S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1916–1926 (2019) УДК 519.6

DOI 10.33048/semi.2019.16.137 MSC 65F15, 41A30

О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ М. ОСБОРНА С ОБРАТНЫМИ ИТЕРАЦИЯМИ В МОДИФИЦИРОВАННОМ МЕТОДЕ ПРОНИ

А.А. ЛОМОВ

Abstract. A convergence of two inverse iteration algorithms of M. Osborne in the nonlinear eigenvalue problem of modified Prony method under small perturbations is investigated.

Keywords: difference equations, parameter identification, modified Prony method, nonlinear eigenvalue problem, inverse iteration, semilocal convergence.

1. Введение

В настоящей статье исследуется сходимость вычислительных алгоритмов модифицированного метода Прони [1, 2] для извлечения синусоид и экспонент из наблюдений экспериментальных зависимостей [3]. Краткая предыстория вопроса изложена в [4]. По существу речь идет о задаче аппроксимации сеточной функции $x \in \mathbb{R}^N$ решениями $z \doteq [z[1]; \ldots ; z[N]] \in \mathbb{R}^N$ однородного разностного уравнения с вещественными коэффициентами

$$\gamma_0 z[k] + \gamma_1 z[k+1] + \ldots + \gamma_n z[k+n] = 0, \quad k \in \overline{1, N-n}. \tag{1}$$

Требуется подобрать начальные условия $z[1], \ldots, z[n]$ и коэффициенты γ_0, …, γ_{n-1} с целью минимизации целевой функции

$$J = \|x - z\|^2 = (x - z)^{\mathrm{T}} (x - z) \to \min \tag{2}$$

при условии (1). Известно, что данная задача плохо обусловлена [5, 6], и для применения универсальных градиентных или квазиньютоновских алгоритмов

Lomov, A.A., On convergence of M. Osborne' inverse iteration algorithms for modified Prony method.

Работа поддержана РФФИ (грант 19-01-00754).

Поступила 8 июля 2019 г., опубликована 17 декабря 2019 г.

требуется знание хорошего начального приближения по γ_i. Вычислительные решения с большими радиусами и скоростью сходимости [1, 6, 7] впервые были найдены М. Осборном [8, 9] и А. О. Егоршиным [10, 11] с применением обратных итераций для нахождения собственного вектора с минимальным по модулю собственным значением специальной матрицы в выражении для целевой функции J или для градиента J'_γ (раздел 2). Данный подход получил название модифицированного метода Прони [1] или вариационного метода идентификации [11].

В обзоре [6] отмечена недостаточная изученность алгоритмов с обратными итерациями в нелинейной задаче на собственные значения, связанной с модифицированным методом Прони. В [1] была доказана локальная сходимость второго алгоритма М. Осборна [8] через выполнение условия сжатия в точке минимума. В [7] обсуждалась скорость сходимости обратных итераций в нелинейной задаче на собственные значения в окрестности минимума. В [4] в предположении малости возмущений установлены глобальная сходимость первого алгоритма М. Осборна [9] к неподвижной точке и положение неподвижной точки в малой окрестности минимума.

В настоящей статье исследуется полулокальная сходимость второго алгоритма М. Осборна [8]. В отличие от локальной сходимости, полулокальная означает выполнение условий сжатия итерирующего отображения в каждой точке некоторой окрестности минимума.

2. Два алгоритма М. Осборна

В матричных обозначениях [4] уравнение (1) имеет вид

$$G^{\mathrm{T}} z = 0, \tag{3}$$

$$G^{\mathrm{T}} \doteq \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & 1 & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \doteq \backslash\gamma^{\mathrm{T}}\backslash \in \mathbb{R}^{(N-n)\times N}.$$

После минимизации (2) по z при условии (1) приходим к выражению

$$J = J(\gamma) = \gamma^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} C V \gamma, \quad C \doteq (G^{\mathrm{T}} G)^{-1} \in \mathbb{R}^{(N-n)\times(N-n)}, \tag{4}$$

$$\gamma \doteq [\gamma_0; \dots; \gamma_{n-1}; 1] \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$V \doteq \begin{bmatrix} x[1] & x[2] & \dots & x[n+1] \\ x[2] & x[3] & \dots & x[n+2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x[N-n] & x[N-n+1] & \dots & x[N] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-n)\times N}. \tag{5}$$

В [9] М. Осборн предложил алгоритм приближенной минимизации $J(\gamma)$ (4). После попадания в малую окрестность минимума в результате итераций этого алгоритма появляется возможность нахождения минимума универсальным итерациями типа Ньютона. Матрица $Q \doteq V^{\mathrm{T}} C V$ неотрицательно определена. Пусть $\lambda_1(Q) \geqslant 0$ и $p_1(Q)$ — наименьшее собственное значение и соответствующий собственный вектор Q, и наблюдения x таковы, что число $\lambda_1(Q)$ некратное. Алгоритм М. Осборна [9] имеет вид

$$\gamma_{[k+1]} = p_1\left(Q(\gamma_{[k]})\right), \quad k \geqslant 0. \tag{6}$$

Вычислительные эксперименты показывают [2], что итерации (6) малочувствительны к выбору $\gamma_{[0]}$ и имеют предельную точку в малой окрестности минимума J (4). В [4] в предположении малости нормы возмущений $\min_{z:(1)} \|x-z\|$ предложены доказательства этих экспериментально обнаруженных свойств.

Для исследования второго алгоритма М. Осборна [8] далее понадобятся формулировки трех теорем из [4]. Принято, что нормы матриц $\|A\| \doteq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ согласованы с евклидовой нормой $\|x\| \doteq \sqrt{x^{\mathrm{T}}x}$. Пусть наблюдения $x = z_* + \eta$ порождены добавлением возмущения η к «истинному» процессу z_*, $G^{\mathrm{T}}(\gamma_*)z_* = 0$.

Теорема 1. *Пусть в области Γ, содержащей истинную точку γ_* и точки $\gamma_{[k]}$, $k \geqslant k_*$ при некотором $k_* \geqslant 0$, выполнено условие на малость $\lambda_1(Q)$ и тем самым на малость нормы возмущения $\|x - z_*\|$:*

$$\frac{2n \cdot \sqrt{\lambda_1} \cdot \|C\| \cdot \|V\|}{\lambda_2 - \lambda_1} < 1. \tag{7}$$

Тогда отображение $\gamma_{[k]} \to \gamma_{[k+1]}$, при $k \geqslant k_*$ в итерации (6) является сжимающим, следовательно, имеет единственную неподвижную точку в Γ.

Следствие 1. *Пусть в области Γ выполнено $\|C\| \leqslant a$, $\|V\| \leqslant b$. Тогда для сжатия в отображении $\gamma_{[k]} \to \gamma_{[k+1]}$ (6) достаточно условия*

$$\sqrt{\lambda_1} < \sqrt{\varrho^2 + \lambda_2} - \varrho, \quad \varrho \doteq nab.$$

Теорема 2. *Все элементы $\gamma_{[k]}$ в итерациях (6) при $k \geqslant k_* = 1$ остаются в следующей окрестности истинной точки γ_*:*

$$\begin{aligned}\frac{\|\gamma_{[k]} - \gamma_*\|}{\|\gamma_*\|} &\leqslant \frac{\alpha' \cdot \|C_*\| \cdot \|V_*\|^2}{\lambda_{2*}}\,\tilde{\varepsilon} + O(\tilde{\varepsilon}^2) \leqslant \\ &\leqslant \frac{\alpha \cdot \|C_*\| \cdot \|V_*\|^2}{\lambda_{2*}}\,\tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} \doteq \frac{\varepsilon}{\|V_*\|} \doteq \frac{\|V - V_*\|}{\|V_*\|} = \frac{\|V(x - z_*)\|}{\|V(z_*)\|}.\end{aligned} \tag{8}$$

Константа α' определена условием $\|C_{[k]}\| \leqslant \alpha'\|C_*\|$, $k \geqslant 0$, которое можно рассматривать как ограничение на начальное значение $\gamma_{[0]}$, а константа $\alpha > \alpha'$ определяется условием мажорирования слагаемых $O(\varepsilon^2)$ в (8).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$\varepsilon < \frac{1}{5n\|C_*\|^{1/2}} \cdot \frac{\lambda_2}{\alpha\,\|C_*\| \cdot \|V_*\| \cdot \|\gamma_*\|} \quad \text{и} \quad \varepsilon < \|V_*\|.$$

Тогда следующее неравенство является достаточным для выполнения условия теоремы 1 в области (8):

$$\varepsilon < \frac{\varepsilon_*}{f_1^{1/2}}, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_* \doteq \frac{\sqrt{\omega^2+\lambda_2}-\omega}{\sqrt{2\,\|C_*\|}}, \quad \omega \doteq 4n\,\|C_*\|\cdot\|V_*\|,\\
&f_1 \doteq \alpha_0+\alpha_1\|V_*\|+\alpha_2\|V_*\|^2,\\
&\alpha_0 \doteq 1+\frac{2n\left(\sqrt{\lambda_2}\,\|C_*\|^{1/2}+\|C_*\|\cdot\|V_*\|\right)}{\lambda_2}\cdot\|V_*\|,\\
&\alpha_1 \doteq \frac{2n\left(\sqrt{\lambda_2}\,\|C_*\|^{1/2}+3\,\|C_*\|\cdot\|V_*\|\right)}{\lambda_2}, \quad \alpha_2 \doteq \frac{4n\|C_*\|}{\lambda_2}.
\end{aligned}$$

Доказательства теорем 1–3 и следствия 1 даны в [4].

Второй алгоритм М. Осборна [8] в отличие от (6) находит точный минимум (4). Для описания алгоритма определим постоянные матрицы частных производных $E_i \doteq \frac{\partial G}{\partial \gamma_i}$. Верны равенства

$$G = E_0\gamma_0+\ldots+E_n\gamma_n, \quad E_{i-1}^{\mathrm{T}}x = V_i, \quad i\in\overline{1,n+1},$$

где V_i — i-й столбец матрицы V. Производная целевой функции:

$$J_i' \doteq \frac{\partial J}{\partial\gamma_i} = 2x^{\mathrm{T}}E_iCG^{\mathrm{T}}x - 2x^{\mathrm{T}}GCG^{\mathrm{T}}E_iCG^{\mathrm{T}}x \doteq 2\sum_j B_{ij}\gamma_j,$$

$$\begin{aligned}
B_{ij} &\doteq x^{\mathrm{T}}\left(E_iCE_j^{\mathrm{T}} - GCE_j^{\mathrm{T}}E_iCG^{\mathrm{T}}\right)x = \\
&= V_i^{\mathrm{T}}CV_j - x^{\mathrm{T}}GCE_i^{\mathrm{T}}E_jCG^{\mathrm{T}}x.
\end{aligned} \tag{9}$$

В матричной записи

$$J' = 2B(\gamma)\gamma = 2\left(Q-L^{\mathrm{T}}L\right)\gamma, \tag{10}$$

где $B(\gamma)\doteq\|B_{ij}\|$ — симметричная матрица,

$$L\doteq\begin{bmatrix}L_1 & \ldots & L_{n+1}\end{bmatrix}, \quad L_i \doteq E_iCG^{\mathrm{T}}x.$$

Матрица L тёплицева:

$$L^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} l_1 & \ldots & l_{N-n} & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & l_1 & \ldots & l_{N-n}\end{bmatrix} \doteq \backslash l^{\mathrm{T}}\backslash \in \mathbb{R}^{(n+1)\times N}. \tag{11}$$

Здесь $l \doteq [l_1;\ldots;l_{N-n}] = CG^{\mathrm{T}}x = CV\gamma$ — вектор множителей Лагранжа в задаче (2) (см. [8, 12]).

Обозначим $p_0(B)$ собственный вектор матрицы $B(\gamma)$, соответствующий собственному числу с наименьшим модулем. Второй алгоритм М. Осборна [8, (5.4)], [1, (15)] состоит в итерациях

$$\gamma_{[k+1]} = p_0\left(B(\gamma_{[k]})\right), \quad k\geqslant 0. \tag{12}$$

Несложно убедиться, что критические точки $J'=0$ являются неподвижными точками алгоритма (12).

3. Полулокальная сходимость алгоритма (12)

В предельном случае $\eta\to 0$ матрица $B(\gamma)$ (10) принимает значение

$$\begin{aligned}
B(\gamma) \to & B_*(\gamma) \doteq V_*^{\mathrm{T}}CV_* - L_*^{\mathrm{T}}L_*,\\
& L_* = \backslash l_*^{\mathrm{T}}\backslash\,, \quad l_* = CV_*\gamma = l_*(\gamma).
\end{aligned}$$

Исследование глобальной сходимости (12) затруднено сложной структурой матрицы $L_*^{\mathrm{T}} L_*$ и неясным поведением собственного вектора $p_0(B_*)$ как функции γ. Тем не менее, в малой окрестности γ_* вектор множителей Лагранжа l_* близок к нулю, и можно получить условие на сжатие отображения $\gamma_{[k]} \to \gamma_{[k+1]}$ (12). Применение теории возмущений позволяет описать окрестность гарантированной сходимости алгоритма с точностью до слагаемых $O(\varepsilon^2)$. В [1] через исследование спектрального радиуса матрицы производной Фреше $\dot{F}(\gamma_{\mathrm{c}}) \doteq \frac{\mathrm{d}\gamma_{[k+1]}}{\mathrm{d}\gamma_{[k]}}(\gamma_{\mathrm{c}})$ было доказано, что алгоритм (12) устойчив в неподвижных точках γ_{c}, $J'(\gamma_{\mathrm{c}}) = 0$. Здесь мы найдем окрестность, в которой спектральный радиус $\rho(\dot{F}(\gamma))$ удовлетворяет условию сжатия $\rho < 1$. В этом смысле говорится о полулокальной сходимости.

Будем считать, что вектор $\gamma_{[k]}$ получен после итерации (6), и согласно теореме 2 находится в окрестности $\varDelta_*$ истинного значения γ_*:

$$\gamma_{[k]} \in \varDelta_* \doteq \{\gamma : \ \|\gamma - \gamma_*\| \leqslant c_* \varepsilon\}, \quad c_* = \frac{\alpha \cdot \|C_*\| \cdot \|V_*\| \cdot \|\gamma_*\|}{\lambda_{2*}}. \tag{13}$$

Теорема 4. *Пусть в произвольной точке $\gamma \in \varDelta_*$ выполнено следующее условие на малость λ_1 и тем самым на малость нормы возмущения $\varepsilon = \|V - V_*\|$:*

$$\frac{2\,\|C\| \cdot \|V\|}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left[n\sqrt{\lambda_1} + c_2\, \varepsilon \right] < 1, \tag{14}$$
$$c_2 \doteq (N - n) \left(\frac{\alpha\,\|C\| \cdot \|V\|^2}{\lambda_2} + 1 \right) \cdot \|C\| \cdot \|\gamma\|,$$

где λ_i, $i \in \overline{1, n+1}$, — собственные числа матрицы Q (9), (10), *упорядоченные по возрастанию. Тогда для любого $\gamma_{[k]} \in \varDelta_*$ отображение $\gamma_{[k]} \to \gamma_{[k+1]}$ в итерации* (12) *является сжимающим.*

Следствие 2. *В условиях теоремы 4 в области $\varDelta_*$* (13) *верны следующие утверждения*:

(а) *целевая функция J* (2) *имеет критическую точку $J'(\gamma_{\mathrm{c}}) = 0$;*
(б) *критическая точка γ_{c} единственная;*
(в) *γ_{c} есть точка минимума;*
(г) *итерации* (12) *сходятся к γ_{c}.*

Доказательство следствия. Пункты (б) и (г) следуют из принципа сжимающих отображений и того факта, что γ_{c} есть неподвижная точка итераций (12). Пункт (в) следует из оценки строгой положительной определенности матрицы вторых производных $J'' > 0$ в окрестности точки γ_* при малых возмущениях $\varepsilon \to 0$ [1, 13]. Остается доказать пункт (а), который по сути означает, что итерации (12) не выходят из области $\varDelta_*$.

Пусть для итераций (12) $\gamma_{[k]} \in \varDelta_*$. Тогда в (10) $L(\gamma_{[k]}) \sim O(\varepsilon)$ и $\|L^{\mathrm{T}} L\| \sim O(\varepsilon^2)$, и можно рассматривать матрицу $B(\gamma)$ как $Q(\gamma)$ с малым возмущением $L^{\mathrm{T}} L$. По теории возмущений [4, (16)] норма отличия $\mathrm{d}\gamma_{[k+1]}$ результата итерации (12) от итерации (6) имеет второй порядок малости по ε:

$$\|\mathrm{d}\gamma_{[k+1]}\| \leqslant \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \|L^{\mathrm{T}} L \cdot p_1\| + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2). \tag{15}$$

Поскольку итерации (6) с точностью до слагаемых $O(\varepsilon^2)$ остаются в области $\varDelta_*$ (теорема 2), то же имеет место и для итераций (12). Следствие доказано.

Следствие 3. *Пусть в окрестности* $\varDelta_*$ (13) *выполнено* (14). *Тогда для любого начального значения* $\gamma_{[0]}$ *с условием* $\|C_{[0]}\| \leqslant \alpha\|C_*\|$ *последовательное применение одного шага алгоритма* (6) *и затем итераций* (12) *приводит к точке* $\gamma_{\mathrm{c}} \in \varDelta_*$ *локального минимума целевой функции* J (1), *и эта точка единственная в окрестности* $\varDelta_*$ (13) *истинного значения* γ_*.

Доказательство. По теореме 2 после одного шага алгоритма (6) попадаем в окрестность $\gamma_{[1]} \in \varDelta_*$. Далее теорема 4 и следствие 2. □

В заключение сформулируем утверждение об условиях сжатия итераций (12) в области $\varDelta_*$ (13), аналогичное теореме 3 для итераций (6).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия и обозначения теоремы 3 и дополнительно* $\varepsilon < \frac{\lambda_2}{c_3}$, $c_3 \doteq \frac{2\omega}{n} c_2$, *где константа* c_2 *определена в* (14). *Тогда следующее неравенство является достаточным для выполнения условия теоремы 4 в области* $\varDelta_*$ (13):

$$\varepsilon < \frac{\varepsilon_*}{f_1^{1/2} + \left(\frac{2\omega c_2}{n\lambda_2}\right)\varepsilon_*}.$$

4. Доказательство теорем 4, 5

Доказательство теоремы 4. Применим теорию возмущений [4, (16)] к собственному вектору $p_0(B_{[k]})$:

$$\|\mathrm{d}\gamma_{[k+1]}\| = \|\mathrm{d}p_0(B_{[k]})\| \leqslant \frac{\left\|\mathrm{d}B_{[k]}\cdot p_0\right\|}{\min_{i\in\overline{1,n}}|\lambda_i(B)-\lambda_0(B)|} + O(\varepsilon^2). \tag{16}$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1 в [4], построим оценку для нормы в правой части (16) в виде

$$\left\|\mathrm{d}B_{[k]}\cdot p_0\right\| \leqslant c(\varepsilon)\cdot\|\mathrm{d}\gamma_{[k]}\| + O(\varepsilon^2), \quad c(\varepsilon) = O(\varepsilon). \tag{17}$$

Отсюда будет следовать искомое условие на ε для выполнения условия сжатия $\|\mathrm{d}\gamma_{[k+1]}\| < \|\mathrm{d}\gamma_{[k]}\|$. Нужно найти $c(\varepsilon)$.

Из (15) имеем $p_0(B_{[k]}) = p_1(Q_{[k]}) + O(\varepsilon^2)$. Тогда с учетом оценок

$$\|\mathrm{d}p_1\| \leqslant \frac{\|\mathrm{d}Q\cdot p_1\|}{\lambda_2-\lambda_1} + O(\varepsilon^2),$$
$$\|\mathrm{d}Q\cdot p_1\| \leqslant 2\sqrt{\lambda_1}\,\|C\|\cdot\|V\|\cdot\|\mathrm{d}G\|, \quad \|\mathrm{d}G\| \leqslant n\cdot\|\mathrm{d}\gamma\|$$

(см. [4, (16), (19)] и (24) в приложении) имеем

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{d}B_{[k]}\cdot p_0\right\| &\leqslant \|V^{\mathrm{T}}C\,(\mathrm{d}G^{\mathrm{T}}\cdot G + G^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}G)\,CVp_1\| + 2\,\|L\|\cdot\|\mathrm{d}L\| \leqslant \\ &\leqslant 2\sqrt{\lambda_1}\,\|C\|\cdot\|V\|\cdot n\cdot\|\mathrm{d}\gamma_{[k]}\| + 2\,\|L\|\cdot\|\mathrm{d}L\|.\end{aligned} \tag{18}$$

Из определения $L = \backslash CV\gamma\backslash$ (11) по аналогии с (24) получаем

$$\|L\| \leqslant (N-n)\cdot\|CV\gamma\|,$$

откуда следует

$$\|L\| \leqslant (N-n)\cdot(\|C\,(V-V_*)\,\gamma\| + \|CV\|\cdot\|\gamma-\gamma_*\|) + O(\varepsilon^2)$$

и с учетом (13)

$$\|L\| \leqslant (N-n)\cdot(\|C\|\cdot\|\gamma_*\|\cdot\varepsilon + \|C\|\cdot\|V\|\cdot c_*\varepsilon) + O(\varepsilon^2). \tag{19}$$

Наконец,

$$\mathrm{d}L = \mathrm{d}C \cdot V\gamma + CV\mathrm{d}\gamma = CV\mathrm{d}\gamma + O(\varepsilon). \tag{20}$$

Собирая оценки (16), (18), (19), (20), приходим к условию сжатия для отображения (12):

$$\frac{2\,\|C\|\cdot\|V\|}{\min_{i\in\overline{1,n}}|\lambda_i(B)-\lambda_0(B)|}\cdot\left[n\sqrt{\lambda_1(Q)}+c_2\,\varepsilon\right]<1,$$

$$c_2=(N-n)\cdot\|C\|\cdot\left(\|\gamma_*\|+\|V\|\cdot c_*\right),$$

$$c_*=\frac{\alpha\,\|C_*\|\cdot\|V_*\|\cdot\|\gamma_*\|}{\lambda_2(Q_*)}.$$

Теперь заметим, что вместо норм $\|C\|$, $\|C_*\|$, $\|V\|$, $\|V_*\|$, $\|\gamma_*\|$ и собственных чисел $\lambda_1(Q)$, $\lambda_2(Q_*)$, $\lambda_i(B)$ можно использовать нормы и собственные числа, вычисленные в любой точке $\gamma\in\mathit{\Delta}_*$, поскольку из соображений непрерывности указанные замены приведут к изменениям второго порядка малости $O(\varepsilon^2)$. Так же вместо $\lambda_i(B)$ можно использовать $\lambda_{i+1}(Q)$. В результате условие сжатия принимает вид

$$\frac{2\,\|C\|\cdot\|V\|}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\left[n\sqrt{\lambda_1}+c_2\,\varepsilon\right]<1,$$

$$c_2\doteq(N-n)\left(\frac{\alpha\,\|C\|\cdot\|V\|^2}{\lambda_2}+1\right)\cdot\|C\|\cdot\|\gamma\|.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5. Нам понадобятся формулировки двух лемм из [4].

Лемма 1. *При условии* $\|\Delta\gamma\|\leqslant\frac{1}{5n\,\|C_*\|^{1/2}}$ *верно* $\|\Delta C\|\leqslant 5n\,\|C_*\|^{3/2}\|\Delta\gamma\|\leqslant\|C_*\|$.

Лемма 2. *Пусть* $V=V_*+E$, $\varepsilon\doteq\|E\|$, *и в* (8) $\|C\|\leqslant\|C_*\|+\|\Delta C\|$. *Тогда в области* (8) *верна оценка*

$$\lambda_1\leqslant\left[1+\frac{2n\left[\sqrt{\lambda_2}\|C_*\|^{1/2}+\|\Delta C\|\cdot\|V_*\|+\left(\|C_*\|+\|\Delta C\|\right)\varepsilon\right]\left(\|V_*\|+\varepsilon\right)}{\lambda_2}\right]\times$$
$$\times\left(\|C_*\|+\|\Delta C\|\right)\varepsilon^2.$$

Далее повторим рассуждения из доказательства теоремы 3 в [4], заменив (7) на более сильное условие (14). Неравенство (14) отличается от (7) слагаемым $c_2\varepsilon$. По следствию 1 с учетом леммы 1 для сжатия достаточно неравенства

$$\lambda_1<\left(\sqrt{\omega^2+(\lambda_2-c_3\varepsilon)}-\omega\right)^2,\quad c_3\doteq\frac{2\omega c_2}{n},\quad \omega\doteq 4n\,\|C\|\cdot\|V\|.$$

Применив лемму 2, получим достаточное условие в виде

$$\left(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon+\alpha_2\varepsilon^2\right)\varepsilon^2<\frac{\omega^2}{2\|C_*\|}\left(\sqrt{1+\frac{(\lambda_2-c_3\varepsilon)}{\omega^2}}-1\right)^2, \tag{21}$$

$$\alpha_0 \doteq 1 + \frac{2n\left(\sqrt{\lambda_2}\,\|C_*\|^{1/2} + \|C_*\|\cdot\|V_*\|\right)\|V_*\|}{\lambda_2},$$
$$\alpha_1 \doteq \frac{2n\left(\sqrt{\lambda_2}\,\|C_*\|^{1/2} + 3\|C_*\|\cdot\|V_*\|\right)}{\lambda_2}, \quad \alpha_2 \doteq \frac{4n\|C_*\|}{\lambda_2}.$$

Последнее является видоизменением неравенства (36) в [4].

Для переменной x в интервале $x \in [0,\alpha]$ верна оценка

$$\left(\frac{\sqrt{1+\alpha}-1}{\alpha}\right)^2 x^2 \leqslant \left(\sqrt{1+x}-1\right)^2.$$

Тогда с обозначениями $x \doteq \frac{(\lambda_2 - c_3\varepsilon)}{\omega^2}$, $\alpha \doteq \frac{\lambda_2}{\omega^2}$ от (21) приходим к условию

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2\right)\varepsilon^2 < \frac{\omega^2}{2\|C\|}\left(\frac{\sqrt{1+\alpha}-1}{\alpha}\right)^2 \frac{(\lambda_2 - c_3\varepsilon)^2}{\omega^4} \doteq$$
$$\doteq A\left(\lambda_2 - c_3\varepsilon\right)^2.$$

Последнее на интервале $\varepsilon \in [0,\|V_*\|]$ следует из неравенства

$$\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\|V_*\| + \alpha_2\|V_*\|^2}\,\varepsilon \doteq f_1^{1/2}\varepsilon < A^{1/2}\left(\lambda_2 - c_3\varepsilon\right),$$
$$f_1 \doteq \alpha_0 + \alpha_1\|V_*\| + \alpha_2\|V_*\|^2,$$

которое есть

$$\varepsilon < \frac{A^{1/2}\lambda_2}{f_1^{1/2} + A^{1/2}c_3} = \frac{\varepsilon_*}{f_1^{1/2} + \left(\frac{2\omega c_2}{n\lambda_2}\right)\varepsilon_*}.$$

Теорема доказана.

5. Приложение. Оценки для нормы $\|C\|$

Лемма 3. *Для $C = (G^{\mathrm{T}}G)^{-1}$, где матрица $G^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{(N-n)\times N}$ определена в (3), верны оценки*

$$\frac{1}{(n+1)^2\,\|\gamma\|^2} \leqslant \|C\| \leqslant \frac{2}{(d_\gamma)^{2n}}. \tag{22}$$

Здесь $d_\gamma \doteq \min_{s:\gamma(s)=0}\min_{|\omega|=1}|\omega - s|$ — расстояние между множеством корней многочлена $\gamma(s) = \gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_n s^n$ и единичной окружностью на комплексной плоскости.

Для доказательства леммы установим вспомогательные утверждения.

Предложение 1. *Верна оценка $\|C\| \leqslant \frac{2}{\lambda_{\min}(G_c^{\mathrm{T}}G_c)}$, где G_c — квадратная циркулянтная матрица*

$$G_c^{\mathrm{T}} \doteq \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & 0 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \gamma_1 & & \ddots & & & \ddots & \gamma_0 \\ \gamma_0 & \ddots & & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & 1 & & \\ & & \ddots & \gamma_1 & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & 1 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{M\times M}, \quad M \doteq N - n.$$

Доказательство. Верно равенство $\|C\| = \lambda_{\max}(C) = \frac{1}{\lambda_{\min}(G^{\mathrm{T}}G)}$, и для G^{T} (3) выполнено

$$G^{\mathrm{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_{M-n} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}}_{E} \doteq G^{\mathrm{T}} E = G_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}.$$

Заметим, что $\|E\| = \sqrt{\lambda_{\max}(E^{\mathrm{T}}E)} = \sqrt{2}$. Далее, $\|E^{\mathrm{T}}x\| \leqslant \|E\| \cdot \|x\| = \sqrt{2}\,\|x\|$ и верны соотношения

$$\lambda_{\min}(G_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}G_{\mathrm{c}}) = \min_{\|p\|=1} \|G_{\mathrm{c}}p\|^2 = \min_{\|p\|=1} \|E^{\mathrm{T}} \underbrace{Gp}_{x}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2 \min_{\|p\|=1} \|Gp\|^2 = 2\,\lambda_{\min}(G^{\mathrm{T}}G).$$

Отсюда получаем доказываемое утверждение. □

Предложение 2. *Пусть* $\zeta_k \doteq \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(k/M)}$ *— корень из единицы. Спектр матрицы* $G_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}G_{\mathrm{c}}$ *есть множество* $\left\{|\gamma(\zeta_0)|^2, \ldots, |\gamma(\zeta_{M-1})|^2\right\}$.

Доказательство. Матрица $G_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}$ правоциркулянтная, обозначим ее первую строку $[c_0, \ldots, c_{M-1}]$. Верно разложение [14, п. 3.7.3]

$$G_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} = \Phi\,[\operatorname{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{M-1})]\,\Phi^{-1} \doteq \Phi\Lambda\Phi^{-1},$$

где $\Phi \doteq \frac{1}{\sqrt{M}}F$, $F \in \mathbb{C}^{M\times M}$ — симметричная матрица дискретного преобразования Фурье с элементами $F_{kl} \doteq \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(kl/M)}$, $k,l \in \overline{0, M-1}$, $\Phi^{-1} = \Phi^* \doteq \overline{\Phi}^{\mathrm{T}} = \overline{\Phi}$, черта над матрицей означает комплексное сопряжение. При этом собственные числа λ_k есть значения многочлена $c(\zeta) \doteq c_{M-1}\zeta^{M-1} + \ldots + c_0$ в точках единичной окружности $\zeta_0, \ldots, \zeta_{M-1}$, $\lambda_k = c(\zeta_k)$, то есть вектор-строка из собственных чисел есть образ Фурье от первой строки $G_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}$: $[\lambda_0, \ldots, \lambda_{M-1}] = [c_0, \ldots, c_{M-1}]\,F$. С учетом вещественности матрицы G_{c} и симметричности Φ верно представление $G_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} = \overline{G_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}} = \overline{\Phi\Lambda\Phi^*} = \overline{\Phi}\,\overline{\Lambda}\,\Phi$, поэтому верны равенства

$$G_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}G_{\mathrm{c}} = G_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\overline{G_{\mathrm{c}}} = \Phi\Lambda\Phi^{-1}\left(\overline{\Phi}\,\overline{\Lambda}\,\Phi\right)^{\mathrm{T}} = \Phi\Lambda\overline{\Lambda}\,\overline{\Phi} =$$
$$= \Phi\left[\operatorname{diag}\left(|\lambda_0|^2, \ldots, |\lambda_{M-1}|^2\right)\right]\Phi^{-1} =$$
$$= \Phi\left[\operatorname{diag}\left(|c(\zeta_0)|^2, \ldots, |c(\zeta_{M-1})|^2\right)\right]\Phi^{-1}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $|c(\zeta_k)| = |\gamma(\zeta_k)|$ ввиду равенства $c(\zeta_k) = \zeta_k^{M-n}\gamma(\zeta_k)$ для всех $k \in \overline{0, M-1}$. □

Предложение 3. *Верна оценка*

$$\|C\| \leqslant \frac{2}{\min_{k\in\overline{0,M-1}} |\gamma(\zeta_k)|^2} \leqslant \frac{2}{(d_\gamma)^{2n}}. \tag{23}$$

Доказательство. С учетом предложений 1 и 2 для доказательства достаточно учесть неравенства

$$|\gamma(\zeta_k)| = |(\zeta_k - s_1)\ldots(\zeta_k - s_n)| = |\zeta_k - s_1|\ldots|\zeta_k - s_n| \geqslant$$
$$\geqslant \min_{|\omega_1|=1} |\omega_1 - s_1| \ldots \min_{|\omega_n|=1} |\omega_n - s_n| \geqslant \left(\min_{s_i}\min_{|\omega|=1} |\omega - s_i|\right)^n = (d_\gamma)^n.$$

Предложение доказано. □

Замечание 1. *Для чисел ζ_k с ненулевой мнимой частью собственное число $|\lambda_k|^2 = |\gamma(\zeta_k)|^2$ матрицы $G_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} G_{\mathrm{c}}$ имеет кратность два. Это следует из симметрии $|\gamma(\zeta_k)|^2 = \gamma(\zeta_k)\overline{\gamma(\zeta_k)} = \gamma(\zeta_k)\gamma(\overline{\zeta_k})$ относительно перестановки ζ_k и $\overline{\zeta_k}$ и симметрии множества $\{\zeta_0, \ldots, \zeta_{M-1}\}$ относительно вещественной оси комплексной плоскости. Поэтому в оценке* (23) *минимум достаточно брать по $k \in \overline{0, \left[\frac{M}{2}\right] + 1}$, где $[\cdot]$ — целая часть числа.*

Для завершения доказательства леммы 3 используем неравенства

$$\|C\|^{-1} = \|G^{\mathrm{T}} G\| \leqslant \|G\|^2 \leqslant (n+1)^2 \, \|\gamma\|^2,$$

последнее из которых следует из определений (3), (5) и соотношения $Gx \equiv V(x)\gamma$:

$$\begin{aligned} \|G\| = \sup_{\|x\|=1} \|G^{\mathrm{T}} x\| &= \sup_{\|x\|=1} \|V(x)\gamma\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|V(x)\| \cdot \|\gamma\| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\|x\|=1} \|V(x)\|_2 \cdot \|\gamma\| \leqslant (n+1)\,\|\gamma\|, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\|\cdot\|_2$ — фробениусовская норма матрицы. Лемма доказана.

Замечание 2. *Оценки* (22) *уместно сопоставить с цепочкой неравенств*

$$(d_\gamma)^n \leqslant |\gamma(s)|\big|_{|s|=1} \leqslant |\gamma_0| + \ldots + |\gamma_n| \leqslant (n+1) \max_i |\gamma_i| \leqslant (n+1)\,\|\gamma\|,$$

которая, по всей видимости, неулучшаема.

Автор благодарит рецензента за исправление ошибки в утверждении и доказательстве леммы 3.

References

[1] Osborne M. R., Smyth G. K., *A modified Prony algorithm for fitting functions defined by difference equations*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., **12** (1991), 362–382. MR1087765

[2] Osborne M. R., Smyth G. K., *A Modified Prony Algorithm for Exponential Function Fitting*, SIAM Journal of Scientific Computing, **16** (1995), 119–138. MR1311681

[3] Pereyra V., Scherer G., *Exponential data fitting*, in: Exponential Data Fitting and Its Applications, Bentham Science Publishers (2010), 1–26.

[4] Lomov A. A., *On convergence of the inverse iteration algorithm for modified Prony method*, SEMR, **15** (2018), 1513–1529. MR3885486

[5] Kostin V. I., *On extremum points of some function* [in Russian], Upravlyaemye sistemy, Novosibirsk: Institute of Mathematics of SB AS USSR, **24** (1984), 35–42.

[6] Petersson J., Holmström K., *A review of the parameter estimation problem of fitting positive exponential sums to empirical data*, Applied Mathematics and Computation, **126**:1 (2002), 31–61. MR1868146

[7] Moor De B., *Structured total least squares and L_2 approximation problems*, Linear Algebra Appl., **188–189** (1993), 163–207. Zbl 0781.65028

[8] Osborne M. R., *Some special nonlinear least squares problems*, SIAM J. Numer. Anal., **12** (1975), 571–592. MR386222

[9] Osborne M. R., *A class of nonlinear regression problems*, Data Representation, St. Lucia: University of Queensland Press (1970), 94–101. Zbl 0341.62058

[10] Egorshin A. O., Budyanov V. P., *Smoothing of signals and estimation of dynamic parameters in automatic systems using a digital computer* [in Russian], Avtometriya, **1** (1973), 78–82.

[11] Egorshin A. O., *Least squares method and the fast algorithms in variational problems of identification and filtration (VI method)* [in Russian], Avtometriya, **1** (1988), 30–42.

[12] Egorshin A. O., *On tracking extremum parameters in the identification variational problem* [in Russian], Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta: Seriya Matematika, Mekhanika, Informatika, **11**:3 (2011), 95–113; English transl.: Journal of Mathematical Sciences, **195** (2013), 791–804. MR3141842

[13] Lomov A. A., *Local stability in the problem of identifying coefficients of a linear difference equation* [in Russian], Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta: Seriya Matematika, Mekhanika, Informatika, **10**:4 (2010), 81–103; English transl.: Journal of Mathematical Sciences, **188**:4 (2013), 410–434. MR3049146

[14] Marple S. L., *Digital spectral analysis with applications*, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA, 1986.

Andrei Aleksandrovich Lomov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: lomov@math.nsc.ru