 78–96 [in Russian]. MR1964571

[7] A.O. Egorshin, *On tracking extremum parameters in the identification variational problem*, Journal of Mathematical Sciences, **195**:6 (2013), 791–804. MR3141842

[8] A.O. Egorshin, *On one variational smoothing problem*, Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **4** (2011), 9–22 [in Russian]. Zbl 1299.65072

[9] A.O. Egorshin, *On one variational problem of the piecewise-linear dynamical approximation*, Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **4** (2012), 30–45 [in Russian]. Zbl 1299.65073

[10] R.C.K. Lee, *Optimal Estimation, Identification and Control*, Cambridge: MIT Press, 1964. Zbl 0137.35703

[11] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, New York: Chelsea Publishing Company, 1959. MR0107649

[12] P.Ye. Elyasberg, *Definition of the Motion via Measurement Result*, Moscow: URSS, 2011 [in Russian].

[13] T. Kailath, *An innovation approach to least-square estimation, part I: Linear filtering in additive white noise*, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-13** (1968), 646–655. MR0309257

[14] A.S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, New York–Toronto–London: Dover Publication Inc., 1964. MR0175290

Alexey Olegovich Egorshin
Sobolev Institute of Mathematics,
4, pr. Koptyuga,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: egorshin@math.nsc.ru