S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 2090–2097 (2019) УДК 515.124.2
DOI 10.33048/semi.2019.16.148 MSC 30L99, 53C23, 54D10

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ДЛЯ (q_1, q_2)-КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А.В. ГРЕШНОВ, Р.И. ЖУКОВ

Abstract. In (q_1, q_2)-quasimetric space (X, d) we proved the completeness theorem for (q_1, q_2)-quasimetric space $(\mathcal{M}_{\overline{d}}, H)$, where $\mathcal{M}_{\overline{d}}$ is the set of all $\overline{d}$-closed sets, $\overline{d}$ is conjugate to d (q_2, q_1)-quasimetric, H is the Hausdorff distance.

Keywords: (q_1, q_2)-quasimetric space, completeness, conjugate (q_2, q_1)-quasimetric, Hausdorff distance.

1. Введение

Настоящая статья является продолжением работы [1], где были доказаны теоремы о полноте (q_1, q_2)-квазиметрических пространств, определенных на совокупности $\mathcal{M}_d(X)$ замкнутых подмножеств (q_1, q_2)-квазимтрического пространства (X, d), снабженной соответствующими аналогами расстояния по Хаусдорфу. Для того, чтобы сформулировать полученные там результаты, приведем некоторые определения.

(q_1, q_2)-квазиметрическим пространством [3] называется пара (X, d), где X — некоторое множество, $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup 0$ — некоторая функция такая, что для нее выполняются *аксиома тождества*

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

и (q_1, q_2)-*обобщенное неравенство треугольника*, т. е.

$$d(x, y) \leq q_1 d(x, z) + q_2 d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X.$$

Greshnov, A.V., Zhukov, R.I., Completeness theorem in (q_1, q_2)-quasimetric spaces.

© 2019 Грешнов А.В., Жуков Р.И.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проект № 0314-2016-0006.

Поступила 1 декабря 2019 г., опубликована 27 декабря 2019 г.

Выражение $d(x, y)$ обозначает (q_1, q_2)-квазирасстояние именно *от точки x до точки y*. Символом $\overline{d}$ мы обозначаем *сопряженную к d* (q_2, q_1)-квазиметрику [3], которая определяется как $\overline{d}(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in X$. Если $q_1 = q_2 = 1$, то (X, d) является квазиметрическим пространством [2].

Если для (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, d) выполняется следующее условие

$$d(x, y) \leq q_0 d(y, x) \quad \forall x, y \in X,$$

где константа q_0 не зависит от выбора точек x, y, то называем (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, d) *q_0-симметрическим*. Множества

$$B_d^o(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}, \quad B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

будем называть называть d-открытым и d-замкнутым шарами с центром в точке x радиуса r соответственно. Множество $U \subset X$ мы будем называть *d-открытым*, если для любой точки $u \in U$ найдется число $r_u > 0$ такое, что $B_d^o(u, r_u) \subset U$. Так определенные d-открытые множества, очевидно, задают на X топологию, которую будем обозначать через τ_d. Множество называется *d-замкнутым*, если его дополнение открыто. (Заметим, что множества $B_d^o(x, r)$ и $B_d(x, r)$ могут и не быть d-открытыми и d-замкнутыми.) Точка x_0 называется *точкой d-прикосновения* множества $A \subset (X, d)$, если для любого $\varepsilon > 0$ мы имеем $A \cap B_d^o(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$. Точка x_0 называется *d-предельной точкой* множества $A \subset (X, d)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_\varepsilon \in A$, $x_\varepsilon \neq x_0$, такая, что $x_\varepsilon \in B_d^o(x_0, \varepsilon)$. Несложно видеть, что: множество $A \subset (X, d)$ d-замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки; множество $A \subset (X, d)$ d-замкнуто тогда и только тогда, когда множество $X \setminus A$ открыто.

В дальнейшем символом $\mathcal{M}_d(X)$ мы обозначаем множество всех d-замкнутых в смысле (q_1, q_2)-квазиметрики d подмножеств множества X.

Определение 1. *Расстоянием от множества $A \subset X$ до множества $B \subset X$ на (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве (X, d) называется величина*

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Определение 2. *(q_1, q_2)-отклонением по Хаусдорфу множества $A \subset X$ от множества $B \subset X$ на (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве (X, d) называется величина*

$$h^+(A, B) = \sup_{a \in A} \operatorname{dist}(a, B).$$

Определение 3. *Расширенной (q_1, q_2)-квазиметрикой Хаусдорфа на (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве (X, d) называется величина*

$$h(A, B) = \max\{h^+(A, B),\ h^+(B, A)\} \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_d(X).$$

Утверждение 1 ([1]). *Пусть (X, d) — (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство. Тогда $(\mathcal{M}_d(X), h)$ является симметрическим (q_1, q_2)-квазиметрическим пространством.*

Определение 4. *Последовательность $\{x_i\} \subset (X, d)$ d-сходится к точке $x_0 \in X$ ($x_i \to_{i \to \infty} x_0$), если каждое множество $B_d^o(x_0, \varepsilon)$ содержит все точки x_i, начиная с некоторой; точка x_0 в этом случае называется d-пределом последовательности $\{x_i\}$. По-другому, последовательность $\{x_i\}$ d-сходится к x_0, если $\lim\limits_{i \to \infty} d(x_0, x_i) = 0$.*

Определение 5. *Последовательность $\{x_n\}$, принадлежащая (q_1, q_2)-квазиметрическому пространству (X, d), называется правой фундаментальной последовательностью или правой последовательностью Коши (левой фундаментальной последовательностью или левой последовательностью Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $N < m < n$ выполняется*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (d(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Определение 6 ([3])**.** *(q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, d) называется полным, если его любая правая последовательность Коши имеет d-предел.*

Определение 7 (ср. с [8])**.** *(q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, d) называется полным слева, если его любая левая последовательность Коши имеет d-предел, принадлежащий X.*

Определение 8. *Функция f, определенная на (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве (X, d), называется полунепрерывной сверху (снизу) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $r_{x_0,\varepsilon} > 0$ такое, что*

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \big(f(x_0) < f(x) + \varepsilon\big) \quad \forall x \in B_d^o\big(x_0, r_{x_0,\varepsilon}\big).$$

Если функция f одновременно полунепрерывна сверху и снизу в точке x_0, то говорим, что f непрерывна в точке x_0. Функция $F(x, y) : X \times X \to \mathbb{R}$ (полу)непрерывна (сверху или снизу) по первому аргументу, если при каждом фиксированном y_0 (полу)непрерывна (сверху или снизу) функция $F_1(x) = F(x, y_0)$. Точно также определяется (полу)непрерывность (сверху или снизу) функции $F(x, y)$ и по второму аргументу.

Теорема 1 ([1])**.** *Пусть (X, d) — полное (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство, где функция d полунепрерывна снизу по второму аргументу. Тогда $(\mathcal{M}_d(X), h)$ является полным.*

Говорим, что (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, d) удовлетворяет **свойству Cl**, если для любых $A, B \in \mathcal{M}_d(X)$ таких, что

$$B \subseteq N_\varepsilon(A) = \bigcup_{x \in A} B_d^o(x, \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

выполняется $B \subseteq A$.

Обозначим $H^+(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid B \subseteq N_\varepsilon(A)\}$.

Теорема 2 ([1])**.** *Пусть полное слева (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, d) удовлетворяет свойству Cl. Тогда (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство $(\mathcal{M}_d(X), g)$ является полным, где*

$$g(A, B) = h^+(A, B) + H^+(A, B).$$

В работе [1] изучался вопрос о достаточных условиях метрического характера, при которых (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, d) удовлетворяет свойству Cl. Для этого там использовались следующие понятия.

Определение 9. *Множество $A \subset (X, d)$ называется d-ограниченным ($\overline{d}$-ограниченным), если найдется константа K такая, что $d(x, y) < K$ $\forall y \in A$ ($\overline{d}(x, y) < K$ $\forall y \in A$) для некоторой точки $x \in X$.*

Определение 10. *Назовем (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, d) одинаково ограничивающим, если любое d-ограниченное множество $A \subset X$ является $\overline{d}$-ограниченным, и наоборот.*

Определение 11. *(q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, d) удовлетворяет $(\overline{d}, d)$-свойству Гейне — Бореля, если из любой $\overline{d}$-ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ можно выбрать d-сходящуюся к некоторому элементу $x \in X$ подпоследовательность $\{x_{n_m}\}$.*

Аналогично можно определить (d, d)-*свойство Гейне — Бореля*, меняя в определении 11 соответственно $\overline{d}$-ограниченность на d-ограниченность, и т. п.

В § 2 мы приводим примеры 2–4, иллюстрирующие определения 9–11.

Приведем аналог «обычного» определения метрики Хаусдорфа для случая (q_1, q_2)-квазиметрических пространств.

Определение 12. *(q_1, q_2)-расстоянием Хаусдорфа между подмножествами A_1, A_2 (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, d) называется величина*

$$H(A_1, A_2) = \max\{H^+(A_1, A_2),\ H^+(A_2, A_1)\}.$$

Известно, см. [6], что на метрических пространствах понятие расширенной метрики Хаусдорфа является переформулировкой понятия обычной метрики Хаусдорфа. Однако, из-за отсутствия аксиомы симметрии в определении (q_1, q_2)-квазиметрики, функции множеств H и h принципиально различны, их билипшицева эквивалентность ниоткуда не следует на (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах; в § 2 нами построен соответствующий пример 1. Нами показано (см. свойство 1), что на совокупности множеств $\mathcal{M}_{\overline{d}}(X)$ функция расстояния $H(A, B)$ является (q_1, q_2)-квазиметрикой.

Основным результатом нашей работы является следующая

Теорема 3. *Пусть (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, d) является полным слева. Тогда $(\mathcal{M}_{\overline{d}}(X), H)$ является полным.*

Теорема 3 дополняет результаты работы [1].

Настоящая работа основана на подходах и технике, развитой в [3, 4, 5]. Также следует отметить работу [7], в которой была изучена топология *f-квазиметрических пространтв*, включающих в себя и (q_1, q_2)-квазиметрические пространства; в [7], в частности, читатель может найти для себя необходимые разъяснения и иллюстрации тех или иных топологических объектов f-квазиметрических пространств.

2. Некоторые примеры (q_1, q_2)-квазиметрических пространств

Пример 1. Рассмотрим последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Обозначим $A = \{a_n\}$, $B = \{b_n\}$. Определим на множестве $X = A \cup B$ функцию расстояния d следующим образом: для всевозможных $m, n \in \mathbb{N}$ полагаем

$$d(a_n, b_m) = \frac{1}{m}, \quad d(b_m, a_n) = \frac{1}{n}, \quad d(a_m, a_n) = d(b_m, b_n) = \frac{1}{n},$$
$$d(a_n, a_n) = d(b_n, b_n) = 0.$$

Мы имеем

$$d(a_m, b_n) = \frac{1}{n} \le d(a_m, b_k) + d(b_k, b_n) = \frac{1}{k} + \frac{1}{n},$$

$$d(a_m, a_n) = \frac{1}{n} \le d(a_m, b_k) + d(b_k, a_n) = \frac{1}{k} + \frac{1}{n},$$

откуда следует, что (X, d) является квазиметрическим пространством. Для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ мы имеем

$$\lim_{m\to\infty} d(a_n, b_m) = 0, \quad \lim_{m\to\infty} d(a_n, b_m) = 0,$$

откуда следует, что для любого a_n

$$\operatorname{dist}(a_n, B) = 0 \Rightarrow h^+(A, B) = 0;$$

точно также можно показать, что $h^+(B, A) = 0$. Поэтому $h(A, B) = 0$. С другой стороны, для любого n мы имеем

$$d(a_n, b_1) = d(b_n, a_1) = 1,$$

откуда следует, что

$$H(A, B) = 1.$$

Пример 2. Из d-ограниченности множества не следует его $\overline{d}$-ограниченность; в качестве примера рассмотрим квазиметрическое пространство $([0, 1/2], d)$, где

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & y = 0, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, & 0 < x < y, \\ x - y, & x > y > 0, \\ y, & x = 0, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность точек $\{x_n\} \subset [0, 1/2]$, сходящуюся в обычном смысле к 0. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} d(0, x_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{d}(0, x_n) = \infty$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $\rho : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ такую, что

1^0 $\rho(0, \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in [0, \frac{1}{2}]$,
2^0 $\rho(0, \alpha) = 1 - \alpha, \quad \alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$,
3^0 $\rho(\alpha, 1) = \alpha, \quad \alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$,
4^0 $\rho(\alpha, 1) = 1 - \alpha, \quad \alpha \in [0, \frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \rho(0, 1) = 1$,
5^0 $\rho(1, \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in (0, \frac{1}{2}]$,
6^0 $\rho(1, \alpha) = 1 - \alpha, \quad \alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$,
7^0 $\rho(\alpha, 0) = \alpha, \quad \alpha \in [\frac{1}{2}, 1] \quad \Rightarrow \rho(1, 0) = 1$,
8^0 $\rho(\alpha, 0) = 1 - \alpha, \quad \alpha \in (0, \frac{1}{2}]$,
9^0 $\rho(\alpha, \alpha) = 0, \quad \alpha \in [0, 1]$,
10^0 $\rho(\beta, \gamma) = |\beta - \gamma|, \quad \beta, \gamma \in (0, 1)$.

Можно проверить, что функция ρ удовлетворяет обычному неравенству треугольника. Из 1^0–8^0 вытекает, что для ρ обобщенная симметрия не может быть выполнена ни для какой константы q_0. Отметим, что любая последовательность точек $\{x_n\}$, сходящаяся в обычном смысле к 0 или к 1, имеет два d-предела — элементы 0 и 1. Квазиметрическое пространство $([0, 1], \rho)$ является одинаково ограничивающим в силу того, что расстояния $\rho(x, y)$, $\overline{\rho}(x, y)$ между его любыми двумя элементами не превосходит 1, и удовлетворяет (d, d)-свойству Гейне — Бореля.

Пример 4. В евклидовой плоскости рассмотрим единичную окружность S, на которой определим следующую квазиметрику d: расстояние $d(x, y)$ между любыми двумя точкам $x, y \in S$ равно длине пути, который мы проходим против

часовой стрелке от точки x до точки y. Понятно, что $B_d^{\circ}(x,r)$ — направленная дуга $l_{x,y}$ длины r с началом в точке x без своего конца y, соответственно $B_d(x,r)$ — направленная дуга $\hat{l}_{x,y}$ длины r с началом в точке x вместе со своим концом y. Рассмотрим некоторую последовательность точек $\{x_n\}$ такую, что $d(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1000000^n}$. Обозначим $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Множество A является d-замкнутым, т. к. содержит все свои предельные точки. У последовательности $\{x_n\}$ есть в обычном смысле предел $x_0 \in S$. Обозначим $B = A \cup \{x_0\}$. Множество B является d-замкнутым. Мы имеем $A \subset B$, с другой стороны, $B \subset \bigcup\limits_{x\in A} B_d^{\circ}(x,\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$; т. е. для (S,d) условие Cl не выполняется. Попутно заметим, что $(\bar{d}, d)$-свойство Гейне — Бореля не выполняется для (S,d) — последовательность $\{x_n\}$ не имеет d-предела.

3. Функция расстояния $H(A,B)$

Свойство 1. *Пусть (X,d) — (q_1,q_2)-квазиметрическое пространство. Тогда*

1^0 $H(A,B) \geq 0 \quad \forall A,B \subset (X,d)$;

2^0 $H(A,B) = H(B,A) \quad \forall A,B \subset (X,d)$;

3^0 $H^+(A,C) \leq q_1 H^+(A,B) + q_2 H^+(B,C) \quad \forall A,B,C \subset (X,d)$;

4^0 $H(A,C) \leq q_1 H(A,B) + q_2 H(B,C) \quad \forall A,B,C \subset (X,d)$;

5^0 *пусть* $A,B \in \mathcal{M}_{\bar{d}}(X)$, *тогда* $H^+(A,B) = 0 \Rightarrow A \subseteq B$;

Доказательство. Пп. 1^0, 2^0 очевидны.

3^0 Пусть $H(A,B) = \varepsilon_1$, $H(B,C) = \varepsilon_2$. Тогда для любого $\delta > 0$ выполняется

$$B \subset N_{\varepsilon_1+\delta}(A), \quad C \subset N_{\varepsilon_2+\delta}(B),$$

тогда

$$C \subset N_{\varepsilon_3}(A), \quad \varepsilon_3 = q_1\varepsilon_1 + q_2\varepsilon_2 + (q_1+q_2)\delta,$$

откуда следует, что $H^+(A,C) \leq \varepsilon_3$. Так как число δ выбиралось произвольно, то

$$H^+(A,C) \leq q_1 H^+(A,B) + q_2 H^+(B,C). \tag{1}$$

П. 4^0 вытекает из (1) и определения 12 .

5^0 Предположим, что нашлась точка $b \in B$ такая, что $b \notin A$. Так как $H^+(A,B) = 0$, то найдется последовательность точек $\{a_n\} \in A$ такая, что

$$d(a_n, b) \to_{n\to\infty} 0. \tag{2}$$

Но поскольку A является $\bar{d}$-замкнутым множеством, то из (2) вытекает, что $b \in A$.

□

Следствие 1. *Пусть (X,d) — (q_1,q_2)-квазиметрическое пространство. Тогда $(\mathcal{M}_{\bar{d}}(X), H)$ является симметрическим (q_1,q_2)-квазиметрическим пространством.*

Доказательство теоремы 3. Пусть $\{S_n\} \subset \mathcal{M}_{\bar{d}}(X)$ — последовательность Коши в (X,H), т. е. в данном случае

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m,n > N,\ H(S_m, S_n) < \varepsilon.$$

Обозначим через S множество точек $x \in X$ таких, что для любого $\epsilon > 0$ существует $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $B_{\bar{d}}^{\circ}(x,\epsilon) \cap S_n \neq \emptyset$ для всех $n > n_\epsilon$.

Множество S является $\overline{d}$-замкнутым. Действительно, пусть s — предельная точка множества S; таким образом, найдется последовательность точек $\{s_n\} \subset S$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \overline{d}(s, s_n) = 0.$$

Из определения множества S вытекает, что для каждого n и любого числа ϵ_n найдется точка $a_n \in B^{\circ}_{\overline{d}}(s_n, \epsilon_n) \cap S_{m_n}$, откуда следует

$$\overline{d}(s, a_n) \le q_2\overline{d}(s, s_n) + q_1\overline{d}(s_n, a_n),$$

откуда и следует $\overline{d}$-замкнутость S.

1^0 Покажем, что $H^+(S_n, S) < K\varepsilon$, где константа K не зависит от ε. Пусть $x \in S$. Найдется число $m > n_\varepsilon$ такое, что $B^{\circ}_{\overline{d}}(x, \varepsilon) \cap S_m \ne \emptyset$, откуда следует, что найдется точка $y \in S_m$, $m \ge n$, что $d(y, x) < \varepsilon$. Так как $\{S_n\} \subset \mathcal{M}_{\overline{d}}(X)$ — последовательность Коши в (X, H), то найдется точка $z \in S_n$ такая, что

$$d(z, y) < \varepsilon,$$

тогда

$$d(z, x) \le q_1 d(z, y) + q_2 d(y, x) < (q_1 + q_2)\varepsilon,$$

откуда следует требуемое неравенство.

Мы имеем

$$g(S_m, S_n) < \varepsilon \Rightarrow h^+(S_m, S_n) < \varepsilon \Rightarrow \operatorname{dist}(y, S_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists z \in S_n : d(y, z) \le \varepsilon.$$

Следовательно

$$d(x, z) \le q_1 d(x, y) + q_2 d(y, z) < (q_1 + q_2)\varepsilon \Rightarrow h^+(S, S_n) < K\varepsilon.$$

2^0 Покажем, что $H^+(S, S_n) < K'\varepsilon$, где константа K' не зависит от ε. Пусть $x \in S_n$. Зафиксируем некоторое положительное число $\delta < 1$ такое, что

$$q_1\delta < 1.$$

Выберем число $n_1 > n$ таким образом, чтобы $H^+(S_m, S_{n_1}) < \varepsilon\delta$ для всех $m > n_1$, выберем число n_2 таким образом, чтобы $H^+(S_m, S_{n_2}) < \varepsilon\delta^2$ для всех $m > n_2$, и т. д. Тогда из определения функции множеств H^+ вытекает, что найдутся точки $x_i \in S_{n_i}$ такие, что $d(x_1, x) < \varepsilon$, $d(x_2, x_1) < \varepsilon\delta$, $d(x_3, x_2) < \varepsilon\delta^2$, и т. д. Докажем, что $\{x_i\}$ является левой последовательностью Коши. Мы имеем

$$\begin{aligned}
(3)\quad d(x_{l+k}, x_l) &\le q_1 d(x_{l+k}, x_{l+1}) + q_2 d(x_{l+1}, x_l) \le q_1 d(x_{l+k}, x_{l+1}) + q_2\varepsilon\delta^l \\
&\le q_1\big(q_1 d(x_{l+k}, x_{l+2}) + q_2 d(x_{l+2}, x_{l+1})\big) + q_2\varepsilon\delta^l \\
&\le q_1^2\big(q_1 d(x_{l+k}, x_{l+3}) + q_2 d(x_{l+3}, x_{l+2})\big) + q_1 q_2\varepsilon\delta^{l+1} + q_2\varepsilon\delta^l \\
&q_1^3\big(q_1 d(x_{l+k}, x_{l+4}) + q_2 d(x_{l+4}, x_{l+3})\big) + q_1^2 q_2\varepsilon\delta^{l+2} + q_1 q_2\varepsilon\delta^{l+1} + q_2\varepsilon\delta^l \\
&\le \cdots \le q_2\varepsilon\delta^l\big((q_1\delta)^{k-1} + \cdots + 1\big) = q_2\varepsilon\delta^l\frac{1 - (q_1\delta)^k}{1 - q_1\delta},
\end{aligned}$$

откуда и вытекает искомое.

Из (3), в частности, следует, что

$$(4)\qquad d(x_m, x) \le q_2\varepsilon\frac{1 - (q_1\delta)^m}{1 - q_1\delta} < \frac{q_2\varepsilon}{1 - q_1\delta}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность $\{x_i\}$ является левой последовательностью Коши, а (X, d) является полным слева, то существует некоторая точка $y \in X$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} d(y, x_m) = 0,$$

откуда вытекает, что $y \in S$. Тогда, используя (4), мы получаем

$$d(y, x) \le q_1 d(y, x_m) + q_2 d(x_m, x) \le q_1 d(y, x_m) + \frac{q_2^2 \varepsilon}{1 - q_1 \delta},$$

откуда и следует теорема 3.

□

References

[1] A.V. Greshnov, *Distance function between sets in (q_1, q_2)-quasimetric spaces*, Siberian Math. Jour., (2020) (accepted).

[2] W.A. Wilson, *On quasi-metric spaces*, American J. of Math., **53**:3 (1931), 675–684. MR1506845

[3] A.V. Arutyunov, A.V. Greshnov, *(q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points*, (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **82**:2 (2018), 3–32; translation in Izv. Math. **82**:2 (2018), 245–272. MR3780044

[4] A V. Arutyunov, A.V. Greshnov, *The theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points*, Doklady Mathematics, **94**:1 (2016), 434–437. Zbl 1352.54030

[5] A.V. Arutyunov, A.V. Greshnov, *Coincidence points of set-valued maps in (q_1, q_2)-quasimetric spaces*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk, **476**:2 (2017), 129–132; translation in Doklady Mathematics, **96**:2 (2017), 438–441. MR3791184

[6] D. Burago, Yu. Burago, S.A. Ivanov, *Course in metric geometry* (English), Graduate Studies in Mathematics. 33. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xiv, 415 p. (2001). Zbl 0981.51016

[7] A.V. Arutyunov, A.V. Greshnov, L.V. Lokutsievskii, K.V. Storozhuk, *Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics*, Topology Appl., **221** (2017), 178–194. MR3624455

[8] M. Cvetković, E. Karapinar, V. Rakocević, *Some fixed point results on quasi-b-metriclike spaces*, J. Inequal. Appl., **2015**:374 (2015), 17 pp. MR3430285

Alexandr Valer'yevich Greshnov
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia,
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: greshnov@math.nsc.ru

Zhukov Roman Ivanovich
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: eifromdc@yandex.ru