

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1913–1915 (2019)

УДК 512.552.13

DOI 10.33048/semi.2019.16.136

MSC 16X99

ИСПРАВЛЕНИЕ К СТАТЬЕ:
МИНИМАЛЬНО ПОЛНЫЕ АССОЦИАТИВНЫЕ
АРТИНОВЫ КОЛЬЦА

Т. В. ПАВЛОВА

ABSTRACT. We report an error that was made in the article T.V. Pavlova, Minimally complete associative Artinian rings, DOI 10.17377/semi.2017.14.105.

Keywords: associative ring, Artinian ring, minimally complete ring.

Сообщаю, что в моей статье [1] «Минимально полные ассоциативные артиновы кольца», опубликованной в Сибирских электронных математических известиях, т. 14 (2017), теорема 4, являющаяся основным результатом работы [2], содержит ошибку. Это было объявлено ранее в [3]. Правильная формулировка теоремы 4 такова:

Теорема 4. 1) Минимально полные нильпотентные кольца исчерпываются кольцом \mathbb{Q}^0 и кольцами $C_{p^\infty}^0$ по всем простым p .
2) Простое кольцо с единицей является минимально полным тогда и только тогда, когда оно изоморфно либо полю \mathbb{Q} рациональных чисел, либо конечному полю F_{p^q} для некоторых простых чисел p и q .
3) Конечное кольцо R является минимально полным тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим квадратом, его аддитивная группа R^+ является p -группой для некоторого простого числа p , $J(R) = pR$ и $R/pR \cong F_{p^q}$, где q простое число.

Это оказывает следующее влияние на содержание работы [1]. Формулировка и доказательство леммы 13 остаются без изменений. Для леммы 14 и теоремы 5 (основного результата статьи [1]), формулировки и доказательства принимают следующий вид.

PAVLOVA, T.V., CORRIGENDUM: MINIMALLY COMPLETE ASSOCIATIVE ARTINIAN RINGS.

© 2019 ПАВЛОВА Т.В.

Поступила 26 марта 2019 г., опубликована 13 декабря 2019 г.

Лемма 14. Минимально полные кольца матриц $M_m(GR(p^n, k))$ над кольцами Галуа исчерпываются кольцами $GR(p^n, q)$, где p и q простые числа, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Ясно, что для всякого кольца Галуа $GR(p^n, k)$ факторкольцо $GR(p^n, k)/pGR(p^n, k) \cong GR(p, k) = F_{p^k}$. Пусть $R = M_m(GR(p^n, k))$ — минимально полное кольцо матриц порядка m над кольцом Галуа. Хорошо известно, что для любого идеала I кольца R , $M_m(R)/M_m(I) \cong M_m(R/I)$, тогда кольцо $R/pR \cong M_m(GR(p^n, k))/M_m(pGR(p^n, k)) \cong M_m(GR(p, k)) = M_m(F_{p^k})$. Из п. 3 теоремы 4 следует, что $R/pR \cong M_m(F_{p^q})$ изоморфно F_{p^q} , где p и q простые числа. Из изоморфизма $R/pR \cong F_{p^q} = GR(p, q)$ следует, что $R \cong GR(p^n, q)$. \square

Теорема 5. Ассоциативное артиново кольцо является минимально полным тогда и только тогда, когда изоморфно одному из следующих колец:

- 1) кольцу с нулевым умножением $C_{p^\infty}^0$ для некоторого простого числа p ;
- 2) полю рациональных чисел \mathbb{Q} ;
- 3) кольцу Галуа $GR(p^n, q)$, для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и простых чисел p и q .

Доказательство. Пусть R — минимально полное артиново кольцо. Если R является кольцом с нулевым умножением, то оно будет полным тогда и только тогда, когда его аддитивная группа R^+ является полной (см. лемму 5 в [23]). Если $R^2 \neq (0)$, то из леммы 3 следует, что $R^2 = R$. Согласно лемме 1, наибольшая полная подгруппа I аддитивной группы кольца R^+ есть идеал кольца. То есть I — полное подкольцо кольца R . В силу минимальной полноты R , либо $I = R$, то есть группа R^+ полная, либо R^+ не содержит ненулевых полных подгрупп. По теореме 1, в этом случае $R^+ \cong \bigoplus_{p_j} Z_{p_j}^{k_j}$, причем $p_j^{k_j} | m$, где m — фиксированное целое число, т. е. $mR = (0)$. При этом, по теореме 2, R^+ есть прямая сумма своих примарных компонент, являющихся идеалами кольца R .

Таким образом, учитывая, что прямая сумма колец является полным кольцом тогда и только тогда, когда каждое слагаемое есть полное кольцо, получаем, что для минимально полного артинова кольца R возможны только следующие случаи:

- (i) $R^2 = (0)$ и R^+ — полная группа.
- (ii) $R^2 = R$ и R^+ — полная группа.
- (iii) $R^2 = R$ и $p^k R = (0)$ для некоторого простого числа p и $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим эти случаи.

(i) Пусть $R^2 = (0)$ и R^+ — полная группа. Минимально полные кольца с нулевым умножением описаны в п. 1 теоремы 4, это кольца \mathbb{Q}^0 и $C_{p^\infty}^0$ по всем простым p . Любая подгруппа этих колец — идеал в кольце и, следовательно, кольцо \mathbb{Q}^0 артиновым не является, так как не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Получаем, что в этом случае $R = C_{p^\infty}^0$ для некоторого простого p , т. е. выполнено условие 1) теоремы 5.

(ii) Пусть $R^2 = R$ и R^+ — полная группа. По лемме 7, R^+ — полная группа без кручения. Тогда по лемме 8, группа $J(R)^+$ также полная, т. е. $J(R)$ будет полным кольцом. Кольцо R — минимально полное и ненильпотентное по предположению. Следовательно, $J(R) = (0)$, т. е. R — полупростое артиново кольцо с аддитивной группой без кручения. Согласно известной теореме Веддербёрна-Артина, полупростое артиново кольцо есть конечная прямая сумма простых артиновых колец, каждое из которых изоморфно кольцу всех матриц некоторого порядка над некоторым телом, поэтому содержит единицу.

В силу минимальной полноты кольца R , из п. 2 теоремы 4 заключаем, что R изоморфно полю \mathbb{Q} рациональных чисел, т. е. выполнено условие 2) теоремы 5.

(iii) Пусть $R^2 = R$ и $p^k R = (0)$ для некоторого простого p и $k \in \mathbb{N}$. По следствию 2, факторкольцо $R/J(R)$ также является минимально полным кольцом, артиновым как гомоморфный образ артинова кольца R . Из минимальной полноты кольца $R/J(R)$ и теоремы Веддербёрна-Артина, аналогично (ii) заключаем, что $R/J(R)$ — минимально полное простое кольцо с единицей, по п. 2 теоремы 4 изоморфное F_{p^a} . То есть $R/J(R)$ является конечным кольцом. Тогда, как следует из леммы 12, само артиново кольцо R также будет конечным кольцом. По лемме 13, кольцо R является кольцом с единицей. Из теоремы Уилсона о конечных кольцах (см. [13], с. 322, Предложение 6) следует, что R содержит подкольцо K , изоморфное прямой сумме колец матриц над кольцами Галуа, причем $K/pK \cong R/J(R)$. Так как кольцо $R/J(R)$ полное, а $K^2 = K$, то K — полное кольцо тогда и только тогда, когда факторкольцо K/pK полное по лемме 6. Получаем, K является полным подкольцом кольца R и поэтому $K = R$ в силу минимальной полноты R . Прямая сумма колец является полным кольцом только в том случае, когда каждое слагаемое есть полное кольцо, поэтому R изоморфно кольцу матриц над кольцом Галуа. Минимально полные кольца матриц над кольцами Галуа описаны в лемме 14 — это кольца $GR(p^n, q)$ по всем натуральным n и простым числам p и q . Этим доказано условие 3) теоремы 5.

Таким образом, кольцами, указанными в формулировке теоремы, исчерпываются все артиновы минимально полные кольца. \square

REFERENCES

- [1] T. V. Pavlova, *Minimally complete associative Artinian rings*, Siberian Electr. Math. Reports, **14** (2017), 1238–1247 (in Russian). Zbl 1391.16022
- [2] L. M. Martynov, T. V. Pavlova *On minimally complete associative rings*, Herald of Omsk University, **1** (2016), 6–13 (in Russian).
- [3] L. M. Martynov, T. V. Pavlova *Letter in edition*, Herald of Omsk University, **2** (2019), 23–24 (in Russian).

TATIANA VENIAMINOVNA PAVLOVA
 TYUMEN STATE UNIVERSITY,
 6, VOLODARSKOGO ST.,
 TYUMEN, 625003, RUSSIAN FEDERATION
E-mail address: pavlova-t-v@bk.ru