S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 206–216 (2019) УДК 519.17
DOI 10.33048/semi.2019.16.012 MSC 05C25

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЙ ГРАФ С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ НЕ СУЩЕСТВУЕТ

И.Н. БЕЛОУСОВ, А.А. МАХНЕВ

Abstract. Distance-regular graph Γ of diameter 3 is called Shilla graph if Γ containes the second eigenvalue $\theta_1 = a_3$. In this case $a = a_3$ devides k and we set $b = b(\Gamma) = k/a$. Koolen and Park obtained the list of intersection arrays for Shilla graphs with $b = 3$. A. Brouwer with coauthors proved that graph with intersection array $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ does not exist. Q-polinomial Shilla graph with $b = 3$ has intersection array $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ or $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$. Early authors proved that graph with intersection array $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ does not exist.

We prove that graph with intersection array $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ does not exist.

Keywords: distance-regular graph, Shilla graph, triple intersection numbers.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{2, 3, ..., d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим

Belousov, I.N., Makhnev, A.A., Distance-regular graph with intersection array $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ does not exist.

© 2019 Белоусов И.Н., Махнев А.А.

Поступила 18 декабря 2018 г., опубликована 8 февраля 2019 г.

$a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ.

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e-кодом, если минимальное расстояний между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le k_d/\sum_{i=0}^{e} p^d_{id} + 1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a - b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. В [1] классифицированы графы Шилла с $b = 3$.

Предложение 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла с $b = 3$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$, $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$, $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$, $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$, $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$, $\{60, 42, 18; 1, 6, 40\}$, $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$, $\{93, 64, 24; 1, 6, 62\}$, $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$.*

Известно существование графа с массивом пересечений $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$ (это унитарный неизотропный граф с $q = 4$), но неизвестна единственность. Существует единственный граф с массивом пересечений $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$ (это граф Доро). В [2] доказано, что граф с массивом пересечений $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ не существует.

Графы с массивами пересечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ и $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ являются Q-полиномиальными. В [3] доказано, что граф с массивом персечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ не существует. В работе доказано, что граф с массивом персечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не существует.

Граф Γ с массивом персечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ имеет спектр $42^1, 14^{42}, 0^{210}, -7^{90}$ и $1 + 105 + 630 + 216 = 952$ вершины. Ввиду границы Дельсарта порядок клики в Γ не больше $1 - k/\theta_3 = 16$

Пусть C является l-кликой в Γ_3. Тогда подграфы $u^\perp$, $u \in C$ попарно не пересекаются, поэтому $106l$ не больше 952 и l не больше 8. Если $l = 8$, то C является 1-кодом, совершенным относительно последней окрестности.

Предложение 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не содержит 16-клик.*

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не существует.*

В доказательстве предложения 2 и теоремы 1 используются тройные числа пересечений [4].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right] = \left| \left\{ {u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right\} \right|$. Числа $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1r_2r_3]$ нет общих формул. Однако, в [4] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v), U = d(v,w), V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:

$\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p^U_{jh} - [0jh]$, $\sum_{l=1}^{d}[ilh] = p^V_{ih} - [i0h]$, $\sum_{l=1}^{d}[ijl] = p^W_{ij} - [ij0]$.

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p^W_{ij} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим $S_{ijh}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$. Если параметр Крейна $q^h_{ij} = 0$, то $S_{ijh}(u,v,w) = 0$.

В доказательстве теоремы используются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, Если u, v, w — вершины, попарно находящиеся на расстоянии 1 в Γ, $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $[111] = \varphi$ и $[222] = \psi$. Тогда верны равенства:*

(1) $[121] = [211] = [112] = p^1_{11} - 1 - \varphi$, $[122] = [212] = [221] = p^1_{12} - p^1_{11} + 1 + \varphi$;
(2) $[223] = [232] = [322] = p^1_{22} - p^1_{12} + p^1_{11} - 1 - \varphi - \psi$;
n(3) $[233] = [323] = [332] = p^1_{23} - p^1_{22} + p^1_{12} - p^1_{11} + 1 + \varphi + \psi$;
(4) $[333] = p^1_{33} - p^1_{23} + p^1_{22} - p^1_{12} + p^1_{11} - 1 - \varphi - \psi$.

Доказательство. Заметим, что $[13h] = [1h3] = 0$ для любого $1 \le h \le 3$.

Имеем $[111] + [121] + [131] = p^1_{11} - 1$, поэтому $[121] = p^1_{11} - 1 - \varphi$. Аналогично, $[211] = [112] = p^1_{11} - 1 - \varphi$.

Далее, $[121] + [122] + [123] = p^1_{12}$, поэтому $[122] = p^1_{12} - p^1_{11} + 1 + \varphi$. Аналогично, $[212] = [221] = p^1_{12} - p^1_{11} + 1 + \varphi$.

Теперь $[221] + [222] + [223] = p^1_{22}$, поэтому $[223] = p^1_{22} - p^1_{12} + p^1_{11} - 1 - \varphi - \psi$. Симметрично, $[232] = [322] = p^1_{22} - p^1_{12} + p^1_{11} - 1 - \varphi - \psi$.

Снова имеем $[213] + [223] + [233] = p^1_{23}$, поэтому $[233] = p^1_{23} - p^1_{22} + p^1_{12} - p^1_{11} + 1 + \varphi + \psi$. Симметрично, $[323] = [332] = p^1_{23} - p^1_{22} + p^1_{12} - p^1_{11} + 1 + \varphi + \psi$.

Наконец, $[331] + [332] + [333] = p^1_{33}$, поэтому $[333] = p^1_{33} - p^1_{23} + p^1_{22} - p^1_{12} + p^1_{11} - 1 - \varphi - \psi$. □

Лемма 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, u, v, w — вершины графа Γ, $d(u,v) = d(u,w) = 3$ и $d(v,w) = 1$. Положим $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $[122] = \alpha$, $[212] = \beta$, $[221] = \gamma$ и $[222] = \delta$. Тогда $\beta = \gamma$ и верны равенства:*

(1) $[132] = [123] = p^3_{12} - \alpha$, $[312] = [321] = p^1_{12} - \beta$ и $[311] = p^3_{31} - p^1_{12} + \beta - 1$;
(2) $[322] = p^1_{22} - \alpha - \delta$, $[232] = [223] = p^3_{22} - \delta - \beta$ и $[211] = p^3_{21} - p^1_{13} - \beta$;
(3) $[133] = p^3_{13} - p^3_{12} + \alpha$ и $[333] = p^3_{33} - p^1_{23} + p^3_{12} + p^3_{22} - \alpha - \beta - \delta$;
(4) $[233] = p^3_{23} - p^3_{22} + \delta + \beta$, $[332] = [323] = p^3_{32} - p^1_{22} - p^1_{12} + \alpha + \beta + \delta$.

Доказательство. Заметим, что $[11h] = [1h1] = 0$ и $[h13] = [h31] = 0$для любого $1 \le h \le 3$.

Имеем $[122] + [222] + [322] = p^1_{22}$, $[112] + [122] + [132] = p^3_{12}$, $[121] + [122] + [123] = p^3_{12}$, поэтому $[132] = [123] = p^3_{12} - [122] = p^3_{12} - \alpha$ и $[322] = p^1_{22} - \alpha - \delta$.

Далее, $[212]+[222]+[232]=p^3_{22}$, $[221]+[222]+[223]=p^3_{22}$, поэтому $\beta+[232]=\gamma+[223]=p^3_{22}-\delta$.

Аналогично, $[312]+[322]+[332]=p^3_{32}-[302]=p^3_{32}$, $[321]+[322]+[323]=p^3_{32}-[320]=p^3_{32}$, поэтому $[312]+[332]=[321]+[323]=p^3_{32}-[322]=p^3_{32}-p^1_{22}+\alpha+\delta$.

Теперь $[311]+[312]+[313]=p^3_{31}-[310]$, $[112]+[212]+[312]=p^1_{12}-[012]$, поэтому $[312]=p^1_{12}-[212]=p^1_{12}-\beta$, $[311]=p^3_{31}-p^1_{12}+\beta-1$. Симметрично, $[311]+[321]+[331]=p^3_{31}-[310]$, $[121]+[221]+[321]=p^1_{21}-[021]$, поэтому $[321]=p^1_{21}-[221]=p^1_{21}-\gamma$ и $[311]=p^3_{31}-p^1_{21}+\gamma$. Таким образом, $\beta=\gamma$, $[312]=[321]=p^1_{12}-\beta$ и $[232]=[223]=p^3_{22}-\beta-\delta$.

Имеем $[211]+[212]+[213]=p^3_{21}-[210]$, $[213]+[223]+[233]=p^3_{23}-[203]$, поэтому $[211]=p^3_{21}-\beta$ и $[233]=p^3_{23}-p^3_{22}+\delta+\beta$.

Наконец, $[331]+[332]+[333]=p^3_{33}$, $[133]+[233]+[333]=p^1_{33}-1$, $[313]+[323]+[333]=p^3_{33}$, $[123]+[223]+[323]=p^1_{23}$, поэтому $[323]=[332]=p^1_{23}-p^3_{12}-p^3_{22}+\alpha+\beta+\delta$, $[333]=p^3_{33}-[323]=p^3_{33}-p^1_{23}+p^3_{12}+p^3_{22}-\alpha-\beta-\delta$. и $[133]=p^1_{33}-1-[233]-[333]=p^1_{33}-1-p^3_{23}-p^3_{33}+p^1_{23}-p^3_{12}+\alpha$. □

Лемма 3. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, u,v,w — вершины графа Γ, $d(u,v)=d(u,w)=3$ и $d(v,w)=2$. Положим $[rst]=\left[\begin{smallmatrix}uvw\\ rst\end{smallmatrix}\right]$, $[122]=\alpha'$, $[212]=\beta'$, $[221]=\gamma'$, $[222]=\delta'$ и $[313]=\nu$. Тогда верны равенства:*

(1) $[132]=[123]=p^3_{12}-[122]=p^3_{12}-\alpha'$, $[312]=p^2_{12}-\beta'$, $[321]=p^2_{21}-\gamma'$, $[213]=p^2_{13}-\nu$, $[231]=p^2_{13}-\nu+\beta'-\gamma'$ и $[311]=p^3_{31}-p^2_{12}+\beta'-\nu$;

(2) $[322]=p^2_{22}-\alpha'-\delta'$, $[232]=p^3_{22}-\delta'-\beta'$, $[223]=p^3_{22}-\delta'-\gamma'$, $[211]=p^3_{21}-p^2_{13}+\nu-\beta'$;

(3) $[133]=p^3_{13}-p^3_{12}+\alpha'$, $[331]=\nu-\beta'+\gamma'$ и $[333]=p^3_{33}-p^2_{23}+p^3_{12}+p^3_{22}-\alpha'-\delta'-\gamma'-\nu$;

(4) $[233]=p^3_{23}-p^3_{22}-p^2_{13}+\delta'+\gamma'+\nu$, $[332]=p^3_{32}-p^2_{22}-p^2_{12}-1+\alpha'+\beta'+\delta'$, $[323]=p^3_{32}-p^2_{22}-p^2_{12}-1+\alpha'+\gamma'+\delta'$.

Доказательство. Заметим, что $[11h]=[1h1]=0$ для любого $1\le h\le 3$.

Имеем $[122]+[222]+[322]=p^2_{22}$, $[112]+[122]+[132]=p^3_{12}-[102]$, $[121]+[122]+[123]=p^3_{12}-[102]$, поэтому $[132]=[123]=p^3_{12}-[122]=p^3_{12}-\alpha'$ и $[322]=p^2_{22}-\alpha'-\delta'$.

Далее, $[212]+[222]+[232]=p^3_{22}-[202]$, $[221]+[222]+[223]=p^3_{22}-[202]$, поэтому $\beta'+[232]=\gamma'+[223]=p^3_{22}-\delta'$.

Аналогично, $[312]+[322]+[332]=p^3_{32}-[302]=p^3_{32}-1$, $[321]+[322]+[323]=p^3_{32}-[320]=p^3_{32}-1$, поэтому $[312]+[332]=[321]+[323]=p^3_{32}-[322]-1=p^3_{32}-p^2_{22}-1+\alpha'+\delta'$.

Теперь $[311]+[312]+[313]=p^3_{31}-[310]$, $[112]+[212]+[312]=p^2_{12}-[012]$, поэтому $[312]=p^2_{12}-[212]=p^3_{12}-\beta'$, $[311]+[313]=p^3_{31}-p^2_{12}+\beta'$. Симметрично, $[311]+[321]+[331]=p^3_{31}-[310]$, $[121]+[221]+[321]=p^2_{21}-[021]$, поэтому $[321]=p^2_{21}-[221]=p^2_{21}-\gamma$, $[311]+[331]=p^3_{31}-p^2_{21}+\gamma'$.

Имеем $[113]+[213]+[313]=p^2_{13}-[013]$, $[211]+[212]+[213]=p^3_{21}-[210]$, $[213]+[223]+[233]=p^3_{23}-[203]$, поэтому $[213]+[313]=p^2_{13}$, $[211]+[213]=p^3_{21}-\beta'$ и $[213]+[233]=p^3_{23}-p^3_{22}+\delta'+\gamma'$. Аналогично, $[131]+[231]+[331]=p^2_{31}-[031]$, $[211]+[221]+[231]=p^3_{21}-[210]$, $[231]+[232]+[233]=p^3_{23}$, поэтому $[231]+[331]=p^2_{31}$, $[211]+[231]=p^3_{21}-\gamma'$ и $[231]+[233]=p^3_{23}-p^3_{22}+\delta'+\beta'$.

Наконец, $[331]+[332]+[333]=p^3_{33}$, $[133]+[233]+[333]=p^2_{33}-1$, $[313]+[323]+[333]=p^3_{33}$, поэтому $[333]=p^3_{33}-[323]-[313]=p^3_{33}-p^2_{23}+[123]+[223]-\nu=p^3_{33}-p^2_{23}+p^3_{12}-\alpha'+p^3_{22}-\delta'-\gamma'-\nu=p^3_{33}-p^2_{23}+p^3_{12}+p^3_{22}-\alpha'-\delta'-\gamma'-\nu$. Так как $[113]+[123]+[133]=p^3_{13}$, то $[133]=p^3_{13}-[132]=p^3_{13}-p^3_{12}+\alpha'$.

С учетом равенства $[331] = \nu - \beta' + \gamma'$ имеем $[311] = -[331] + p^3_{31} - p^2_{21} + \gamma' = p^3_{31} - p^2_{21} + \beta' - \nu$. □

Лемма 4. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, u, v, w — вершины графа Γ, $d(u,v) = 1, d(u,w) = 2$ и $d(v,w) = 3$. Положим $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$, Положим $[112] = \varphi'$, $[221] = \psi'$ и $[333] = \nu'$. Тогда верны равенства:*

(1) $[113] = a_1 - \varphi'$, $[121] = c_2$, $[122] = a_2 - \varphi'$, $[123] = b_2 - a_1 - 1 + \varphi'$, $[212] = c_3 - 1 - \varphi'$, $[213] = a_3 - a_1 + \varphi'$;

(2) $[222] = p^1_{22} - \psi' - [223]$, $[223] = p^2_{23} - p^3_{33} + a_1 - a_3 + \nu' - \varphi'$, $[231] = a_2 - \psi'$, $[232] = p^3_{23} - [332]$, $[233] = p^3_{33} - \nu'$;

(3) $[321] = c_3 - c_2 - \psi'$, $[322] = p^2_{23} - [332]$, $[323] = p^2_{33} - \nu'$, $[331] = a_3 - a_2 + \psi'$ и $[332] = p^1_{33} - (a_3 - a_2 + \psi') - \nu'$.

Доказательство. Лемма следует из таблицы 4 [4] (с заменой 1 на ν' в некоторых местах).

□

1. Клики в Γ_3

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регуляный граф с массивом пересечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$. Тогда дуальная матрица собственных значений равна

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 51 & 441 & 459 \\ 1 & 17 & 63/5 & -153/5 \\ 1 & 0 & -56/5 & 51/5 \\ 1 & -17/2 & 49/2 & -17 \end{pmatrix}.$$

Лемма 5. *Для ненулевых чисел пересечений графа Γ верны равенства*

(1) $p^1_{11} = 32$, $p^1_{12} = 72$, $p^1_{22} = 414$, $p^1_{23} = 144$, $p^1_{33} = 72$;

(2) $p^2_{11} = 12$, $p^2_{12} = 69$, $p^2_{13} = 24$, $p^2_{22} = 416$, $p^2_{23} = 144$, $p^2_{33} = 48$;

(3) $p^3_{12} = 70$, $p^3_{13} = 35$, $p^3_{22} = 420$, $p^3_{23} = 140$, $p^3_{33} = 40$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 6. *Пусть u, v, w — вершины, попарно находящиеся на расстоянии 3 в Γ, $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$, $[122] = \alpha$, $[212] = \beta$, $[221] = \gamma$ и $[333] = \delta$. Тогда $\alpha = \beta = \gamma = (3\delta/4 + 202)/5$, где $\delta \in \{4, 24\}$.*

Доказательство. Из [2, предложение 2] получим равенства:

(1) $35 - [133] = [123] = [132] = 70 - \alpha$, $35 - [313] = [312] = [213] = 70 - \beta$, $35 - [331] = [231] = [321] = 70 - \gamma$;

(2) $\gamma - [232] = [233] - 70 = 4 - \alpha - \delta$, $\alpha - [223] = [323] - 70 = 4 - \beta - \delta$, $\beta - [322] = [332] - 70 = 4 - \gamma - \delta$;

(3) $[222] = 420 - \gamma - [223] = 424 - \alpha - \beta - \gamma - \delta$.

Для нашего графа имеем $q^1_{13} = q^1_{31} = q^3_{11} = 0$. Поэтому $S_{113}(u,v,w) = S_{131}(u,v,w) = S_{311}(u,v,w) = 0$.

Так как $Q_{21} = 0$, то слагаемые $[rst]$ в формуле
$S_{ijh}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$, имеющие два индекса 2, умножаются на 0, поэтому их можно опускать. Вычислим $S_{113}(u,v,w)$.

При нулевых r, s или t получим слагаемое $Q_{01}Q_{31}Q_{33} + Q_{31}Q_{01}Q_{33} + Q_{31}Q_{31}Q_{03} = 289 \cdot 51 + 289 \cdot 459/4$.

Далее, получим слагаемые

$Q_{11}Q_{21}Q_{33}[123] + Q_{21}Q_{31}Q_{13}[231] + Q_{31}Q_{11}Q_{23}[312] = -289 \cdot 51[312]/10$,

$Q_{11}Q_{31}Q_{23}[132] + Q_{21}Q_{11}Q_{33}[213] + Q_{31}Q_{21}Q_{13}[321] = -289 \cdot 51[132]/10$,

$Q_{11}Q_{31}Q_{33}[133]+Q_{31}Q_{11}Q_{33}[313]+Q_{31}Q_{31}Q_{13}[331] = 289\cdot 17([133]+[313])/2-289 \cdot 153[331]/20$,

$Q_{21}Q_{31}Q_{33}[233] + Q_{31}Q_{21}Q_{33}[323] + Q_{31}Q_{31}Q_{23}[332] = 289 \cdot 51[332]/20$.

Отсюда $S_{113}(u, v, w) = 289(51+459/4-51(70-\beta)/10-51(70-\alpha)/10+17(\alpha+\beta-70)/2-153(\gamma-35)/20+51(74-\gamma-\delta)/20) = 0$ и $68\alpha/5+68\beta/5-51\gamma/5-51\delta/20 = -51 - 459/4 + 2 \cdot 51 \cdot 7 + 17 \cdot 35 - 153 \cdot 35/20 - 51 \cdot 37/10 = 3434/5$.

Итак, $4\alpha + 4\beta - 3\gamma = 3\delta/4 + 202$.

Аналогично, $-3\alpha + 4\beta + 4\gamma = 3\delta/4 + 202$ и $4\alpha - 3\beta + 4\gamma = 3\delta/4 + 202$.

Отсюда $\alpha = \beta = \gamma = (3\delta/4+202)/5$, $\delta = 4\delta' \leq 40$. Поэтому $\delta \in \{4, 24\}$. Лемма доказана. □

По лемме 6 либо $\delta = 4$, $\alpha = 41$, либо $\delta = 24$, $\alpha = 44$.

Положим $\Sigma = \Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(v)$, $\Sigma^i = \Sigma \cap \Gamma_i(w)$, $\sigma_i = |\Sigma^i|$. Если $\delta = 4$, то $\sigma_1 = 6, \sigma_2 = 29, \sigma_3 = 4$, а если $\delta = 24$, то $\sigma_1 = 9, \sigma_2 = 6, \sigma_3 = 24$. Отсюда Σ не содержит 6-клик из Γ_3 (иначе $|\Sigma|$ не меньше $6 \cdot 7 = 42$). Если Σ содержит 5-клику S из Γ_3, то S содержит не более одной вершины степени 24 в Σ (иначе $|\Sigma|$ не меньше $3 \cdot 7 + 2 \cdot 10 = 41$).

Лемма 7. *Пусть Δ — множество вершин степени 29 в графе Σ_2, $\Phi = \Sigma_3$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $|\Delta| \geq 20$, то $28 \leq |\Delta|$;*

(2) *если $|\Delta| < 20$, то $|\Delta| \leq 14$.*

Доказательство. Так как число вершин нечетной степени в графе четно, то число $|\Delta|$ четно. Пусть $|\Delta| \geq 20$. Тогда число ребер между Δ и $\Sigma_2 - \Delta$ в графе Σ_2 не больше $6|\Sigma_2 - \Delta|$, поэтому некоторая вершина из Δ смежна не более чем с $6|\Sigma_2 - \Delta|/|\Delta|$ вершинами из $\Sigma_2 - \Delta$. Если $|\Sigma_2 - \Delta| \geq 14$, то степень некоторой вершины в Δ не меньше $29 - 84/26$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $|\Delta| < 20$. Рассмотрим граф $\Phi = \Sigma_3$. Тогда число ребер между Δ и $\Phi - \Delta$ в графе Φ не больше $4|\Delta|$, поэтому некоторая вершина из $\Phi - \Delta$ смежна не более чем с $4|\Delta|/|\Phi - \Delta|$ вершинами из Δ. Пусть Y_i — множество вершин из $\Phi - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ в графе Φ, $y_i = |Y_i|$. Если $|\Delta| = 18$, то степень некоторой вершины в $\Phi - \Delta$ не меньше $24 - 72/22$. Тогда $3y_3 + 4(22 - y_3) \leq 72$, поэтому $y_3 \geq 16$. Противоречие с тем, что Γ_3 не содержит 8-клик. Если $|\Delta| = 16$, то степень некоторой вершины в $\Phi - \Delta$ не меньше $24 - 64/24$. Далее, $y_1 + 2y_2 + 3(24 - y_1 - y_2) \leq 64$, поэтому $2y_1 + y_2 \geq 8$. С другой стороны, $y_1 + y_2/2$ не больше 4 и $y_1 = 0, y_2 = 8$, противоречие с тем, что в этом случае $\Phi - \Delta$ содержит 5-клику. □

Лемма 8. *Пусть Ψ — множество вершин степени 24 в графе Σ_3. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Σ_3 содержит 5-клику D, то $\{x^\perp \cap \Gamma_3(u) \mid x \in \{w\} \cup D\}$ образует разбиение $\Gamma_3(u)$ и D содержит не более одной вершины из Ψ и;*

(2) *если Σ_3 содержит 4-клику D из Ψ, то $\{x^\perp \cap \Sigma \mid x \in D\}$ образует разбиение Σ и Σ не содержит 5-клик из Γ_3;*

(3) *если $\Gamma_3(u)$ содержит такую 6-клику D, что для любых различных вершин $v, w \in D$ степень w в графе $(\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(v))_3$ равна 4, то $\{\Gamma_3(x) \cap \Gamma_3(u) - D \mid x \in D\}$ образует разбиение $\Gamma_3(u) - D$.*

Доказательство. Пусть Σ_3 содержит 5-клику D. Если D содержит более одной вершины из Ψ, то Σ_3 содержит не менее $3 \cdot 7 + 2 \cdot 10$ вершин, противоречие. Далее, подграфы $x^\perp \cap \Gamma_3(u)$ и $y^\perp \cap \Gamma_3(u)$ не пересекаются для различных вершин $x, y\{w\} \cup D\}$. Так как степень вершины в графе $\Gamma_3(u)$ равна 35, то $\{x^\perp \cap \Gamma_3(u) \mid x \in \{w\} \cup D\}$ образует разбиение $\Gamma_3(u)$;

Пусть Σ_3 содержит 4-клику D из Ψ. Тогда подграфы $x^\perp \cap \Sigma$ и $y^\perp \cap \Sigma$ не пересекаются для различных вершин $x, y \in D$. Так как степень вершины из Ψ в графе Σ равна 9, то $\{x^\perp \cap \Sigma \mid x \in D\}$ образует разбиение Σ.

Пусть Σ содержит 5-клику S из Γ_3. Тогда две вершины из S смежны с некоторой вершиной из D, противоречие.

Пусть $\Gamma_3(u)$ содержит такую 6-клику D, что для любых различных вершин $v, w \in D$ степень w в графе $(\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(v))_3$ равна 4. Тогда $\Gamma_3(x) \cap \Gamma_3(u) - D$ не пересекает $\Gamma_3(y) \cap \Gamma_3(u) - D$ для любых различных вершин $x, y \in D$, поэтому $\{\Gamma_3(x) \cap \Gamma_3(u) - D \mid x \in D\}$ образует разбиение $\Gamma_3(u) - D$. $\square$

2. Клики в Γ

В этом параграфе мы докажем, что Γ не содержит 16-клик. Пусть $b^+ = b_1/\theta_1 + 1 = 2$, $b^- = b_1/\theta_3 + 1 = -12$. По предложению 4.4.6 из [5] порядок клики в Γ не больше $1 - k/\theta_3 = 16$ и для индуцированного полного двудольного подграфа $K_{s,t}$ из Γ имеем $2st/(s+t) \le b^+ 1 = 3$. Если K является 16-кликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma - K$ смежна с 0 или $|K| + b^- = 4$ вершинами из K.

Лемма 9. *Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 1$. Положим $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$, $[111] = \varphi$ и $[222] = \psi$. Тогда верно равенство $\psi - 5\varphi - 187 = 0$.*

Доказательство. Для нашего графа по лемме 1 имеем

$[121] = [211] = [112] = 31 - \varphi$, $[122] = [212] = [221] = 41 + \varphi$;

$[223] = [232] = [322] = 373 - \varphi - \psi$, $[233] = [323] = [332] = -229 + \varphi + \psi$;

$[333] = 301 - \varphi - \psi \le 72$, поэтому

$\varphi \le 31$ и $229 \le \varphi + \psi \le 301$.

Для графа Γ имеем $q^1_{13} = q^1_{31} = q^3_{11} = 0$. Поэтому $S_{113}(u,v,w) = S_{131}(u,v,w) = S_{311}(u,v,w) = 0$. Напомним, что $[13h] = [1h3] = [h13] = 0$ для любого $1 \le h \le 3$.

Как и выше, слагаемые $[rst]$ в формуле $S_{ijh}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$, имеющие два индекса 2, можно опускать. Вычислим $S_{113}(u,v,w)$.

При нулевых r, s или t получим слагаемое $Q_{01}Q_{11}Q_{13}[011] + Q_{11}Q_{01}Q_{13}[101] + Q_{11}Q_{11}Q_{03}[110] = -34 \cdot 153 \cdot 51/5 + 17 \cdot 17 \cdot 459 = 3^4 \cdot 17^3/5$.

Далее, получим слагаемые

$Q_{11}Q_{11}Q_{13}[111] = -17 \cdot 17 \cdot 153\varphi/5$,

$Q_{11}Q_{11}Q_{23}[112] + Q_{11}Q_{21}Q_{13}[121] + Q_{21}Q_{11}Q_{13}[211] = 17 \cdot 17 \cdot 51(p^1_{11} - 1 - \varphi)/5 = 17 \cdot 17 \cdot 51(31 - \varphi)/5$,

$Q_{21}Q_{31}Q_{33}[233] + Q_{31}Q_{21}Q_{33}[323] + Q_{31}Q_{31}Q_{23}[332] = 289 \cdot 51(p^1_{23} - p^1_{22} + p^1_{12} - p^1_{11} + 1 + \varphi + \psi)/20 = 289 \cdot 51(-229 + \varphi + \psi)/20$,

$Q_{31}Q_{31}Q_{33}[333] = -289 \cdot 17(p^1_{33} - p^1_{23} + p^1_{22} - p^1_{12} + p^1_{11} - 1 - \varphi - \psi)/4 = -289 \cdot 17(301 - \varphi - \psi)/4$.

Отсюда $S_{113}(u,v,w) = 2 \cdot 17^3(\psi - 5\varphi - 187)/5$. Симметрично, $S_{131}(u,v,w) = S_{311}(u,v,w) = 2 \cdot 17^3(\psi - 5\varphi - 187)/5$. $\square$

По лемме 9 имеем $\varphi = (\psi - 187)/5$ и выполняются равенства

$[121] = [211] = [112] = 31 - \varphi = (342 - \psi)/5$, $[122] = [212] = [221] = 41 + \varphi = (18 + \psi)/5$;

$[223] = [232] = [322] = 373 - \varphi - \psi = (2052 - 6\psi)/5$, $[233] = [323] = [332] = -229 + \varphi + \psi = (6\psi - 1332)/5$;

$[333] = 301 - \varphi - \psi = (1692 - 6\psi)/5$.

С учетом неравенств $\varphi \leq 31$ и $229 \leq \varphi + \psi \leq 301$ получим $\psi \in \{222, 227, 232, ..., 282\}$, соответственно, $\varphi \in \{7, 8, 9, ..., 19\}$. Так как $p^1_{33} = 72$, то $[333] = (1692 - 6\psi)/5 \leq 72$ и

Лемма 10. *Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $d(u, v) = d(u, w) = 3$ и $d(v, w) = 1$. Положим $[rst] = \left[{uvw \atop rst} \right]$, $[122] = \alpha'$, $[212] = \beta'$, $[221] = \gamma'$ и $[222] = \delta'$. Тогда $\alpha' = 330 - \delta'$, $\beta' = \gamma' = \delta'/2 - 90$.*

Доказательство. Из леммы 2 следуют равенства:

$[132] = [123] = 70 - \alpha'$, $[312] = [321] = 72 - \beta'$ и $[311] = \beta' - 38$;

$[322] = 414 - \alpha' - \delta'$, $[232] = [223] = 420 - \beta' - \delta'$ и $[211] = 70 - \beta'$;

$[133] = \alpha' - 35$ и $[333] = 386 - \alpha' - \beta' - \delta'$;

$[233] = \delta' + \beta' - 280$ и $[332] = [323] = \alpha' + \beta' + \delta' - 346$.

Для графа Γ имеем $q^1_{13} = q^1_{31} = q^3_{11} = 0$. Поэтому $S_{113}(u, v, w) = S_{131}(u, v, w) = S_{311}(u, v, w) = 0$. Напомним, что $[11h] = [1h1] = 0$ и $[h13] = [h31] = 0$ для любого $1 \leq h \leq 3$.

Как и выше, слагаемые $[rst]$ в формуле $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \left[{uvw \atop rst} \right]$, имеющие два индекса 2, можно опускать. Вычислим $S_{113}(u, v, w)$.

При нулевых r, s или t получим слагаемое $Q_{01}Q_{31}Q_{33}[033] + Q_{31}Q_{01}Q_{13}[301] + Q_{31}Q_{11}Q_{03}[310] = 51 \cdot 17 \cdot 17/2 + 17 \cdot 51 \cdot 153/10 - 17 \cdot 17 \cdot 459/2 = 17^3(3/2 + 27/10 - 27/2) = 17^3(5 + 9 - 45)3/10 = -17^3 \cdot 3 \cdot 31/10$.

Далее, получим слагаемые

$Q_{11}Q_{11}Q_{23}[112] + Q_{11}Q_{21}Q_{13}[121] + Q_{21}Q_{11}Q_{13}[211] = 0$,

$Q_{11}Q_{11}Q_{33}[113] + Q_{11}Q_{31}Q_{13}[131] + Q_{31}Q_{11}Q_{13}[311] = 289 \cdot 153(\beta' - 38)/10$,

$Q_{11}Q_{21}Q_{33}[123] + Q_{21}Q_{31}Q_{13}[231] + Q_{31}Q_{11}Q_{23}[312] = -289 \cdot 51(72 - \beta')/10$,

$Q_{13}Q_{31}Q_{23}[132] + Q_{21}Q_{11}Q_{33}[213] + Q_{33}Q_{21}Q_{11}[321] = -289 \cdot 51(70 - \alpha')/10$,

$Q_{11}Q_{31}Q_{33}[133] + Q_{31}Q_{11}Q_{33}[313] + Q_{31}Q_{31}Q_{13}[331] = 289 \cdot 17(\alpha' - 35)/2$,

$Q_{21}Q_{31}Q_{33}[233] + Q_{31}Q_{21}Q_{33}[323] + Q_{31}Q_{31}Q_{23}[332] = 289 \cdot 51(\alpha' + \beta' + \delta' - 346)/20$,

$Q_{31}Q_{31}Q_{33}[333] = -289 \cdot 17(386 - \alpha' - \beta' - \delta')/4$.

Отсюда $S_{113}(u, v, w) == 2 \cdot 17^3(3\alpha' + 4\beta' + \delta' - 630)/5$.

Аналогично, $S_{131}(u, v, w) = 2 \cdot 17^3(3\alpha' + 4\beta' + \delta' - 630)/5$ и $S_{311}(u, v, w) = 17^3(-\alpha' - 6\beta' + 2\delta' - 210)/5$.

Отсюда $\alpha' = 330 - \delta'$, $\beta' = \delta'/2 - 90$. □

По лемме 10 верны равенства:

$[132] = [123] = 70 - \alpha' = \delta' - 260$, $[312] = [321] = 72 - \beta' = 162 - \delta'/2$ и $[311] = \beta' - 38 = \delta'/2 - 128$;

$[322] = 414 - \alpha' - \delta' = 84$, $[232] = [223] = 420 - \beta' - \delta' = 510 - 3\delta'/2$ и $[211] = 70 - \beta' = 160 - \delta'/2$;

$[133] = \alpha' - 35 = 295 - \delta'$ и $[333] = 386 - \alpha' - \beta' - \delta' = 146 - \delta'/2$;

$[233] = \delta' + \beta' - 280 = 3\delta'/2 - 370$ и $[332] = [323] = \alpha' + \beta' + \delta' - 346 = \delta'/2 - 106$.

Отсюда $130 \leq \delta'/2 \leq 146$ и $38 \leq \alpha'$.

Лемма 11. *Пусть K является 16-кликой из Γ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $|\Gamma_1(K)|=360$, $|\Gamma_2(K)|=576$, *вершина из* $\Gamma_2(K)$ *смежна с* 30 *вершинами из* $\Gamma_1(K)$, *вершина из* $\Gamma_1(K)$ *смежна с* 48 *вершинами из* $\Gamma_2(K)$;

(2) *для вершины* z *из* $\Gamma_2(K)$ *имеем* $|K\cap\Gamma_3(z)|=6$.

Доказательство. Пусть в схеме $(K,\Gamma_1(K))$ точка и блок инцидентны, если они смежнв в Γ. Тогда $(K,\Gamma_1(K))$ является $2-(16,4,18)$ схемой, поэтому каждая точка инцидентна ровно $r=90$ блокам и $|\Gamma_1(K)|=16\cdot 90/4=360$. Отсюда $|\Gamma_2(K)|=952-16-360=576$.

Пусть вершина $z\in\Gamma_2(K)$ смежна с β вершинами из $\Gamma_1(K)$. Тогда $|K\cap\Gamma_2(z)|=4\beta/12$ и $|K\cap\Gamma_3(z)|=l=16-\beta/3$.

Пусть в схеме $(K,\Gamma_2(K))$ точка и блок инцидентны, если они находятся на расстоянии 3 в Γ. Тогда $(K,\Gamma_2(K))$ является $2-(16,l,72)$ схемой, в которой каждая точка инцидентна ровно 216 блокам и число блоков равно 576. Отсюда $16\cdot 216=576l$, $l=6$ и $\beta=30$.

Теперь вершина из $\Gamma_1(K)$ смежна с $576\beta/360=48$ вершинами из $\Gamma_2(K)$. $\square$

Пусть $z\in\Gamma_2(K)$ и $u,v\in\Gamma_3(z)$. По лемме 10 имеем $[122]=\alpha'=30$. Противоречие с тем, что $38\le\alpha'$.

Предложение 2 доказано.

3. Доказательство теоремы

В этом параграфе мы докажем теорему 1.

Лемма 12. *Пусть* u,v,w *— вершины графа* Γ, $d(u,v)=d(u,w)=3$ *и* $d(v,w)=2$. *Положим* $[rst]=\left[{uvw\atop rst}\right]$, $[122]=\alpha''$, $[212]=\beta''$, $[221]=\gamma''$, $[222]=\delta''$ *и* $[313]=\nu$. *Тогда* $\alpha''=-\delta''-9\nu/2+358$, $\beta''=\gamma''=\delta''/2+15\nu/4-120$.

Доказательство. Из леммы 3 следуют равенства:

$[132]=[123]=70-\alpha''$, $[312]=69-\beta''$, $[321]=69-\gamma''$, $[213]=24-\nu$, $[231]=24-\nu+\beta''-\gamma''$ и $[311]=-34+\beta''-\nu$;

$[322]=416-\alpha''-\delta''$, $[232]=420-\delta''-\beta''$, $[223]=420-\delta''-\gamma''$, $[211]=46+\nu-\beta''$;

$[133]=\alpha''-35$, $[331]=\nu-\beta''+\gamma''$ и $[333]=386-\alpha''-\delta''-\gamma''-\nu$;

$[233]=-304+\delta''+\gamma''+\nu$, $[332]=-346+\alpha''+\beta''+\delta''$, $[323]=-346+\alpha''+\gamma''+\delta''$.

Для нашего графа имеем $q^1_{13}=q^1_{31}=q^3_{11}=0$. Поэтому $S_{113}(u,v,w)=S_{131}(u,v,w)=S_{311}(u,v,w)=0$. Напомним, что $[11h]=[1h1]=0$ для любого $1\le h\le 3$.

Как и выше слагаемые $[rst]$ в формуле $S_{ijh}(u,v,w)=\sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\left[{uvw\atop rst}\right]$, имеющие два индекса 2, можно опускать. Вычислим $S_{113}(u,v,w)$.

При нулевых r,s или t получим слагаемое $Q_{01}Q_{31}Q_{33}[033]+Q_{31}Q_{01}Q_{23}[302]+Q_{21}Q_{31}Q_{03}[320]=3\cdot 17^3/5$.

Далее, получим слагаемые

$Q_{11}Q_{11}Q_{23}[112]+Q_{11}Q_{21}Q_{13}[121]+Q_{21}Q_{11}Q_{13}[211]=0$,

$Q_{11}Q_{11}Q_{33}[113]+Q_{11}Q_{31}Q_{13}[131]+Q_{31}Q_{11}Q_{13}[311]=289\cdot 153(-34+\beta''-\nu)/10$,

$Q_{11}Q_{21}Q_{33}[123]+Q_{21}Q_{31}Q_{13}[231]+Q_{31}Q_{11}Q_{23}[312]=-289\cdot 51(69-\beta'')/10$,

$Q_{13}Q_{31}Q_{23}[132]+Q_{21}Q_{11}Q_{33}[213]+Q_{33}Q_{21}Q_{11}[321]=-289\cdot 51(70-\alpha'')/10$,

$Q_{11}Q_{31}Q_{33}[133]+Q_{31}Q_{11}Q_{33}[313]+Q_{31}Q_{31}Q_{13}[331]=289\cdot 17(-35+\alpha'')/2+289\cdot 17\nu/2-289\cdot 153(\nu-\beta''+\gamma'')/20$,

$Q_{21}Q_{31}Q_{33}[233]+Q_{31}Q_{21}Q_{33}[323]+Q_{31}Q_{31}Q_{23}[332]=289\cdot 51(-346+\alpha''+\beta''+\delta'')/20$,

$Q_{31}Q_{31}Q_{33}[333] = -289\cdot 17(386-\alpha''-\delta''-\gamma''-\nu)/4$.

Отсюда $S_{113}(u,v,w) = (6\cdot 17^3\alpha''+9\cdot 17^3\beta''+2\cdot 17^3\delta''-17^3\gamma''-3\cdot 17^3\nu-4\cdot 9\cdot 11\cdot 17^3)/5 = 17^3(6\alpha''+9\beta''+2\delta''-\gamma''-3\nu-4\cdot 9\cdot 11)/5$.

Аналогично, $S_{131}(u,v,w) = 17^3(6\alpha''+2\beta''+2\delta''+6\gamma''-3\nu-4\cdot 9\cdot 11)/5$ и $S_{311}(u,v,w) = 17^3(-\alpha''-12\beta''+2\delta''+6\gamma''-18\nu-2\cdot 181)/5$.

Из $S_{113}(u,v,w) = S_{131}(u,v,w) = S_{311}(u,v,w) = 0$ следует, что $\alpha'' = -\delta''-9\nu/2+358, \beta'' = \gamma'' = \delta''/2+15\nu/4-120$. □

Из леммы 12 следуют равенства:

$[132] = [123] = 70-\alpha'' = \delta''+9\nu/2-288$, $[312] = [321] = 69-\beta'' = 189-\delta''/2-15\nu/4$, $[213] = [231] = 24-\nu$ и $[311] == -34+\beta'-\nu = \delta''/2+11\nu/4-154$;

$[322] = 416-\alpha''-\delta'' = 58+9\nu/2$, $[232] = [223] = 420-\delta''-\beta'' = 540-3\delta''/2-15\nu/4$, $[133] = \alpha''-35 = -\delta''-9\nu/2+323$, $[331] = \nu$ и $[333] = 386-\alpha''-\delta''-\beta''-\nu = 148-\delta''/2-\nu/4$;

$[233] = -304+\delta''+\beta''+\nu = -424+3\delta''/2+19\nu/4$, $[332] = [323] = -346+\alpha''+\beta''+\delta'' = -108-3\nu/4+\delta''/2$.

Далее, $\nu \le 24$, $35 \le \alpha'' \le 70$ (равносильно $288 \le \delta''+9\nu/2 \le 323$) и $34+\nu \le \beta'' \le 69$ (равносильно $154+\nu \le \delta''/2+15\nu/4 \le 189$). С другой стороны, $144-9\nu/4 \le \delta''/2 \le 148-\nu/4$, $108 \le \delta''/2-\nu/4$ и в случае $\nu = 0$ имеем $154 \le \delta''/2 \le 148$, противоречие.

В случае $\nu = 24$ имеем $114 \le \delta''/2 \le 99$, противоречие. В случае $\nu = 20$ имеем $113 \le \delta''/2 = 114$ и $[333] \in \{29,30\}$, противоречие с тем, что $[313]+[333] \le 40$. В случае $\nu = 16$ имеем $112 \le \delta''/2 \le 129$. Так как $[333] = 144-\delta''/2 \le 24$, то $120 \le \delta''/2 \le 129$, противоречие с тем, что $[311] = \delta''/2-90 \le 12$.

В случае $\nu = 12$ имеем $117 \le \delta''/2 \le 135$. С учетом равенства $[311] = \delta''/2-121$ имеем $121 \le \delta''/2 \le 133$ и $12 \le [333] = 145-\delta''/2 \le 24$.

В случае $\nu = 8$ имеем $135 \le \delta''/2 \le 143$ и $3 \le [333] = 146-\delta''/2 \le 11$.

В случае $\nu = 4$ имеем $136 \le \delta''/2 \le 147$ С учетом равенства $[311] = \delta''/2-143$ имеем $143 \le \delta''/2 \le 147$ и $0 \le [333] = 147-\delta''/2 \le 4$.

Лемма 13. *Для любой вершины $z \in \Gamma$ подграф $\Gamma_3(z)$ не содержит 3-клик.*

Доказательство. Пусть z — такая вершина графа Γ, что $\Omega = \Gamma_3(z)$ содержит 3-клику $\{u,v,w\}$. Положим $\{rst\}' = \Omega \cap \left\{ {uvw \atop rst} \right\}$, $[rst]' = |\{rst\}'|$, $[111]' = \varphi'$ и $[222]' = \psi'$. Если X_i — множество вершин из $\Omega - \{u,v,w\}$, смежных в Ω_2 точно с i вершинами из $\{u,v,w\}$, $x_i = |X_i|$, то $x_3 = \psi'$, $x_2 = 3(83-\psi')$, $x_1 = 3(\psi'-28)$, $x_0 = [111]'+[333]' = 213-\psi'-3(83-\psi')-3(\psi'-28) = 48-\psi'$.

Далее, $X_2 \cap \Gamma_2(v) \cap \Gamma_2(w) = \{122\}' \cup \{322\}'$, поэтому $[122]'+[322]' = 83-\psi'$. Заметим, что $\Omega(u)-\{111\}'$ содержится в $\Gamma_2(v)\cap\Gamma_2(w)$, следовательно, $X_2 \cap \Gamma_2(v) \cap \Gamma_2(w)$ содержит $35-[111]'$ вершин из $\Omega(u)$ и $83-\psi'-(35-[111]') = 48-\psi'+[111]' = 48-\psi'+(-[333]'+48-\psi')$ вершин из $\Omega_3(u)$. Отсюда $[322]' = 96-2\psi'-[333]'$ и $2\psi'+[333]' \le 96$. С другой стороны, $X_1 \cap \Gamma_2(v) = \{323\}'$ и $\psi'-28 = [323]'$.

Ввиду леммы 10 имеем $\left[{zuv \atop 311} \right] + \left[{zuv \atop 333} \right] = 146-\delta'/2+\delta'/2-128 = 18$, поэтому $[111]'+[333]' \le 17$ и $31 \le \psi' \le 40$.

Теперь $3 \le \psi'-28 = [323]' \le 12$, $[333]' \le 48-\psi'$ и $40 = [323]'+[332]'+[333]' \le 2(\psi'-28)+48-\psi' = \psi'-8$, противоречие. □

Завершим доказательство теоремы 1. Пусть u — вершина графа Γ, v,w — смежные вершины из $\Omega = \Gamma_3(u)$, $[rst] = \left[{uvw \atop rst} \right]$, $[122] = \alpha'$, $[212] = \beta'$, $[221] = \gamma'$ и

$[222] = \delta'$. По лемме 10 имеем $\alpha' = 330 - \delta'$, $\beta' = \gamma' = \delta'/2 - 90$ и $130 \leq \delta'/2 \leq 146$. Далее, $[311] = \delta'/2 - 128 = 0$ и $\delta'/2 = 128$, противоречие.

Теорема 1 доказана.

References

[1] J.H. Koolen, J. Park , *Shilla distance-regular graphs*, Europ. J. Comb., **31**:8 (2010), 2064–2073. MR2718281

[2] A.E. Brouwer, S. Sumaloj, C. Worawannotai, *The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays* $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ *and* $\{36, 28, 4; 1, 2, 24\}$, Australasian J. Comb., **66** (2016), 330–332. MR3556137

[3] I.N. Belousov, A.A. Makhnev, *Distance-regular graphs with intersection arrays* $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ *and* $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ *do not exist*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1506–1512.

[4] A. Jurisic, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr, **65**:1–2 (2012), 29–47. MR2943642

[5] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989. MR1002568

Ivan Nikolaevich Belousov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS,
16, S.Kovalevskaya str.,
Yekaterinburg, 620990, Russia
E-mail address: i_belousov@mail.ru

Aleksandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS,
16, S.Kovalevskaya str.,
Yekaterinburg, 620990, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru