S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1901–1912 (2019) УДК 519.23
DOI 10.33048/semi.2019.16.135 MSC 62F12

ОБ УЛУЧШЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕПЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Е.Н. САВИНКИНА, А.И. САХАНЕНКО

Abstract. We consider a task of estimating an unknown parameter in a special class of nonlinear regression problems. The second step of a two-stage estimation method is presented (with the first step consistent estimators being already obtained). The asymptotic normality of these estimators is proved.

Keywords: non-linear regression, power regression, statistical estimators, asymptotically normal estimators, two-stage estimation, improved estimators

1. Введение и основные результаты

Предположим, что наблюдаются независимые случайные величины $\{Y_i\}$, представимые в виде

$$Y_i = (1 + \alpha x_i)^r + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., \quad r \neq 0, \tag{1}$$

где $\{x_i > 0\}$ — некоторая известная числовая последовательность, а $\{\varepsilon_i\}$ — ненаблюдаемые случайные погрешности. Нам требуется оценить неизвестный положительный параметр $\alpha > 0$, используя первые n наблюдений.

Традиционный путь решения такой задачи состоит в использовании метода наименьших квадратов, когда в качестве оценки для α берётся точка $\hat{\alpha}_n$, в

Savinkina, E.N., Sakhanenko, A.I., On improvement of statistical estimators in a power regression problem.

© 2019 Савинкина Е.Н., Саханенко А.И.

Работа первого автора выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.3., проект № 0314-2019-0008. Исследование второго автора выполнено также при частичной поддержке РФФИ (грант 17-01-00683).

Поступила 29 октября 2019 г., опубликована 11 декабря 2019 г.

которой достигает минимума сумма квадратов отклонений, т.е.

$$\hat{\alpha}_n = \arg\min_{\alpha} H_n(\alpha) \quad \text{при} \quad H_n(\alpha) = \sum_{i\le n} \big(Y_i - (1+\alpha x_i)^r\big)^2. \tag{2}$$

При $r = 1$, когда уравнение (1) превращается в классическое уравнение линейной регрессии, этот традиционный метод прекрасно себя зарекомендовал. Однако при $r \neq 1$, как отмечено в монографии Е.З. Демиденко [1], задача поиска точки минимума $\hat{\alpha}_n$ в формуле (2) представляет серьёзные вычислительные трудности (связанные с тем, что количество локальных минимумов в правой части формулы (2) может стремиться к бесконечности при нецелых r).

В работе [2] мы рассматривали частный случай уравнения (1), когда $r = 1/2$, и ввели целый класс явных простых оценок для параметра α. В частности, в качестве такой оценки можно взять статистику

$$\alpha_n^* = \sum_{i\le n}(x_i - \bar{x}_n)Y_i^2 \Big/ \sum_{i\le n}(x_i - \bar{x}_n)^2, \text{ где} \quad \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i\le n} x_i.$$

Подчеркнём, что уравнение (1) — это третье уравнение нелинейной регрессии, в котором А.И. Саханенко и его ученикам удалось найти явную асимптотически нормальную оценку для неизвестного параметра (см. [2]-[5]).

Однако все оценки из [2] обладают другим недостатком: они менее точные, чем труднонаходимая оценка (2) по методу наименьших квадратов. С целью обойти и эту трудность, естественно воспользоваться идеей Р. Фишера [6] и улучшить оценки из [2]. Действительно, пусть на первом шаге нами уже получена некоторая предварительная состоятельная оценка α_n^*. Следуя Фишеру, на втором шаге мы можем попытаться улучшить эту оценку, используя один шаг в известном методе Ньютона для нахождения точки минимума функции $H_n(\cdot)$. В этом случае на втором шаге обычно используется следующая оценка

$$\hat{\alpha}_n^* = \alpha_n^* - \frac{H_n'(\alpha_n^*)}{H_n''(\alpha_n^*)}, \tag{3}$$

где

$$H_n'(t) = 2r\sum_{i\le n}\big(x_i(1+tx_i)^{2r-1} - Y_i x_i(1+tx_i)^{r-1}\big), \tag{4}$$

$$H_n''(t) = 2r\sum_{i\le n}\big((2r-1)x_i^2(1+tx_i)^{2r-2} - (r-1)Y_i x_i^2(1+tx_i)^{r-2}\big). \tag{5}$$

При $p > 0$ положим

$$A_{p,n}(t) = \sum_{i\le n}\frac{x_i^p}{(1+tx_i)^{p-2r}} \quad \text{и} \quad E_n^2(t) = A_{2,n}(t). \tag{6}$$

Поскольку

$$\mathbb{E}H_n''(\alpha) = 2r^2 E_n^2(\alpha),$$

то наряду с (3) на втором шаге, начиная с работы [6], также часто используют оценку вида

$$\hat{\alpha}_n^* = \alpha_n^* - \frac{H_n'(\alpha_n^*)}{2r^2 E_n^2(\alpha_n^*)}.$$

В настоящей работе изучаются оценки второго шага, которые имеют следующий более общий вид:

$$\alpha_n^{**}(c) = \alpha_n^* - \frac{H_n^{'}(\alpha_n^*)}{cH_n^{''}(\alpha_n^*) + (1-c)2r^2E_n^2(\alpha_n^*)}, \tag{7}$$

где c — некоторая константа, выбираемая статистиком. Мы всюду считаем выполненным следующее достаточно естественное

Предположение A. Случайные величины $\{\varepsilon_i\}$ — независимы и одинаково распределены, причем

$$\mathbb{E}\varepsilon_1 = 0, \quad 0 < \sigma^2 := \mathbb{D}\varepsilon_1 < \infty. \tag{8}$$

Кроме того, $\alpha > 0$ и $x_i > 0$ при всех i, а также

$$\frac{\max_{i\le n} x_i^2/(1+\alpha x_i)^{2-2r}}{E_n^2(\alpha)} \to 0. \tag{9}$$

Подчеркнём, что в (9) и всюду далее все пределы берутся при $n \to \infty$. Приведём теперь основные утверждения статьи.

Теорема 1. *Пусть справедливо Предположение A и*

$$\rho_{1,n} := (\alpha_n^* - \alpha)^2 A_{3,n}(\alpha)/E_n(\alpha) \xrightarrow{p} 0. \tag{10}$$

Тогда для состоятельной оценки α_n^* при всех c

$$\frac{\alpha_n^{**}(c) - \alpha}{d_n} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad \textit{при} \quad d_n = \frac{\sigma}{rE_n(\alpha)}. \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть верно Предположение A и*

$$\rho_{2,n} := |\alpha_n^* - \alpha|^3 A_{4,n}(\alpha)/E_n(\alpha) \xrightarrow{p} 0. \tag{12}$$

В этом случае для состоятельной оценки α_n^* сходимость (11) имеет место при $c = -1/2$.

Следствие 1. *Для сходимости (10) достаточно выполнения условия*

$$(\alpha_n^* - \alpha)^4 A_{4,n}(\alpha) \xrightarrow{p} 0. \tag{13}$$

А сходимость (12) вытекает из

$$(\alpha_n^* - \alpha)^6 A_{6,n}(\alpha) \xrightarrow{p} 0. \tag{14}$$

Оба утверждения Следствия 1 будут доказаны в следующем разделе, а в завершение текущего раздела мы приведём замечания о связи двух теорем.

Замечание 1. Если все наблюдения одинаково распределены и $x_i = x_1 > 0$ при всех i, то предположение (13) превратится в

$$n(\alpha_n^* - \alpha)^4 \xrightarrow{p} 0. \tag{15}$$

Но условие (15), в свою очередь, совпадает с классическим предположением из монографии [7, теорема 5.5.4].

Подчеркнём, что в этом случае условие (14) слабее, поскольку оно эквивалентно предположению $n(\alpha_n^* - \alpha)^6 \xrightarrow{p} 0$.

Замечание 2. Если α_n^* — состоятельная оценка параметра α, и верно условие (10), то (см. подробности в приводимой ниже Лемме 4)

$$\alpha\rho_{2,n} \le |\alpha_n^* - \alpha| \cdot \rho_{1,n} \xrightarrow{p} 0.$$

То есть условия Теоремы 2 слабее условий Теоремы 1.

Замечание 3. В отличие от работ [3] и [8], в наших Теоремах 1 и 2 не делается каких-либо предположений о структуре состоятельной оценки α_n^*.

2. Доказательство основных результатов

2.1. Срезка оценки α_n^*.

Лемма 1. *Пусть для состоятельной оценки α_n^* выполнены все условия Теоремы 2. Тогда найдётся последовательность чисел $\{\gamma_n\}$ такая, что*

$$\gamma_n \to 0, \quad \kappa_n := \frac{\gamma_n^3 A_{4,n}}{E_n(\alpha)} \to 0, \quad 0 < \gamma_n \le \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \mathbb{P}(|\alpha_n^* - \alpha| > \gamma_n) \to 0.$$

Доказательство. Поскольку оценка α_n^* — состоятельная, то

$$p_n(\varepsilon) := \mathbb{P}(|\alpha_n^* - \alpha| > \varepsilon) \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Следовательно, найдутся числа $\varepsilon_n > 0$ такие, что

$$\varepsilon_n \to 0 \quad \text{и} \quad p_n(\varepsilon_n) \to 0. \tag{16}$$

Далее, условие (12) можно переписать в виде

$$|\alpha_n^* - \alpha|^3 A_n^3 \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при} \quad A_n^3 = \frac{A_{3,n}}{E_n(\alpha)} > 0.$$

Следовательно,

$$p_n\left(\frac{\varepsilon}{A_n}\right) = \mathbb{P}\left(|\alpha_n^* - \alpha| > \frac{\varepsilon}{A_n}\right) = \mathbb{P}(A_n^3 |\alpha_n - \alpha|^3 > \varepsilon^3) \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Значит, найдутся числа $\tilde{\varepsilon}_n > 0$ такие, что

$$\tilde{\varepsilon}_n \to 0 \quad \text{и} \quad p_n(\tilde{\varepsilon}_n / A_n) \to 0. \tag{17}$$

Теперь выберем

$$\gamma_n = \min\{\varepsilon_n, \tilde{\varepsilon}_n / A_n, \alpha/2\} \le \alpha/2. \tag{18}$$

Из (16) - (18) немедленно получаем

$$\gamma_n \le \varepsilon_n \to 0 \quad \text{и} \quad \gamma_n^3 A_n^3 \le (\tilde{\varepsilon}_n / A_n)^3 A_n^3 = \tilde{\varepsilon}_n^3 \to 0. \tag{19}$$

Кроме того, нетрудно понять, что

$$\mathbb{P}(|\alpha_n^* - \alpha| > \gamma_n) = \max\{p_n(\varepsilon_n), p_n(\tilde{\varepsilon}_n / A_n), p_n(\alpha/2)\} \to 0. \tag{20}$$

Из (18) – (20) следует, что введённые в (18) числа $\{\gamma_n\}$ удовлетворяют всем требованиям Леммы 1. □

Определим последовательность случайных величин $\tilde{\alpha}$ следующим образом:

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} \alpha_n^*, & \text{если } |\alpha_n^* - \alpha| \le \gamma_n; \\ \alpha, & \text{если } |\alpha_n^* - \alpha| > \gamma_n. \end{cases}$$

По аналогии с (7) введем теперь случайные величины

$$\tilde{\alpha}_n^{**}(c) = \tilde{\alpha} - \frac{H_n'(\tilde{\alpha})}{cH_n''(\tilde{\alpha}) + (1-c)2r^2 E_n^2(\tilde{\alpha})}. \tag{21}$$

В силу Леммы 1 из (7) и (21) вытекает, что

$$\mathbb{P}(\tilde{\alpha}_n^{**}(c) \ne \alpha_n^{**}) \le \mathbb{P}(\tilde{\alpha} \ne \alpha_n^*) = \mathbb{P}(|\alpha_n^* - \alpha| > \gamma_n) \to 0.$$

Таким образом, вместо (11) нам достаточно показать, что

$$\frac{\tilde{\alpha}_n^{**}(c)-\alpha}{d_n} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad \text{при} \quad d_n = \frac{\sigma}{rE_n(\alpha)}. \tag{22}$$

2.2. **Основное представление.** Заметим, что выражение (21) можно переписать следующим образом

$$\tilde{\alpha}_n^{**}(c)-\alpha = \frac{(\tilde{\alpha}-\alpha)\big[cH_n^{''}(\tilde{\alpha})+(1-c)2r^2E_n^2(\tilde{\alpha})\big]-H_n^{'}(\tilde{\alpha})}{cH_n^{''}(\tilde{\alpha})+(1-c)2r^2E_n^2(\tilde{\alpha})}. \tag{23}$$

Введём обозначения

$$\begin{gathered}\tilde{\delta} := \tilde{\alpha}-\alpha, \quad \Delta_E := E_n^2(\tilde{\alpha})-E_n^2(\alpha)-2(r-1)\tilde{\delta}A_{3,n}(\alpha),\\ M(r) := 2r^2(r-1), \quad \Delta_c := H_n^{''}(\tilde{\alpha})-2r^2E_n^2(\tilde{\alpha})-M(r)\tilde{\delta}A_{3,n}(\alpha),\\ \Delta := H_n^{'}(\tilde{\alpha})-H_n^{'}(\alpha)-2r^2\tilde{\delta}E_n^2(\tilde{\alpha})+M(r)\tilde{\delta}^2A_{3,n}(\alpha)/2.\end{gathered} \tag{24}$$

Поскольку

$$\begin{gathered}cH_n^{''}(\tilde{\alpha})+(1-c)2r^2E_n^2(\tilde{\alpha}) =\\ = 2r^2E_n^2(\alpha)+2r^2\Delta_E+c\Delta_c+M(r)(c+2)\tilde{\delta}A_{3,n}(\alpha),\end{gathered}$$

то с помощью (24) мы легко преобразуем (23) в выражение

$$\frac{\tilde{\alpha}_n^{**}(c)-\alpha}{d_n} = \frac{-\frac{H_n^{'}(\alpha)}{2r\sigma E_n(\alpha)}+\frac{c\tilde{\delta}\Delta_c-\Delta}{2r\sigma E_n(\alpha)}+M(r)(c+1/2)\frac{\tilde{\delta}^2A_{3,n}(\alpha)}{2r\sigma E_n(\alpha)}}{1+\frac{2r^2\Delta_E+c\Delta_c+M(r)(c+2)\tilde{\delta}A_{3,n}(\alpha)}{2r^2E_n^2(\alpha)}}. \tag{25}$$

Представление (25) является основой для доказательства обеих теорем.

2.3. **Основная лемма.**

Лемма 2. *Если выполнены условия Теоремы 2 и оценка α_n^* состоятельная, то при всех c справедливы сходимости*

$$\rho := \frac{c\Delta_c+2r^2\Delta_E+M(r)(c+2)\tilde{\delta}A_{3,n}(\alpha)}{E_n^2(\alpha)} \xrightarrow{p} 0, \tag{26}$$

$$\rho^* := \frac{c\tilde{\delta}\Delta_c-\Delta}{E_n(\alpha)} \xrightarrow{p} 0. \tag{27}$$

Это утверждение будет в несколько этапов доказано в третьем разделе.

2.4. **Вспомогательные леммы.**

Лемма 3. *При выполнении Предположения A*

$$W_n := -\frac{H_n'(\alpha)}{2r\sigma E_n(\alpha)} \Rightarrow \eta, \tag{28}$$

где случайная величина η имеет стандартное нормальное распределение.

Доказательство. Очевидно представление

$$W_n = \sum_{i\le n} a_{i,n}\varepsilon_i, \quad \text{при} \quad a_{i,n} := \frac{1}{\sigma E_n(\alpha)}\cdot\frac{x_i}{(1+\alpha x_i)^{1-r}}. \tag{29}$$

В этих обозначениях условие (9) можно переписать в следующем виде

$$\max_{i\le n}|a_{i,n}|\to 0 \quad \text{и} \quad \sigma^2\sum_{i\le n}a_{i,n}^2=1. \tag{30}$$

Тот факт, что условие (30) достаточно для того, чтобы взвешенные суммы вида (29) удовлетворяли центральной предельной теореме можно найти, например, в [8, предложение 2.9]. □

Лемма 4. *При выполнении Предположения A справедливы неравенства*

$$A_{3,n}^2(\alpha)\le A_{4,n}(\alpha)E_n^2(\alpha), \quad A_{4,n}^2(\alpha)\le A_{6,n}(\alpha)E_n^2(\alpha). \tag{31}$$

Кроме того, в этом случае

$$\alpha^2A_{4,n}(\alpha)\le \alpha A_{3,n}(\alpha)\le E_n^2(\alpha)\to\infty. \tag{32}$$

Доказательство. При $w_i:=(1+\alpha x_i)^{-2r}$ заметим, что

$$0<q_i:=\frac{\alpha x_i}{1+\alpha x_i}<1 \quad \text{и} \quad Z_k:=\sum_{i\le n}q_i^kw_i\le Z_{k-1} \quad \forall\, k>0. \tag{33}$$

Далее, в силу неравенства Шварца:

$$Z_{k+1}^2=\Big(\sum\nolimits_{i\le n}q_i^k\cdot q_iw_i\Big)^2\le Z_{2k}Z_2 \quad \forall\, k>0. \tag{34}$$

Чтобы теперь из (33) получить (32), а из (34) извлечь (31) нам нужно воспользоваться следующими тождествами:

$$\forall\, k>0 \quad Z_k=\alpha^kA_{k,n}(\alpha) \quad \text{и} \quad Z_2=\alpha^2A_{2,n}(\alpha)=\alpha^2E_n^2(\alpha).$$

Наконец, сходимость $E_n^2(\alpha)\to\infty$ вытекает из условия (9). □

2.5. **Доказательства теорем и их следствий.** Используя обозначения, введенные в (26), (27) и (28), нетрудно заметить, что выражение (25) обращается в

$$\frac{\tilde\alpha_n^{**}(c)-\alpha}{d_n}=\frac{W_n+\rho^*/(2r\sigma)+\rho_0}{1+\rho/(2r^2)}, \quad \rho_0:=M(r)(c+1/2)\frac{\tilde\delta^2A_{3,n}(\alpha)}{2r\sigma E_n(\alpha)}. \tag{35}$$

Таким образом, когда константа c равна $-1/2$, то $\rho_0=0$ и искомая сходимость (22) сразу следует из утверждения Леммы 2 и Леммы 3.

Пусть теперь справедливы только предположения Теоремы 1. Значит, ρ_0 сходится к нулю по вероятности в силу основного предположения этой теоремы. Ещё в этом случае мы можем воспользоваться утверждением из Замечания 2, которое вытекает из уже доказанной Леммы 4. Значит, выполнены и условия Теоремы 2. Поэтому искомая сходимость (22) опять следует из представления (35) и утверждения Леммы 2.

Наконец, оба утверждения Следствия 1 вытекают из неравенств (31).

Таким образом, все основные утверждения работы доказаны, и нам осталось лишь проверить справедливость Леммы 2.

3. Доказательство Леммы 2

3.1. **Детализация основного представления.** Введем обозначения

$$U(t) := \sum_{i\le n} \frac{x_i(1+\alpha x_i)^r}{(1+tx_i)^{1-r}}, \quad V(t) := \sum_{i\le n} \frac{x_i\varepsilon_i}{(1+tx_i)^{1-r}}, \tag{36}$$

$$A(t) := A_{1,n}(t), \quad B(t) := A_{2,n}(t) = E_n^2(t) \quad \text{так что} \quad A'(t) = (2r-1)B(t). \tag{37}$$

Во введённых в (36) и (37) обозначениях, с учетом (4), (5) и (6), немедленно получаются следующие представления для наших производных:

$$H_n^{'}(\tilde\alpha) = 2rA(\tilde\alpha) - 2rU(\tilde\alpha) - 2rV(\tilde\alpha), \tag{38}$$

$$H_n^{''}(\tilde\alpha) = 2r(2r-1)B(\tilde\alpha) - 2rU'(\tilde\alpha) - 2rV'(\tilde\alpha). \tag{39}$$

Для исследования функций из (38) и (39) нам удобно ввести следующие величины:

$$\Delta_A := A(\tilde\alpha) - A(\alpha) - \tilde\delta A'(\alpha) - \tilde\delta^2 A''(\alpha)/2, \quad \Delta_V := V(\tilde\alpha) - V(\alpha), \tag{40}$$
$$\Delta_U := U(\tilde\alpha) - U(\alpha) - \tilde\delta U'(\alpha) - \tilde\delta^2 U''(\alpha)/2, \quad \Delta_u := U'(\tilde\alpha) - U'(\alpha) - \tilde\delta U''(\alpha).$$

Лемма 5. *Справедливы представления*

$$\Delta = 2r[\Delta_A - \Delta_U - r\Delta_E - \Delta_V] \quad \textit{и} \quad \Delta_c = 2r[(2r-1)\Delta_E - \Delta_u - V'(\tilde\alpha)]. \tag{41}$$

Кроме того

$$\Delta_E = B(\tilde\alpha) - B(\alpha) - \tilde\delta B'(\alpha) \quad \textit{и} \quad H_n'(\alpha) = V(\alpha). \tag{42}$$

Доказательство. В определениях из (24) постоянные перед слагаемыми, содержащими множитель $A_{3,n}(\alpha)$, были специально подобраны так, чтобы выполнялись все равенства в (41) и (42). Чтобы убедиться, что эти постоянные вычислены правильно, надо использовать следующие равенства:

$$A(\alpha) = U(\alpha), \quad A'(\alpha) = (2r-1)E_n^2(\alpha), \quad U'(\alpha) = (r-1)E_n^2(\alpha),$$
$$B'(\alpha) = 2(r-1)A_{3,n}, \quad A''(\alpha) = (2r-1)B'(\alpha), \quad U''(\alpha) = (r-1)(r-2)A_{3,n}(\alpha),$$

и $B(\alpha) = E_n^2(\alpha)$. □

3.2. **Использование разложения в ряд Тейлора.** Прежде всего напомним, что при всех действительных p

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(p)x^k \quad \text{при} \quad |x| < 1, \tag{43}$$

где

$$C_0(p) = 1 \quad \text{и} \quad C_k(p) = \frac{p\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k!} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^k}(1+x)^p|_{x=0},\ k = 1, 2\ldots.$$

Причём ряд в (43) абсолютно сходится при $|x| < 1$. В частности, для всех p

$$K_m(p) := \sum_{k=m}^{\infty} |C_k(p)|/2^{k-m} < \infty \qquad \forall m \ge 0. \tag{44}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{1+\tilde\alpha x_i} = \frac{1}{1+\alpha x_i}\cdot\frac{1}{1+\frac{\tilde\alpha x_i - \alpha x_i}{1+\alpha x_i}} = \frac{(1+\delta q_i)^{-1}}{1+\alpha x_i} \quad \text{при} \quad \delta = \frac{\tilde\alpha - \alpha}{\alpha}, \tag{45}$$

где, при $x_i > 0$ и $\alpha > 0$ ввиду Леммы 1

$$0 < q_i = \frac{\alpha x_i}{1+\alpha x_i} < 1, \quad |\delta q_i| < |\delta| \le \frac{\gamma_n}{\alpha} \le \frac{1}{2}. \tag{46}$$

Из (43), (45) и (46) вытекает следующее полезное представление:

$$\sum_{i\le n} \frac{\rho_i}{(1+\tilde\alpha x_i)^p} = \sum_{i\le n} \frac{\rho_i(1+\delta q_i)^{-p}}{(1+\alpha x_i)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(-p)\delta^k \sum_{i\le n} \frac{\rho_i q_i^k}{(1+\alpha x_i)^p}, \tag{47}$$

которое верно для всех $\{\rho_i\}$.

3.3. **Оценивание рядов Тейлора.** При $k \ge 0$ нам потребуются следующие обозначения:

$$Z_k = \sum_{i\le n} \frac{q_i^k}{(1+\alpha x_i)^{-2r}}, \quad Z_k^* = \sum_{i\le n} \frac{x_i^2 \varepsilon_i q_i^k}{(1+\alpha x_i)^{2-r}}. \tag{48}$$

Лемма 6. *В условиях Леммы 1*

$$|\Delta_A| \le K_3(2r-1)\gamma_n^3 A_{4,n}(\alpha), \quad |\Delta_U| \le K_3(r-1)\gamma_n^3 A_{4,n}(\alpha), \tag{49}$$

$$|\Delta_E| \le K_2(2r-2)\gamma_n^2 A_{4,n}(\alpha), \quad |\Delta_u| \le |r-1| K_2(r-2)\gamma_n^2 A_{4,n}(\alpha). \tag{50}$$

Доказательство. Прежде всего мы четыре раза воспользуемся представлением (47) и определениями (40) и (48). Учитывая еще (6) мы при $\rho_i = x_i$ и $p = 1-2r$ получаем

$$\Delta_A = \sum_{k\ge 3} C_k(2r-1)\delta^k \sum_{i\le n} \frac{x_i q_i^k}{(1+\alpha x_i)^{1-2r}} = \sum_{k\ge 3} C_k(2r-1)\delta^k Z_{k+1}/\alpha. \tag{51}$$

А при $\rho_i = x_i(1+\alpha x_i)^r$ и $p = 1-r$ ввиду (36) имеем

$$\Delta_U = \sum_{k\ge 3} C_k(r-1)\delta^k \sum_{i\le n} \frac{x_i(1+\alpha x_i)^r q_i^k}{(1+\alpha x_i)^{1-r}} = \sum_{k\ge 3} C_k(r-1)\delta^k Z_{k+1}/\alpha. \tag{52}$$

Далее, в силу (6) и (37) при $\rho_i = x_i^2$ и $p = 2-2r$ находим:

$$\Delta_E = \sum_{k\ge 2} C_k(2r-2)\delta^k \sum_{i\le n} \frac{x_i^2 q_i^k}{(1+\alpha x_i)^{2-2r}} = \sum_{k\ge 3} C_k(2r-2)\delta^k Z_{k+2}/\alpha^2. \tag{53}$$

Наконец, при $\rho_i = x_i^2(1+\alpha x_i)^r$ и $p = 2-r$ из (36) и (40) получается:

$$\Delta_u = (r-1)\sum_{k\ge 2} C_k(r-2)\delta^k \sum_{i\le n} \frac{x_i^2(1+\alpha x_i)^r q_i^k}{(1+\alpha x_i)^{2-r}} = \sum_{k\ge 3} C_k(r-2)\delta^k Z_{k+2}/\alpha^2. \tag{54}$$

Поскольку $q_i < 1$, то

$$Z_m = \sum_{i\le n} \frac{q_i^m}{(1+\alpha x_i)^{-2r}} \le Z_4 = \alpha^4 A_{4,n}(\alpha) \qquad \forall\, m \ge 4. \tag{55}$$

Следовательно, из (46), (55) и (44) мы находим, что при любом p

$$\Big|\sum_{k\ge 3} C_k(p)\delta^k Z_{k+1}/\alpha\Big| \le \sum_{k\ge 3} |C_k(p)| \frac{\gamma_n^3}{\alpha^3 2^{k-3}} \alpha^4 A_{4,n}/\alpha = \gamma_n^3 K_3(p) A_{4,n}.$$

Подставляя это неравенство в (51) и (52) при $p = 2r-1$ и $p = r-1$ мы получаем обе оценки в (49).

Используя опять (46), (55) и (44), мы при любом p имеем:

$$\Big|\sum_{k\geq 2} C_k(p)\delta^k Z_{k+1}/\alpha^2\Big| \leq \sum_{k\geq 2} |C_k(p)|\frac{\gamma_n^2}{\alpha^2 2^{k-2}}\alpha^4 A_{4,n}/\alpha^2 = \gamma_n^2 K_2(p) A_{4,n}.$$

Подставляя эту оценку в (53) и (54) при $p = 2r-2$ и $p = r-2$ мы находим обе оценки в (50). □

Лемма 7. *В условиях Леммы 1*

$$|V'(\tilde{\alpha})| \leq |r-1|\sum_{k\geq 0}|C_k(r-2)Z_k^*|/2^k. \tag{56}$$

$$|\Delta_V| \leq \gamma_n \sum_{k\geq 1}|C_k(r-1)Z_{k-1}^*|/2^{k-1}. \tag{57}$$

Доказательство. Воспользуемся ещё два раза представлением (47) и определениями (40), (48) и (36). В итоге при $\rho_i = x_i^2\varepsilon_i$ и $p = 2-r$ находим:

(58)

$$V'(\tilde{\alpha}) = (r-1)\sum_{k\geq 0} C_k(r-2)\delta^k \sum_{i\leq n}\frac{x_i^2\varepsilon_i q_i^k}{(1+\alpha x_i)^{2-r}} = (r-1)\sum_{k\geq 0} C_k(r-2)\delta^k Z_k^*.$$

А при $\rho_i = x_i\varepsilon_i$ и $p = 1-r$ получаем:

$$\Delta_V = \sum_{k\geq 1} C_k(r-1)\delta^k \sum_{i\leq n}\frac{x_i\varepsilon_i q_i^k}{(1+\alpha x_i)^{1-r}} = \sum_{k\geq 1} C_k(r-1)\delta^k \alpha Z_{k-1}^*.$$

Далее, используя опять (46), имеем:

$$|\Delta_V| \leq \sum_{k\geq 1}|C_k(r-1)|\frac{\gamma_n}{\alpha 2^{k-1}}\alpha|Z_{k-1}^*|.$$

Таким образом, мы получили (57). Оценка (56) немедленно вытекает из (58), поскольку $|\delta| \leq 1/2$. □

3.4. **Оценки для математических ожиданий.**

Лемма 8. *В условиях Леммы 1*

$$\mathbb{E}|V'(\tilde{\alpha})| \leq |r-1|K_0(r-2)\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)}, \tag{59}$$

$$\mathbb{E}|\Delta_V| \leq K_1(r-1)\gamma_n\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)}. \tag{60}$$

Доказательство. Поскольку $\{\varepsilon_i\}$ — независимы и одинаково распределены и $0 < q_i < 1$, то в силу (8)

$$\mathbb{E}(Z_k^*)^2 = \mathbb{D}Z_k^* = \sigma^2\sum_{i\leq n}\frac{x_i^4 q_i^{2k}}{(1+\alpha x_i)^{4-2r}} < \sigma^2\sum_{i\leq n}\frac{x_i^4}{(1+\alpha x_i)^{4-2r}} = \sigma^2 A_{4,n}(\alpha)$$

при всех $k \geq 0$. Значит,

$$\mathbb{E}|Z_k^*| \leq \sqrt{\mathbb{E}(Z_k^*)^2} \leq \sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)}. \tag{61}$$

Таким образом, из утверждений (56) и (57) Леммы 7 мы получаем, соответственно, что

$$\mathbb{E}|V'(\tilde{\alpha})| \le |r-1| \sum_{k\ge 0} |C_k(r-2)|\mathbb{E}|Z_k^*|/2^k \le |r-1|\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)} \sum_{k\ge 0} |C_k(r-2)|/2^k.$$

$$\mathbb{E}|\Delta_V| \le \gamma_n \sum_{k\ge 1} |C_k(r-1)|\mathbb{E}|Z_{k-1}^*|/2^{k-1} \le \gamma_n\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)} \sum_{k\ge 1} |C_k(r-1)|/2^{k-1}.$$

Эти оценки и (44) дают нам (59) и (60). □

Напомним, что постоянная $M(r)$ определена в (24), а величины γ_n и κ_n введены в Лемме 1.

Лемма 9. *В условиях Леммы 1*

$$\mathbb{E}|\rho^*| \le (1+|c|)M_1(r)\kappa_n + (1+|c|)M_2(r)\sigma\gamma_n/\alpha, \tag{62}$$

$$\alpha\mathbb{E}|\rho| \le (1+|c|)M_1(r)\gamma_n^2/\alpha + |c|M_2(r)\sigma/E_n(\alpha) + |M(r)(c+2)|\gamma_n, \tag{63}$$

где $M_1(r)$ и $M_2(r)$ — зависящие от r константы, явный вид которых будет дан в доказательстве.

Доказательство. Прежде всего заметим, что утверждения Лемм 6 и 8 можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered} |2r\Delta_A| \le M_A(r)\gamma_n^3 A_{4,n}(\alpha), \quad |2r\Delta_U| \le M_U(r)\gamma_n^3 A_{4,n}(\alpha), \\ |2r\Delta_E| \le M_E(r)\gamma_n^2 A_{4,n}(\alpha), \quad |2r\Delta_u| \le M_u(r)\gamma_n^2 A_{4,n}(\alpha), \\ \mathbb{E}|2rV'(\tilde{\alpha})| \le M_v(r)\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)}, \quad \mathbb{E}|2r\Delta_V| \le M_V(r)\gamma_n\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)}. \end{gathered} \tag{64}$$

Введем теперь постоянные

$$\begin{aligned} M_1(r) &:= M_A(r) + M_U(r) + (2|r|+1)M_E(r) + M_u(r), \\ M_2(r) &:= M_V(r) + M_v(r). \end{aligned} \tag{65}$$

Подставляя оценки из (64) в (41) находим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\Delta| &\le \mathbb{E}|2r\Delta_A| + \mathbb{E}|2r\Delta_U| + |r|\mathbb{E}|2r\Delta_E| + \mathbb{E}|2r\Delta_V| \\ &\le M_1(r)\gamma_n^3 A_{4,n}(\alpha) + M_2(r)\gamma_n\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)}. \end{aligned} \tag{66}$$

Аналогично из (41), (64) и (65) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\Delta_c| &\le |2r-1|\mathbb{E}|2r\Delta_E| + \mathbb{E}|2r\Delta_u| + \mathbb{E}|2rV'(\tilde{\alpha})| \\ &\le M_1(r)\gamma_n^2 A_{4,n}(\alpha) + M_2(r)\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)}. \end{aligned} \tag{67}$$

Далее, из (26) нетрудно извлечь оценку

$$E_n^2(\alpha)\mathbb{E}|\rho| \le 2r^2\mathbb{E}|\Delta_E| + |c|\mathbb{E}|\Delta_c| + |M(r)(c+2)|A_{3,n}(\alpha)\mathbb{E}|\tilde{\delta}| \tag{68}$$

А поскольку $|\tilde{\delta}| = |\tilde{\alpha} - \alpha| \le \gamma_n$ в силу Леммы 1, то подставляя (64) и (67) в (68), имеем

$$\begin{aligned} E_n^2(\alpha)\mathbb{E}|\rho| &\le (1+|c|)M_1(r)\gamma_n^2 A_{4,n}(\alpha) + \\ &+ |c|M_2(r)\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)} + |M(r)(c+2)|A_{3,n}(\alpha)\gamma_n. \end{aligned} \tag{69}$$

Аналогично, из (27), (66) и (67) находим

$$
\begin{aligned}
E_n(\alpha)\mathbb{E}|\rho^*| &\le |c|\mathbb{E}|\tilde{\delta}\Delta_c| + \mathbb{E}|\Delta| \le |c|\gamma_n\mathbb{E}|\Delta_c| + \mathbb{E}|\Delta| \\
&\le (1+|c|)M_1(r)\gamma_n^3 A_{4,n}(\alpha) + (1+|c|)M_2(r)\sigma\gamma_n\sqrt{A_{4,n}(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{70}
$$

Поскольку $\alpha A_{3,n}(\alpha) \le E_n^2(\alpha)$ и $\alpha\sqrt{A_{4,n}(\alpha)} \le E_n(\alpha)$ в силу Леммы 4, то из (70) вытекает (62), а из (69) следует (63). □

3.5. **Доказательство Леммы 2.** Поскольку $\gamma_n \to 0$ и $\kappa_n \to 0$ в силу Леммы 1, а $E_n(\alpha) \to \infty$ ввиду Леммы 4, то из Леммы 9 очевидным образом вытекает, что

$$\mathbb{E}|\rho^*| \to 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}|\rho| \to 0.$$

Но из этих фактов, в силу неравенства Чебышёва, немедленно следуют обе сходимости по вероятности в (26) и в (27), что завершает доказательство Леммы 2.

Таким образом, все утверждения работы доказаны полностью.

References

[1] E. Z. Demidenko, *Optimization and Regression*, Moskva: Nauka, 1989. MR1007832

[2] E. N. Savinkina, A. I. Sakhanenko, *Explicit estimators of an unknown parameterin a power regression problem*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 725–733. MR3488452

[3] Yu. Yu. Linke, A. I. Sakhanenko, *Asymptotically normal estimation of a parameter in a linear-fractional regression problem*, Siberian Mathematical Journal, **41**:1 (2000), 125–137. MR1756483

[4] X. V. Yermolenko, A. I. Sakhanenko, *Explicit asymptotically normal estimatorsof an unknown parameter in a partially linear regression problem.*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 719–726. MR3262344

[5] A. A. Kalenchuk, A. I. Sakhanenko, *The existence of explicit asymptoticallynormal estimators of an unknown parameter in a logarithmic regression problem*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 874–883. MR3493805

[6] R. A. Fisher, *Theory of statistical estimation*, Proc. Camb. Phil. Soc., **22** (1925), 700–725. JFM 51.0385.01

[7] Sh. Zacks, *The theory of statistical inference*, Moskva: Mir, 1975. MR0420924

[8] Yu. Yu. Linke, A. I. Sakhanenko, *Asymptotically normal estimation in the linear-fractional regression problem with random errors in coefficients*, Siberian Mathematical Journal, **49**:3 (2008), 474–497. MR2442541

Ekaterina Nikolaevna Savinkina
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: savinkinae@gmail.com

Alexander Ivanovich Sakhanenko
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: aisakh@mail.ru