S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1947–1959 (2019) УДК 517.9
DOI 10.33048/semi.2019.16.140 MSC 35Q20

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТОКОВ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В КАНАЛАХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

О.В. ГЕРМИДЕР, В.Н. ПОПОВ

Abstract. A rarefied gas flow trough a long circular tube due to pressure and temperature gradients is studied on the basis of the BGK model kinetic equation using a collocation method by the Chebyshev polynomials and rational Chebyshev functions in the whole range of the Knudsen number covering both free molecular regime and hydrodynamic one. The mass flux is calculated as a function of the pressures and temperatures on the tube ends.

Keywords: BGK model kinetic equation, model of diffuse reflection, Chebyshev polynomials.

1. Введение

Исследования в области динамики разреженного газа, включающие анализ и описание потоков, являются фундаментальными для разработки микроустройств и новых технологий, особенно в области микроэлектронных систем [1]. Корректное описание течения разреженного газа в каналах таких систем возможно на основе кинетического уравнения Больцмана или модельных кинетических уравнений. Наибольший интерес представляет анализ нелинейной задачи о течении газа в канале с учетом входного и выходного резервуаров. С точки зрения вычислительной физики, такая постановка задачи является наиболее сложной. Нелинейное распределение давления или температуры в канале подразумевает решение задачи в два этапа [2]-[4]. На первом этапе приведенные потоки через поперечное сечение канала находятся как функции от

Germider, O.V., Popov, V.N., An application of the Chebyshev polynomials for the calculation of a rarefied gas flow in the cylindrical geometry of the channels.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ по научному проекту 16-29-15116 ofi_m.
Поступила 30 августа 2019 г., опубликована 23 декабря 2019 г.

безразмерных градиентов давления, температуры газа [1]-[9], которые являются малыми по абсолютной величине. На втором этапе из условия независимости массового потока от сечения канала вычисляется его величина в зависимости от значений давлений и температур на концах канала [2]-[4].

В представленной работе численное решение задачи о тепло- массопереносе в длинном цилиндрическом канале получено на основе БГК-модели кинетического уравнения Больцмана [7] с использованием полиномов Чебышева [11] и рациональных функций Чебышева [13]. В качестве граничного условия на поверхности цилиндра использована модель диффузного отражения. Получены приведенные массовые потоки как функции от давлений и температур на концах канала и проведен их сравнительный анализ. Приведен пример вычисления массового потока гелия в рассматриваемом канале.

2. Постановка задачи. Кинетическое уравнение

Рассмотрим течение разреженного газа между двумя резервуарами, соединяющимися цилиндрическим каналом радиусом R'. Давление и температура в первом и во втором резервуарах остаются постоянными и равными соответственно p_1, T_1 и p_2, T_2. Полагаем, что $p_2 > p_1$ и $T_2 > T_1$. Ось z' направим вдоль оси канала. Будем рассматривать течение газа в средней части канала. Считаем, что длина канала $L' \gg R'$ и безразмерные градиенты давления и температуры газа являются малыми по абсолютной величине [2], т.е.

$$G_p = \frac{R'}{p_0}\frac{dp}{dz'},\ |G_p| \ll 1, \quad G_T = \frac{R'}{T_0}\frac{dT}{dz'},\ |G_T| \ll 1. \tag{1}$$

Здесь в качестве размерного масштаба длины выбран радиус R' цилиндрического канала. Далее безразмерные величины длины будем обозначать без штриха. В линейном приближении для функций давления и температура газа в канале получаем следующие выражения

$$T(z) = T_0(1 + G_T z), \quad p(z) = p_0(1 + G_p z). \tag{2}$$

где p_0, T_0 – давление и температура газа в некоторой точке, принятой за начало координат.

Состояние разреженного газа в точке, радиус-вектор которой $\mathbf{r}$ имеет координаты $r_\perp = \rho$, r_φ и $r_z = z$ в цилидрической системе координат в конфигурационном пространстве, определяем функцией распределения молекул газа $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$, где $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$ – безразмерная молекуляная скорость, $\beta = m/(2k_B T_0)$, k_B – постоянная Больцмана, m – масса молекул газа. В пространстве скоростей также будем использовать цилиндрические координаты $(C_\perp, C_\psi, C_z)$. Здесь ψ – угол между $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{C}_\perp$. Так как безразмерные градиенты давления и температуры малы, то функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ в линейном приближении имеет вид [4]

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C)\left(1 + G_T\left(C^2 - \frac{5}{2}\right)z + G_p z + h(\rho, \mathbf{C})\right), \tag{3}$$

где $f_0(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2}\exp\left(-C^2\right)$ – абсолютный максвеллиан, n_0 – концентрация газа в в начале координат. Функцию возмущения $h(\rho, \mathbf{C})$ представляем как сумму, слагаемые в которой связаны с G_T и G_p:

$$h(\rho, \mathbf{C}) = G_p h_1(\rho, \mathbf{C}) + G_T h_2(\rho, \mathbf{C}). \tag{4}$$

Введем, следуя [2] и [14], безразмерные компоненты вектора потока тепла и массовой скорости газа

$$U_z = \beta^{1/2} u_z, \quad q_z = \frac{\beta^{1/2}}{p_0} q'_z. \tag{5}$$

Здесь через u_z и q'_z обозначены их размерные величины, выражаемые через функцию распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ как [14]

$$u_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(z)} \int v_z f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) d^3\mathbf{v}, \tag{6}$$

$$q'_z(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} \int v_z v^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) d^3\mathbf{v}, \tag{7}$$

где $n(z)$ – концентрация молекул газа.

Подставляя (3) в (6) и (7), для безразмерных компонент (5) с учетом (4) получаем

$$U_z(\rho) = G_p U_{z,1}(\rho) + G_T U_{z,2}(\rho), \quad q_z(\rho) = G_p q_{z,1}(\rho) + G_T q_{z,2}(\rho), \tag{8}$$

$$U_{z,i}(\rho) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp\left(-C^2\right) C_z h_i(\rho, \mathbf{C}) d^3\mathbf{C}, \quad i = 1, 2; \tag{9}$$

$$q_{z,i}(\rho) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp\left(-C^2\right) C_z \left(C^2 - \frac{5}{2}\right) h_i(\rho, \mathbf{C}) d^3\mathbf{C}, \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

Здесь $U_{z,1}$ и $q_{z,1}$ определяют массовую скорость и компоненту вектора потока тепла вследствие наличия градиента давления при изотермическом течении газа в канале, а $U_{z,2}$ и $q_{z,2}$ представляют собой их величину при изобарическом течении, обусловленном градиентом температуры.

Наша цель на первом этапе исследования нахождение приведенных потоков тепла и массы газа, которые зависят от G_T и G_p:

$$J_M = \frac{J'_M}{\pi R'^2 p(z)} \sqrt{\frac{2k_B T(z)}{m}} = G_p J_{M,1} + G_T J_{M,2}, \tag{11}$$

$$J_Q = \frac{2J'_Q}{\pi R'^2 p(z)} \sqrt{\frac{m}{2k_B T(z)}} = G_p J_{Q,1} + G_T J_{Q,2}. \tag{12}$$

Здесь штрихами обозначены размерные величины потоков. Коэффициенты $J_{M,i}$ и $J_{Q,i}$ $(i = 1, 2)$ являются безразмерными коэффициентами пропорциональности между потоками через поперечное сечение канала и локальными градиентами давления G_p и температуры G_T

$$J_{M,i} = 4 \int_0^1 U_{z,i}(\rho) \rho d\rho, \quad J_{Q,i} = 4 \int_0^1 q_{z,i}(\rho) \rho d\rho, \ i = 1, 2. \tag{13}$$

В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процессов, будем использовать БГК модель кинетического уравнения Больцмана в цилиндрической системе координат [7], [10]

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\cos\psi - \frac{\partial h}{\partial \psi}\frac{\sin\psi}{\rho}\right)C_\perp + G_T\left(C^2-\frac{5}{2}\right)C_z + G_pC_z + \delta h(\rho,\mathbf{C}) = \\ = \frac{\delta}{\pi^{3/2}}\int K(\mathbf{C},\mathbf{C}')\exp(-C'^2)h(\rho,\mathbf{C}')d^3\mathbf{C}', \tag{14}$$

где $\delta = \mathrm{Kn}^{-1}$ – параметр разрежения газа, $\mathrm{Kn} = l_g/R'$ – число Кнудсена, $l_g = \eta_g\beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа, η_g – динамическая вязкость газа, $K(\mathbf{C},\mathbf{C}')$ – ядро этого уравнения [10]

$$K(\mathbf{C},\mathbf{C}') = 2\mathbf{C}'\mathbf{C} + \frac{2}{3}\left(C'^2-\frac{3}{2}\right)\left(C^2-\frac{3}{2}\right)+1.$$

Для восстановления компонент массовой скорости $U_{z,i}(\rho)$ $(i=1,2)$ умножим левую и правую части уравнения (14) на $C_z\exp(-C_z^2)/\sqrt{\pi}$ и проинтегрируем по C_z от $-\infty$ до $+\infty$. Полученное таким образом уравнение с учетом (4) и (9) сводится к системе двух независимых уравнений

$$\left(\frac{\partial Z_{1,1}}{\partial \rho}\zeta + \frac{\partial Z_{1,1}}{\partial \zeta}\frac{(1-\zeta^2)}{\rho}\right)C_\perp + \delta Z_{1,1}(\rho,C_\perp,\zeta) + \frac{1}{2} = \delta U_{z,1}(\rho), \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial Z_{1,2}}{\partial \rho}\zeta + \frac{\partial Z_{1,2}}{\partial \zeta}\frac{(1-\zeta^2)}{\rho}\right)C_\perp + \delta Z_{1,2}(\rho,C_\perp,\zeta) + \frac{C_\perp^2-1}{2} = \delta U_{z,2}(\rho). \tag{16}$$

где $\zeta = \cos\psi$ и

$$Z_{1,i}(\rho,C_\perp,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-C_z^2)C_zh_i(\rho,\mathbf{C})dC_z, \quad i=1,2. \tag{17}$$

Для восстановления компонент вектора потока тепла $q_{z,i}(\rho)$ $(i=1,2)$ умножим левую и правую части уравнения (14) на $C_z^3\exp(-C_z^2)/\sqrt{\pi}$ и проинтегрируем по C_z от $-\infty$ до $+\infty$. Учитывая (4) и (10), приходим к системе уравнений

$$\left(\frac{\partial Z_{2,1}}{\partial \rho}\zeta + \frac{\partial Z_{2,1}}{\partial \zeta}\frac{(1-\zeta^2)}{\rho}\right)C_\perp + \delta Z_{2,1}(\rho,C_\perp,\zeta) + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\delta U_{z,1}(\rho), \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial Z_{2,2}}{\partial \rho}\zeta + \frac{\partial Z_{2,2}}{\partial \zeta}\frac{(1-\zeta^2)}{\rho}\right)C_\perp + \delta Z_{2,2}(\rho,C_\perp,\zeta) + \frac{3C_\perp^2}{4} = \frac{3}{2}\delta U_{z,2}(\rho), \tag{19}$$

где

$$Z_{2,i}(\rho,C_\perp,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-C_z^2)C_z^3h_i(\rho,\mathbf{C})dC_z, \quad i=1,2. \tag{20}$$

В результате компоненты $U_{z,i}(\rho)$ и $q_{z,i}(\rho)$ $(i=1,2)$ выражаются через введенные функции $Z_{k,i}(\rho,C_\perp,\zeta)$ $(k,i=1,2)$ как

$$U_{z,i}(\rho) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}Z_{1,i}(\rho,C_\perp,\zeta)d\zeta dC_\perp, \tag{21}$$

$$q_{z,i}(\rho) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}Z_{2,i}(\rho,C_\perp,\zeta)d\zeta dC_\perp - \frac{5}{2}U_{z,i}(\rho) + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp^3\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}Z_{1,i}(\rho,C_\perp,\zeta)d\zeta dC_\perp. \tag{22}$$

В качестве граничного условия на обтекаемой газом поверхности Γ канала будем использовать модель диффузного отражения [14]:

$$f^+(\mathbf{r}_\Gamma,\mathbf{C}) = f_\Gamma(\mathbf{r}_\Gamma,\mathbf{C}), \quad \mathbf{C}\mathbf{e}_n > 0. \tag{23}$$

Здесь $f^+(\mathbf{r}_\Gamma,\mathbf{C})$ – функция распределения молекул газа, отраженных от поверхности канала, $\mathbf{e}_n$ – вектор единичной нормали к этой поверхности, направленный в сторону газа; $f_\Gamma(\mathbf{r}_\Gamma,\mathbf{C})$ – локально равновесная функция распределения [9]:

$$f_\Gamma(\mathbf{r}_\Gamma,\mathbf{C}) = n_\Gamma(z)\left(\frac{m}{2\pi k_B T_\Gamma(z)}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{T_0}{T_\Gamma(z)}\,\mathbf{C}^2\right), \tag{24}$$

где $T_\Gamma(z)$ – температура газа на поверхности канала, $n_\Gamma(z)$ – концентрация молекул газа вблизи стенок канала. Ввиду малости величин G_p и G_T функцию (24) линеаризуем относительно абсолютного максвеллиана $f_0(C)$ [8], [9]. В результате, учитывая (3), (4), для функций $Z_{k,i}(\rho,C_\perp,\zeta)$ $(k,i=1,2)$ получаем следующие граничные условия

$$Z_{k,i}(1,C_\perp,\zeta) = 0, \quad \zeta<0, \quad i,k=1,2. \tag{25}$$

3. Решение краевой задачи. Потоки газа при малых перепадах давления и температуры

Найдем решение уравнения (16) с граничным условием (25). Неизвестную функцию $Z_{1,2}(\rho,C_\perp,\zeta)$ раскладываем в ряд по полиномам и рациональным функциям Чебышева

$$Z_{1,2}(\rho,C_\perp,\zeta) = \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{0}}^{\infty} a_{\mathbf{j}}T_{j_1}(\hat\rho)T_{j_2}(\zeta)T_{j_3}(\hat C_\perp), \tag{26}$$

$$\hat\rho = 2\rho-1, \quad \hat C_\perp = \frac{C_\perp-1}{C_\perp+1}, \tag{27}$$

где $\mathbf{j}=(j_1,j_2,j_3)$. Для определения $T_j(x)$ в разложении (26) применяем реккурентные соотношения [11]

$$T_0(x)=1, \quad T_1(x)=x, \quad T_j(x)=2xT_{j-1}(x)-T_{j-2}(x), \quad j\ge 2. \tag{28}$$

Ограничиваясь в разложении (26) членами с номерами $j_i \le n_i$ $(i=\overline{1,3})$, получаем

$$Z_{1,2}(\rho,C_\perp,\zeta) = \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{n}} a_{\mathbf{j}}T_{j_1}(\hat\rho)T_{j_2}(\zeta)T_{j_3}(\hat C_\perp) = \mathbf{T}_{1\times n_1'}(\hat\rho)\mathbf{Q}(\zeta)\mathbf{W}(\hat C_\perp)\mathbf{A}. \tag{29}$$

Здесь $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)$, $n_i' = n_i+1$ $(i=\overline{1,3})$,

$$\mathbf{T}_{1\times n_1'}(\hat\rho) = \left(T_0(\hat\rho)\,T_1(\hat\rho)\ldots T_{n_1}(\hat\rho)\right), \tag{30}$$

$$\mathbf{A}_{n'_1 n'_2 n'_3 \times 1} = \left(a_{000}\, a_{001} \ldots a_{00n_3} \quad \ldots a_{n_1 n_2 0}\, a_{n_1 n_2 1} \ldots a_{n_1 n_2 n_3}\right)^T, \tag{31}$$

$\mathbf{Q}(\zeta)$ и $\mathbf{W}(C_\perp)$ – блочно-диагональные матрицы

$$\mathbf{Q}(\zeta) = \mathbf{\Phi}_{n'_1 \times n'_1 n'_2}(\zeta), \quad \mathbf{W}(\hat{C}_\perp) = \mathbf{\Phi}_{n'_1 n'_2 \times n'_1 n'_2 n'_3}(\hat{C}_\perp), \tag{32}$$

$$\mathbf{\Phi}_{m \times m\, n}(x) = \operatorname{diag}\left(\mathbf{T}_{1 \times n}(x), \mathbf{T}_{1 \times n}(x), \ldots \mathbf{T}_{1 \times n}(x)\right), \tag{33}$$

Далее для краткости будем обозначать $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_{1 \times n'_i}$ $(i = \overline{1,3})$. Производные от $\mathbf{T}_1(\hat{\rho})$ по переменной ρ и $\mathbf{T}_2(\zeta)$ по ζ могут быть определены как

$$\frac{d\mathbf{T}_1(\hat{\rho})}{d\rho} = 2\mathbf{T}_1(\hat{\rho})\mathbf{J}_1, \quad \frac{d\mathbf{T}_2(\zeta)}{d\zeta} = \mathbf{T}_2(\zeta)\mathbf{J}_2, \tag{34}$$

где $\mathbf{J}_k = \mathbf{J}_{n'_k \times n'_k}$ – матрица $(k = 1, 2)$, ненулевые элементы которой вычисляются по формулам [12]

$$(J_k)_{i,j+1} = \begin{cases} j, & i = 1,\ j\,\text{нечет.} \\ 2j & j > i-1,\ i\,\text{чет.}, j\,\text{чет.} \\ 2j & j > i-1,\ i > 1,\ i\,\text{нечет.}, j\,\text{нечет.} \end{cases} \tag{35}$$

Выражая из равенств (27) переменные ρ и $C_\perp$ через $\hat{\rho}$ и $\hat{C}_\perp$ и учитывая (34), записываем левую часть уравнения (16) в виде

$$\frac{\hat{C}_\perp + 1}{1 - \hat{C}_\perp}\left(2\zeta\mathbf{T}_1(\hat{\rho})\mathbf{J}_1\mathbf{Q}(\zeta) + \frac{2(1-\zeta^2)}{\hat{\rho}+1}\mathbf{T}_1(\hat{\rho})\mathbf{Q}'(\zeta)\right)\mathbf{W}(\hat{C}_\perp)\mathbf{A} + \\ + \delta\mathbf{T}_1(\hat{\rho})\mathbf{Q}(\zeta)\mathbf{W}(\hat{C}_\perp)\mathbf{A} + \frac{(\hat{C}_\perp + 1)^2}{2(1-\hat{C}_\perp)^2} - \frac{1}{2}, \tag{36}$$

где $\mathbf{Q}'(\zeta) = \operatorname{diag}\left(\mathbf{T}_2(\zeta)\mathbf{J}_2,\ \mathbf{T}_2(\zeta)\mathbf{J}_2,\ \ldots \mathbf{T}_2(\zeta)\mathbf{J}_2\right)$.

Преобразуем правую часть уравнения (16)

$$\frac{2\delta}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}Z_{1,2}(\rho, C_\perp, \zeta)d\zeta dC_\perp = 4\delta\mathbf{P}_1(\hat{\rho})\,\mathbf{A}. \tag{37}$$

где $\mathbf{P}_1$ – матрица, в которой ненулевые элементы

$$(P_i)_{1, n'_2 n'_3 i_1 + i_3 + 1}(\hat{\rho}) = I_{i,i_3}(T_1)_{1,i_1+1}(\hat{\rho}), \quad i_{1,3} = \overline{0, n_{1,3}}, \tag{38}$$

$$2I_{i,i_3} = \int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp^i T_{i_3}(\hat{C}_\perp)dC_\perp, \quad i = \overline{0, n_3+2},\ i_3 = \overline{0, n_3}, \tag{39}$$

В (38) и (39) $i = 1$, а интеграл I_{1,i_3} $(i_3 = \overline{0, n_3})$ находим численно по формуле [11], [15]

$$I_{i,i_3} = \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' \tau_{ex}(\hat{C}_{\perp,k}, n)w_i(\hat{C}_{\perp,k})T_{i_3}(\hat{C}_{\perp,k}), \tag{40}$$

$$w_i(\hat{C}_{\perp,k}) = \frac{\exp\left(-\dfrac{(1+\hat{C}_{\perp,k})^2}{(1-\hat{C}_{\perp,k})^2}\right)(1+\hat{C}_{\perp,k})^i}{(1-\hat{C}_{\perp,k})^{i+2}}, \quad i = \overline{0, n_3}, \tag{41}$$

$$\tau_{ex}(\hat{C}_{\perp,k}, n) = \sum_{j=0}^{n/2}{}'' \frac{T_j(\hat{C}_{\perp,k})}{1-4j^2}, \quad \hat{C}_{\perp,k} = \cos\left(\frac{\pi(n-k)}{n}\right), \quad k = \overline{0,n}. \tag{42}$$

В (40) и (42) под $\sum''$ понимаем сумму, в которой первое и последнее слагаемые умножаются на 1/2 [11]; $n = 40$. При выбранном значении $n = 40$ абсолютная разность значений для I_{1,i_3} ($i_3 = \overline{0,n_3}$), полученных с использованием (40) и методом Гаусса, не превышает 10^{-9}.

Подставляя (36) и (37) в (25), имеем

$$\mathbf{\Lambda}(\hat{\rho}, \zeta, \hat{C}_\perp)\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(\hat{C}_\perp + 1)^2}{(1-\hat{C}_\perp)^2}\right), \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}_{1\times n_1' n_2' n_3'}(\hat{\rho}, \zeta, \hat{C}_\perp) = \delta \mathbf{T}_1(\hat{\rho})\mathbf{Q}(\zeta)\mathbf{W}(\hat{C}_\perp) - 4\delta\mathbf{P}_1(\hat{\rho}) + \\ + \frac{\hat{C}_\perp + 1}{1-\hat{C}_\perp}\left(2\zeta\mathbf{T}_1(\hat{\rho})\mathbf{J}_1\mathbf{Q}(\zeta) + \frac{2(1-\zeta^2)}{\hat{\rho}+1}\mathbf{T}_1(\hat{\rho})\mathbf{Q}'(\zeta)\right)\mathbf{W}(\hat{C}_\perp).\end{aligned} \tag{44}$$

Граничное условие (25) записываем в форме

$$\mathbf{\Omega}(1, \zeta, \hat{C}_\perp)\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{\Omega}_{1\times n_1' n_2' n_3'}(1, \zeta, \hat{C}_\perp) = \mathbf{T}_1(1)\mathbf{Q}(\zeta)\mathbf{W}(\hat{C}_\perp), \quad \zeta < 0. \tag{45}$$

Умножим левую и правую части уравнения (43) и (45) на $w_i(\hat{C}_\perp)$ ($i = \overline{0,n_3}$) и проинтегрируем по $\hat{C}_\perp$ от -1 до 1. В результате получаем

$$\mathbf{\Lambda'}_i(\hat{\rho}, \zeta)\mathbf{A} = \varsigma_i, \quad \varsigma_i = \frac{1}{2}(I_{i,0} - I_{i+2,0}), \quad i = \overline{0,n_3}, \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda'}_{i,1\times n_1' n_2' n_3'}(\hat{\rho}, \zeta) = \left(2\zeta\mathbf{T}_1(\hat{\rho})\mathbf{J}_1\mathbf{Q}(\zeta) + \frac{2(1-\zeta^2)}{\hat{\rho}+1}\mathbf{T}_1(\hat{\rho})\mathbf{Q}'(\zeta)\right)\mathbf{W'}_{i+1} + \\ + \delta\mathbf{T}_1(\hat{\rho})\mathbf{Q}(\zeta)\mathbf{W'}_i - 4\delta\mathbf{P}_1(\hat{\rho})I_{i,0},\end{aligned} \tag{47}$$

$$\mathbf{\Omega'}_i(1, \zeta)\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{\Omega'}_{i,1\times n_1' n_2' n_3'}(1, \zeta) = \mathbf{T}_1(1)\mathbf{Q}(\zeta)\mathbf{W'}_i, \quad \zeta < 0, \quad i = \overline{0,n_3}, \tag{48}$$

где $\mathbf{W'}_{i,n_1' n_2' \times n_1' n_2' n_3'} = \mathrm{diag}\,(\mathbf{I}_i, \mathbf{I}_i \ldots \mathbf{I}_i)$, $\mathbf{I}_{i,1\times n_3'} = (I_{i,0}, I_{i,2}, \ldots I_{i,n_3})$ ($i = \overline{0,n_3}$).

В качестве точек коллокации в уравнениях (46) и (48) будем использовать нули многочленов $T_{n_i'}(\hat{x})$ ($i = 1,2$) на отрезке $[-1;1]$:

$$x_{i,k} = \cos\left(\frac{\pi(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i+1)}\right), \quad k_i = \overline{0,n_i},\ i = 1,2, \tag{49}$$

где $\hat{x}_{1,k} = \hat{\rho}_{k_1}$, $x_{2,k} = \zeta_{k_2}$.

Подставляя (49) в (46), приходим к системе линейных $n_1' n_2' n_3'$-уравнений, в которой заменяем уравнения с $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{n_1}$ и $\zeta = \zeta_{k_2}$ на уравнения, вытекающие из граничного условия (48) со значениями переменных $\hat{\rho} = 1$ и $\zeta = \zeta_{k_2}$ ($k_2 = \overline{0,k_2'}$). Здесь k_2' – индекс, такой что $\zeta_{k_2'} < 0$ и $\zeta_{k_{2+1}'} \geq 0$. В результате получаем

$$\mathbf{BA} = \mathbf{F}, \tag{50}$$

$$\mathbf{B}_{n_1'n_2'n_3'\times n_1'n_2'n_3'}=\begin{pmatrix}\mathbf{\Lambda'}_0(\hat\rho_0,\zeta_0)\\ \mathbf{\Lambda'}_1(\hat\rho_0,\zeta_0)\\ \dots\\ \mathbf{\Lambda'}_{n_3-1}(\hat\rho_{n_1-1},\zeta_{n_2})\\ \mathbf{\Lambda'}_{n_3}(\hat\rho_{n_1-1},\zeta_{n_2})\\ \dots\\ \mathbf{\Omega'}_0(1,\zeta_0)\\ \mathbf{\Omega'}_1(1,\zeta_0)\\ \dots\\ \mathbf{\Omega'}_{n_3}(1,\zeta_{k_2'})\\ \mathbf{\Lambda'}_0(\hat\rho_{n_1},\zeta_{k_2'+1})\\ \dots\\ \mathbf{\Lambda'}_{n_3-1}(\hat\rho_{n_1},\zeta_{n_2})\\ \mathbf{\Lambda'}_{n_3}(\hat\rho_{n_1},\zeta_{n_2})\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}_{n_1'n_2'n_3'\times 1}=\begin{pmatrix}\varsigma_0\\ \varsigma_1\\ \dots\\ \varsigma_{n_3-1}\\ \varsigma_{n_3}\\ \dots\\ 0\\ 0\\ \dots\\ 0\\ \varsigma_0\\ \dots\\ \varsigma_{n_3-1}\\ \varsigma_{n_3}\end{pmatrix}. \tag{51}$$

Решение уравнения (50) находим LU-методом в системе компьютерной алгебры Maple. На основе полученных элементов матрицы $\mathbf{A}$ находим $U_{z,2}(\hat\rho)$. Подставляя (37) в (21), имеем

$$U_{z,2}(\hat\rho)=4\mathbf{P}_1(\hat\rho)\,\mathbf{A}. \tag{52}$$

Подставляя (52) в (13), получаем

$$J_{M,2}=4\int\limits_{-1}^{1}\mathbf{P}_1(\hat\rho)(1+T_1(\hat\rho))d\hat\rho\,\mathbf{A}= \tag{53}$$
$$=8\sum_{i_3=0}^{n_3}I_{1,i_3}\left(\sum_{i_1=0}^{[n_1/2]}\frac{a_{2n_2'n_3'i_1+i_3+1,1}}{1-4i_1^2}+\sum_{i_1=0}^{[n_1'/2]-1}\frac{a_{n_2'n_3'(2i_1+1)+i_3+1,1}}{4-(2i_1+1)^2}\right).$$

В таблице 1 приведены значения $J_{M,2}$, полученные по формуле (53) при $2n_{1,3}=n_2=20$ для $\delta<0.5$ и при $n_1=2n_{2,3}=20$ для $\delta\geq 0.5$.

Используя подход, описанный выше для уравнения (15) с граничным условием (25), вычисляем значения $-J_{M,1}$ по формуле (13). В таблице 1 приведены эти значения в зависимости от δ при тех же значениях $\mathbf{n}$, которые использованы ранее для $J_{M,2}$. Там же для сравнения приведены значения компонент $J_{M,1}$ и $J_{M,2}$ из [5], [6] и [7]. Результаты в [6] и [7] получены на основе решения линеаризованного уравнения БГК методами дискретных скоростей и ординат, соответственно. В [5] применен спектральный метод с использованием кубических сплайнов.

Компоненты $q_{z,i}(\rho)$ $(i=1,2)$ находим по формулам (22). В частности, для $q_{z,2}(\hat\rho)$ имеем

$$q_{z,2}(\hat\rho)=4\left(\mathbf{P}_3(\hat\rho)-\frac{5}{2}\mathbf{P}_1(\hat\rho)\right)\mathbf{A}+4\mathbf{P}_1(\hat\rho)\,\mathbf{A}^*, \tag{54}$$

где матрицы $\mathbf{P}_k$ $(k=1,3)$ определяются равенствами (38), а $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ – уравнениями (50) и

$$\mathbf{\Lambda}^*{}_j(\hat\rho,\zeta)\mathbf{A}^*=\varsigma_j^*,\quad \varsigma_j^*=\frac{3\delta}{2}I_{j,0}U_{z,2}(\hat\rho)-\frac{3}{4}I_{j+2,0},\quad j=\overline{0,n_3}, \tag{55}$$

Таблица 1. Коэффициенты $J_{M,i}$ при различных значениях δ

δ	$J_{M,2}$		$-J_{M,1}$		
	(53)	[5], [7]	(13)	[5], [7]	[6]
0.1	0.5974	0.597479	1.4043	1.40396	1.403
0.2	0.5294	0.529371	1.3817	1.38159	1.381
0.5	0.4172	0.417068	1.3869	1.38665	1.386
1.0	0.3218	0.321726	1.4586	1.45829	1.458
2.0	0.2272	0.227118	1.6581	1.65765	1.657
5.0	0.1223	0.122228	2.3493	2.34833	2.348
10.0	0.0686	0.068581	3.5657	3.56412	3.563

$$\boldsymbol{\Lambda}^*{}_j(\hat\rho,\zeta) = \left(2\zeta\mathbf{T}_1(\hat\rho)\mathbf{J}_1\mathbf{Q}(\zeta) + \frac{2(1-\zeta^2)}{\hat\rho+1}\mathbf{T}_1(\hat\rho)\mathbf{Q}'(\zeta)\right)\mathbf{W}'{}_{j+1} + \delta\mathbf{T}_1(\hat\rho)\mathbf{Q}(\zeta)\mathbf{W}'{}_j, \tag{56}$$

$$\boldsymbol{\Omega}'{}_j(1,\zeta)\mathbf{A}^* = 0, \quad \zeta < 0, \quad j = \overline{0, n_3}. \tag{57}$$

В уравнении (55) при поиске элементов $\mathbf{A}^*$ выражение для компоненты $U_{z,2}(\hat\rho)$ считаем известным. В качестве примера приведем выражение для $U_{z,2}(\hat\rho)$, полученное по (52) при $\delta = 1$ и $n_1 = 2n_{2,3} = 10$:

$$U_{z,2}(\hat\rho) = 0.1902 - 0.4294\cdot 10^{-1}\hat\rho - 0.2873\cdot 10^{-1}\hat\rho^2 - 0.8902\cdot 10^{-2}\hat\rho^3 - 0.7798\cdot 10^{-2}\hat\rho^4 - 0.1473\cdot 10^{-1}\hat\rho^5 - 0.6786\cdot 10^{-2}\hat\rho^6 + 0.1757\cdot 10^{-1}\hat\rho^7 + 0.9297\cdot 10^{-2}\hat\rho^8 - 0.1516\cdot 10^{-1}\hat\rho^9 - 0.1019\cdot 10^{-1}\hat\rho^{10}. \tag{58}$$

Используя подход, описанный выше для уравнения (55) с граничным условием (57), получаем значения $J_{Q,2}$ по формуле (13) с учетом (54). В таблице 2 приведены эти значения в зависимости от δ. Из таблицы 2 видно, что наблюдается быстрая сходимость в среднем с увеличением $n_{1,2,3}$. Аналогично находим значения $J_{Q,1}$, которые совпадают со значениями $J_{M,2}$ из таблицы 1, что согласуется с соотношением Онзагера [2] и служит дополнительным критерием точности полученных результатов.

Таблица 2. Поток тепла $-J_Q/G_T = -J_{Q,2}$ при $G_p = 0$ и различных значениях δ

δ	$n_1 = 2n_{2,3} = 10$	$n_1 = 2n_{2,3} = 20$	δ	$2n_{1,3} = n_2 = 10$	$2n_{1,3} = n_2 = 20$
0.5	1.8619	1.8644	0.1	2.7714	2.7716
1.0	1.3603	1.3623	0.2	2.4412	2.4447
2.0	0.8901	0.8915			
5.0	0.4345	0.4353			
10.0	0.2329	0.2335			

В качестве примера рассмотрим изотермическое течение He в цилиндрическом канале радиусом $R' = 0.217$ мкм при давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $T = 293$ K (стандартные условия в National Institute of Standards and Technology, NIST). При таких условиях динамическая вязкость He составляет $\eta_g = 19.73\cdot 10^{-6}$ Па с [3], а $\beta^{-1/2} = 1.1\cdot 10^3$ м/с и $\delta = 1$. Из таблицы 1 для $\delta = 1$

находим значение приведенного потока массы газа $J_{M,1} = -0.2756$. Допустим, что в этом случае безразмерный градиент давления $G_p = -0.01$ [3]. В задаче о течении Пуазейля используя (11), получаем массовый поток He в канале $J'_M = 2.73 \cdot 10^{-13}$ кг/с.

4. Потоки газа при произвольных перепадах давления и температуры

Здесь будет описан второй этап проблемы, а именно — будут получены массовые потоки как функции давлений p_1 и p_2 и температур T_1 и T_2 на концах канала. В случае малых перепадов температуры и давления на концах канала, распределения температуры и давления вдоль канала можно считать линейным [2]. При этом градиенты температуры и давления могут быть определены по формулам [2]

$$G_T = \frac{T_2 - T_1}{LT_{av}}, \quad G_p = \frac{p_2 - p_1}{Lp_{av}}. \tag{59}$$

где $L = L'/R'$, $T_{av} = (T_2 + T_1)/2$, $p_{av} = (p_2 + p_1)/2$ и перепады температуры и давления являются малыми: $(T_2 - T_1) \ll T_1$ и $(p_2 - p_1) \ll p_1$. В этом случае величина J_M остается постоянной. Если отношения T_2/T_1 и p_2/p_1 являются большими, то распределение давления перестает быть линейным и происходит изменение величины J_M вдоль канала.

Введем новый приведенный поток, величина которого не изменятся вдоль канала, как [2]

$$J^*_M = \frac{L}{\pi R'^2 p_1} J'_M \sqrt{\frac{2k_B T_1}{m}}, \tag{60}$$

Выражая J'_M из (11) и подставляя в (60), с учетом (1) получаем

$$J^*_M = \frac{L\sqrt{T_1}}{p_1} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} J_{M,1} \frac{dp}{dz} + \frac{p}{T^{3/2}} J_{M,2} \frac{dT}{dz} \right). \tag{61}$$

Пусть $z^* = z'/L' = z/L$, $\tilde{T} = T/T_1$ и $\tilde{p} = p/p_1$, тогда выражение (61) перепишем в виде

$$J^*_M = \frac{1}{\sqrt{\tilde{T}}} J_{M,1} \frac{d\tilde{p}}{dz^*} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{T}^{3/2}} J_{M,2} \frac{d\tilde{T}}{dz^*}. \tag{62}$$

Необходимо заметить, что в отличие от J^*_M, постоянного вдоль канала, величины $J_{M,1}$ и $J_{M,2}$ зависят от z. Зависимость эта проявляется неявно, через параметр δ. Для модели жестких сфер имеем следующие соотношения [2]

$$\delta = \frac{pT_i}{p_i T} \delta_i, \quad \delta_i = \frac{R' p_i}{\eta_g(T_i)} \sqrt{\frac{m}{2k_B T_i}}, \quad i = 1, 2. \tag{63}$$

Рассмотрим изотермическое течение. В этом случае $\tilde{T} = 1$ $(T_1 = T_2)$ и уравнение (62) принимает вид

$$J^*_M dz^* = J_{M,1} d\tilde{p}. \tag{64}$$

Выражая $\tilde{p}$ из (63) и подставляя в (62), интегрируем левые и правые части (64). Принимая во внимание, что J_M^* не зависит от dz^*, получаем

$$J_M^* = \int_1^{p_2/p_1} J_{M,1} d\tilde{p} = \frac{1}{\delta_1} \int_{\delta_1}^{\delta_2} J_{M,1} d\delta. \tag{65}$$

Для сравнения с результатами [6] введем приведенный поток в случае изотермического течения как

$$J_M^{**} = \frac{L}{\pi R'^2 (p_2 - p_1)} J'_M \sqrt{\frac{2k_B T_1}{m}}. \tag{66}$$

Преобразуем выражение (66) с учетом (63) к виду

$$J_M^{**} = \frac{1}{\delta_2 - \delta_1} \int_{\delta_1}^{\delta_2} J_{M,1} d\delta. \tag{67}$$

Значения интеграла (67) находим численно по формуле

$$J_M^{**} = \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m}{}'' \tau_{ex}(\hat{\delta}_k, m) J_{M,1}(\delta^{(k)}), \tag{68}$$

$$\delta^{(k)} = \left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}\right) \hat{\delta}_k + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}, \quad \hat{\delta}_k = \cos\left(\frac{\pi(m-k)}{m}\right), \quad k = \overline{0, m}. \tag{69}$$

где функция $\tau_{ex}(\hat{\delta}_k, m)$ определена выше (42). В третьем, четвертом и пятом столбцах таблицы 3 представлены значения $-J_M^{**}$, полученные по формуле (68) при $m = 2$, 4 и 8, на отрезках [0.1, 1], [0.1, 10] и [1, 10]. В шестом столбце таблицы приведены значения, вычисленные по теореме Лагранжа о среднем значении интеграла $J_M^{**} = J_{M,1}(\delta^*)$, где $\delta^* = (\delta_1 + \delta_2)/2$. В последнем столбце приведены значения из [6].

Таблица 3. Величина $-J_M^{**}$ на (δ_1, δ_2)

δ_1	δ_2	$m=2$	$m=4$	$m=8$	$-J_{M,1}(\delta^*)$	[6]
0.1	1.0	1.4052	1.4029	1.4029	1.3920	1.403
0.1	10	2.4025	2.3831	2.3823	2.3612	2.382
1.0	10	2.4834	2.4803	2.4803	2.4690	2.480

Рассмотрим изобарическое течение. В этом случае $\tilde{p} = 1$ $(p_1 = p_2)$ и уравнение (62) приводится к виду

$$J_M^* dz^* = \tilde{T}^{-3/2} J_{M,2} d\tilde{T}. \tag{70}$$

Интегрируем (70). Учитывая (63), получаем

$$J_M^* = \int_1^{T_2/T_1} \tilde{T}^{-3/2} J_{M,2} d\tilde{T} = -\delta_1^{-1/2} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \delta^{-1/2} J_{M,2} d\delta. \tag{71}$$

Значения интеграла (71) находим численно по формуле

$$J_M^* = \frac{2(\delta_1 - \delta_2)}{\sqrt{\delta_1} m} \sum_{k=0}^{m}{}'' \tau_{ex}(\hat{\delta}_k, m) \frac{J_{M,2}(\delta^{(k)})}{\sqrt{\delta^{(k)}}}, \tag{72}$$

где $\tau_{ex}(\hat{\delta}_k, m)$, $\hat{\delta}_k$ и $\delta^{(k)}$ определяем согласно (42) и (69). Во втором и третьем столбцах таблицы 4 представлены значения J_M^*, вычисленные по формуле (72) при $m = 2$ и 4 для $\tilde{T}_2 = 3.8$ и $\delta_1 = 0.1$, 1 и 10. В последнем столбце приведены значения из [3], полученные на основе S-модели кинетического уравнения с использованием метода дискретных скоростей.

Таблица 4. Величина J_M^* при $\tilde{p} = 1$ и $\tilde{T}_2 = 3.8$

δ_1	$m = 2$	$m = 4$	[3]
0.1	0.6290	0.6240	0.6324
1.0	0.3971	0.3920	0.4315
10	0.1172	0.1135	0.1496

5. Заключение

В работе в рамках кинетического подхода решена линеаризованная задача о тепло- и массопереносе в разреженном газе в цилиндрическом канале при наличии малых градиентов давления и температуры. Получены выражения теплового и массового потоков как функции от градиентов давления и температуры на основе БГК-модели кинетического уравнения Больцмана с использованием полиномов Чебышева и рациональных функций Чебышева. Для различных значений параметра разрежения вычислены значения потоков тепла и массы через поперечное сечение канала. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными другими авторами. В зависимости от значений давлений и температур на концах канала получены значения массового потока газа в случае изотермического и изобарического течений разреженного газа.

References

[1] C.H. Kamphorst, P. Rodrigues, L.B. Barichello, *A Closed-Form Solution of a Kinetic Integral Equation for Rarefied Gas Flow in a Cylindrical Duct*, Applied Mathematics, **5**:10 (2016), 1516–1527.

[2] F.M. Sharipov, V.D. Seleznev, *Motion of rarefied gases in channels and microchannels.* Yekaterinburg, UrO RAN, 2008. (in Russian)

[3] I. Graur, F. Sharipov, *Non-isothermal flow of rarefied gas through a long pipe with elliptic cross section*, Microfluid Nanofluid. **6**:2 (2009), 267–275.

[4] O.V. Germider, V.N. Popov, *Nonisothermal Free-Molecular Flow of Gas in an Elliptic Channel with a Circular Cylindrical Element Inside*, Technical Physics. **64**:1 (2019), 19–23.

[5] C.H. Kamphorst, P. Rodrigues, L.B. Barichello, A spectral approach to compute rarefied gas flows in Cylindrical geometry, International Nuclear Atlantic Conference – INAC2009 (2009).

[6] I. Graur, F. Sharipov, *Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction*, European Journal of Mechanics B Fluids. **27** (2008), 335–345. Zbl 1154.76376

[7] C.E. Siewert, *Poiseuille and Thermal-Creep Flow in a Cylindrical Tube*, Journal of Computational Physics **160** (2000), 470–480. Zbl 0963.76071

[8] O.V. Germider, V.N. Popov, *Mathematical modeling of heat transfer process in a rectangular channel in the problem of Poiseuille flow*, Siberian electronic mathematical reports. **13** (2016), 1401–1409. Zbl 1373.35213

[9] O.V. Germider, V.N. Popov, A.A. Yushkanov, *Mathematical simulation of heat and mass transfer processes in a rectangular channel depending on the accommodation coefficient of tangential momentum*, Siberian electronic mathematical reports. **15** (2018), 1011–1023. Zbl 1404.35316

[10] M.M.R. Williams, *A review of the rarefed gas dynamics theory associated with some classical problems in flow and heat transfer*, Z. angew. Math. Phys. **52** (2001), 500–516. Zbl 1017.76081

[11] J. Mason, D. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, CRC Press, Florida, 2003. Zbl 1015.33001

[12] E. Tohidi, *Application of Chebyshev collocation method for solving two classes of non-classical parabolic PDEs*, Ain Shams Engineering Journal, **6**:1 (2015), 373–379.

[13] J.P. Boyd, *Chebyshev and Fourier spectral methods*, Second Edition, DOVER Publications, Mineola, NY, 2001. Zbl 0994.65128

[14] M.N. Kogan, *Rarefied Gas Dynamics*, Plenum, New York, 1969.

[15] C.W. Clenshaw, A.R. Curtis, *A method for numerical integration on an automatic computer*, Num. Math. **2** (1960), 197–205. Zbl 0093.14006

Oksana Vladimirovna Germider
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
4,Severnaya Dvina Emb.,
Arkhangelsk, 163002, Russia
E-mail address: o.germider@narfu.ru

Vasily Nikolaevich Popov
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
4, Severnaya Dvina Emb.,
Arkhangelsk, 163002, Russia
E-mail address: v.popov@narfu.ru