S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 21–41 (2019) УДК 519.21
DOI 10.33048/semi.2019.16.002 MSC 60K05, 60F10

ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ КРАМЕРА

А.А. МОГУЛЬСКИЙ

Abstract. We continue the study of the compound reneal processes (c.r.p.), where the moment Cramer's condition holds (see [1]—[10], where the study of c.r.p. was started). In the paper arithmetic c.r.p. $Z(n)$ are studied. In such processes random vector $\xi = (\tau, \zeta)$ has the arithmetic distribution, where $\tau > 0$ defines the distance between jumps, ζ defines the values of jumps. For this processes the fine asymptotics in the local limit theorem for probabilities $\mathbf{P}(Z(n) = x)$ has been obtained in Cramer's deviation region of $x \in \mathbb{Z}$ In [6]—[10] the similar problem has benn solved for non-lattice c.r.p., when the vector $\xi = (\tau, \zeta)$ has the non-lattice distribution.

Keywords: обобщенный процесс восстановления, арифметический обобщенный процесс восстановления, функция (мера) восстановления, моментное условие Крамера; функция уклонений, вторая функция уклонений, большие уклонения; умеренные уклонения, локальная предельная теорема.

§ 1. Введение. Постановка задачи.

Рассмотрим последовательность

$$\{\xi_k = (\tau_k, \zeta_k)\}_{k=0}^{\infty} \tag{1.1}$$

Mogulskii, A.A., Local theorems for arithmetic compound renewal processes when Cramer's condition holds.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00129).

Поступила 10 июля 2018 г., опубликована 24 января 2019 г.

случайных векторов, таких, что $\tau_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_k > 0$ при $k \geq 2$. Обозначим

$$T_n := \sum_{k=0}^{n} \tau_k, \quad Z_n := \sum_{k=0}^{n} \zeta_k \quad \text{при} \quad n \geq 0,$$

так что $T_0 = Z_0 = 0$. Пусть $\nu(0) := 0$, при $t > 0$

$$\nu(t) = \max\{k \geq 0 : \ T_k < t\}. \tag{1.2}$$

Обобщенный процесс восстановления (о.п.в.) $Z(t);\ t \geq 0$, определяется равенством (см., например, [1], [6])

$$Z(t) := Z_{\nu(t)}, \tag{1.3}$$

если (1.1) есть последовательность независимых случайных векторов, причем векторы $\xi_k = (\tau_k, \zeta_k)$ при $k \geq 2$ имеют общее с вектором $\xi = (\tau, \zeta)$ распределение. Стандартная общепринятая модель о.п.в. предполагает, что время τ_1 появления первого скачка и величина ζ_1 этого скачка имеет совместное распределение, отличное, вообще говоря, от совместного распределения (τ, ζ) (см., например, [1], [11], [12]). Это реализуется, например, для о.п.в. со стационарными приращениями.

Если $(\tau_1, \zeta_1) =_d (\tau, \zeta)$, то процесс $Z(t)$ будем называть *однородным о.п.в.*; в противном случае — *неоднородным*. Процесс $\nu(t)$ (соответствует случаю, когда $\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = 1$) будем называть *простым* процессом восстановления.

Итак, распределения двух случайных векторов $\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1)$, $\xi = (\tau, \zeta)$ *полностью определяют* распределение о.п.в. $Z(t);\ t \geq 0$. На событии

$$\{T_k < t \leq T_{k+1}\} \quad \text{при} \quad k \geq 0$$

выполняется $\nu(t) = k$, $Z(t) = Z_k$. Следовательно, ступенчатые процессы $\nu(t)$, $Z(t)$ непрерывны слева при $t > 0$.

Из усиленного закона больших чисел для сумм $(T_n,\ Z_n)$ вытекает, что при $t \to \infty$

$$\frac{\nu(t)}{t} \to \frac{1}{\mathbf{E}\tau}, \quad \frac{Z(t)}{t} \to a := \frac{\mathbf{E}\zeta}{\mathbf{E}\tau}$$

с вероятностью 1.

В настоящей работе, как и в [6], [10], будем предполагать, что для случайных векторов $\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1)$, $\xi = (\tau, \zeta)$, определяющих о.п.в. $Z(t)$, выполнено моментное условие Крамера в следующем виде

[$\mathbf{C}_0$]. $\mathbf{E}e^{\delta|\xi_1|} < \infty$, $\mathbf{E}e^{\delta|\xi|} < \infty$ *при некотором* $\delta > 0$.

В работах [6], [7], в частности, получены интегро-локальные теоремы для процесса $Z(t)$ при $t \to \infty$ в случае, когда случайный вектор $\xi = (\tau, \zeta)$, «определяющий» процесс $Z(t)$, является нерешетчатым. В настоящей работе решается аналогичная задача для *арифметических* о.п.в. $Z(t)$, т.е. для случая, когда случайные векторы ξ_1, ξ лежат на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$. Более точно, мы будем предполагать, что $\mathbf{P}(\xi_1 \in \mathbb{Z}^2) = 1$, а для вектора ξ выполнено следующее более сильное условие *арифметичности*, которое сформулируем в терминах характеристической функции этого вектора

$$f(u) := \mathbf{E}e^{i\langle u, \xi\rangle}, \quad u \in \mathbb{R}^2,$$

где $\langle \alpha, \beta\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

[$\mathbf{Z}$]. (Условие арифметичности) *Для любого* $u \in \mathbb{Z}^2$ *выполняются равенства* $f(2\pi u) = 1$ *и для любого* $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ *—неравенство* $|f(2\pi u)| < 1$.

Условимся, что: *моментное условие* $[\mathbf{C}_0]$ *и структурное условие арифметичности* $[\mathbf{Z}]$ *во избежания повторения в формулировках основных утверждений напоминаться не будут.*

Заметим попутно, что если для случайного вектора $\xi = (\tau, \zeta)$ выполнено условие $[\mathbf{Z}]$, то этот вектор не может быть вырожденным в пространстве $\mathbb{R}^2$, т.е. с вероятностью 1 лежать на прямой

$$L_{n,c} := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \quad n_1 u + n_2 v = c\},$$

определяемой единичной нормалью $n = (n_1, n_2)$ и константой c. Действительно, если $\mathbf{P}(\xi \in L_{n,c}) = 1$, то найдется r такое, что $u = (u_1, u_2) := (rn_1, rn_2) \notin \mathbb{Z}^2$ и выполнено равенство

$$|f(2\pi u)| = |\mathbf{E} e^{i2\pi rc}| = 1,$$

которое в силу условия $[\mathbf{Z}]$ невозможно.

Поскольку арифметический о.п.в. $Z(t)$ меняется только в целые моменты $t = 1, 2, \cdots$, и при этом непрерывен слева, то для любого не целого аргумента $t > 0$ выполняется равенство $Z(t) = Z([t]+1)$, где, как обычно, через $[t]$ обозначена целая часть неотрицательного числа t. Поэтому мы будем рассматривать только целые значения аргумента $t = n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, т.е. будем изучать случайные последовательности

$$Z(0),\ Z(1),\ Z(2), \cdots;$$

это несколько упростит обозначения и не приведет к потере общности рассмотрений. В настоящей работе получена локальная теорема для арифметического о.п.в. процесса $Z(n)$, в которой найдена точная асимптотика вроятности

$$\mathbf{P}(Z(n) = x) \sim ? \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

для последовательности $x = x_n \in \mathbb{Z}$ такой, что точка $\alpha := \frac{x}{n}$ лежит в некотором фиксированном компакте $K \subset \mathbb{R}$ (см. теорему 2.1 ниже). В основе доказательства локальной теоремы для арифметического о.п.в. $Z(n)$ лежит локальная предельная теорема для функции (меры) восстановления

$$H(B) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n \in B), \quad B \subset \mathbb{R}^2,$$

в которой для множества $B = B_{t,x} := \{t\} \times \{x\}$ изучается точная асимптотика

$$H(B_{t,x}) \sim ?,$$

для последовательности $(t, x) = (t_n, x_n) \in \mathbb{Z}^2$ такой, что точка $(\theta, \alpha) := \frac{1}{n}(t, x)$ лежит в некотором фиксированном компакте $K \subset \mathbb{R}^2$ (теорема 2.2).

По методам настоящая работа следует работам [6], [7], в которых при выполнении моментного условия Крамера $[\mathbf{C}_0]$ получена *интегро-локальная предельные теоремы* для «нерешетчатого» о.п.в. $Z(t)$ и отвечающей ему меры восстановления $H(B)$, т.е. найдены точные асимптотики для

$$\mathbf{P}(Z(T) \in \Delta[x)) \sim ?, \quad H(\delta[t) \times \Delta[x)) \sim ?,$$

где $\Delta[x) := [x,\ x + \Delta)$, $\delta[t) := [t,\ t + \delta)$— полуинтервалы длины Δ, δ, соответственно. Поэтому теоремы 2.1 и 2.2 настоящей работы дополняют результаты работы [6] (теоремы 1.1 и 3.1, соответственно).

Исторические обзоры результатов на близкую тему можно найти в [1], [6]. Добавим только ссылки на работы [8]—[10], где получены интегро-локальные предельные теоремы для *многомерных* нерешетчатых о.п.в. при выполнении условия Крамера $[\mathbf{C}_0]$.

Оставшаяся часть настоящей работы состоит из §§ 2,3. В § 2 формулируются основные результаты работы. В этих формулировках будет участвовать ряд функций, смысл и свойства которых желательно знать для понимания природы установленных законов. Поэтому, следуя работе [6], в § 2 вводятся сначала нужные понятия и обозначения, которые снабжаются необходимыми пояснениями и ссылками. Доказательства основных утверждений работы помещены в § 3.

§ 2. Формулирвки основных утверждений: локальные теоремы для функции восстановления и арифметических обобщенных процессов восстановления.

2.1. Первая и вторая функции уклонений. В наших обозначениях мы будем следовать в основном работе [6]. Положим

$$\psi(\lambda,\mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta}, \quad \psi_1(\lambda,\mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1+\mu\zeta_1},$$

$$A(\lambda,\mu) := \ln\psi(\lambda,\mu), \quad A_1(\lambda,\mu) := \ln\psi_1(\lambda,\mu), \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2;$$

$$\mathcal{A} := \{(\lambda,\mu):\ \psi(\lambda,\mu)<\infty\}, \quad \mathcal{A}_1 := \{(\lambda,\mu):\ \psi_1(\lambda,\mu)<\infty\}.$$

Ясно, что в соответствии с условием $[\mathbf{C}_0]$ *внутренности* $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}_1)$ множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ содержат точку $(\lambda,\mu)=(0,0)$ и являются областями аналитичности функций $A(\lambda,\mu)$, $A_1(\lambda,\mu)$, соответственно. В доказательствах основных утверждений настоящей работы (как и в [6], [7]) используются известные интегро-локальные теоремы для сумм $S_n=(T_n,Z_n)$ (см., например, [1], § 2.9). Важную роль при этом играет *функция уклонений (первая)*

$$\Lambda(\theta,\alpha) := \sup_{(\lambda,\mu)}\{\lambda\theta+\mu\alpha-A(\lambda,\mu)\}, \tag{2.1}$$

соответствующая случайному вектору $\xi=(\tau,\zeta)$. Это есть преобразование Лежандра над выпуклой непрерывной снизу функцией $A(\lambda,\mu)$; поэтому функция $\Lambda(\theta,\alpha)$ также выпукла и непрерывна снизу.

Условимся о следущих обозначениях. Если дана функция $F=F(u,v)$ двух переменных u и v, то в дальнейшем нижними индексами (1) и (2) мы будем отмечать производные по первому и второму аргументу, соответственно, например:

$$F'_{(1)}(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}F(u,v)|, \quad F''_{(2,1)}(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}F(u,v)|.$$

Через $F'=F'(u,v)$ и $F''=F''(u,v)$ мы будем обозначать, соответственно, вектор

$$F'=F'(u,v)=(F'_{(1)}(u,v),F'_{(2)}(u,v))$$

и матрицу

$$F''=F''(u,v)=\|F''_{(i,j)}(u,v)\|_{i,j=1,2}.$$

Через $|F''|$ обозначим определитель матрицы F''. Для матрицы $M=||M_{i,j}||_{i,j=1,2}$ через

$$(\theta,\alpha)M(\theta,\alpha)^\top := \theta^2M_{1,1}+\theta\alpha(M_{1,2}+M_{2,1})+\alpha^2M_{2,2}$$

обозначим соответствующую квадратичную форму (верхний символ $^\top$ означает операцию транспонирования, переводящую строку в столбец).

Наряду с множествами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}$ нам понадобится область $\mathcal{L}$ аналитичности функции $\Lambda(\theta,\alpha)$. Эта область содержит те точки (θ,α), для которых система уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} A'_{(1)}(\lambda,\mu)=\theta,\\ A'_{(2)}(\lambda,\mu)=\alpha, \end{array}\right. \tag{2.2}$$

для координат точки (λ,μ) (где достигается верхняя грань в (2.1)), имеет решение $(\lambda(\theta,\alpha),\mu(\theta,\alpha))$, принадлежащее $(\mathcal{A})$, так что

$$\mathcal{L}=\{A'(\lambda,\mu):\ (\lambda,\mu)\in(\mathcal{A})\}.$$

Так как функция $A(\lambda,\mu)$ строго выпукла в $(\mathcal{A})$, то такое решение всегда единственно. Сказанное означает, что условия

$$(\theta,\alpha)\in\mathcal{L}\quad \text{и}\quad (\lambda(\theta,\alpha),\mu(\theta,\alpha))\in(\mathcal{A})$$

эквивалентны. При этом отображения

$$(\theta,\alpha)=A'(\lambda,\mu),\quad (\lambda,\mu)=\Lambda'(\theta,\alpha)$$

взаимно-обратны; они осуществляют взаимно-однозначное отображение между областями $(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}$). Ясно, что точка $(\theta,\alpha)=(a_\tau,a_\zeta)$, где $a_\tau:=\mathbf{E}\tau$, $a_\zeta:=\mathbf{E}\zeta$, всегда принадлежит $\mathcal{L}$; для нее $(\lambda(a_\tau,a_\zeta),\mu(a_\tau,a_\zeta)=(0,0)\in(\mathcal{A})$. Известно (см., например, [6]), что при $(\theta,\alpha)\in\mathcal{L}$ выполняется

$$\Lambda'(\theta,\alpha)=(\Lambda'_{(1)}(\theta,\alpha),\ \Lambda'_{(2)}(\theta,\alpha))=(\lambda(\theta,\alpha),\ \mu(\theta,\alpha)),$$

где пара функций $\lambda(\theta,\alpha)$, $\mu(\theta,\alpha)$ является единственным решением системы (2.2).

Если τ и ζ независимы, то

$$A(\lambda,\mu)=A_\tau(\lambda)+A_\zeta(\mu),$$

где

$$A_\tau(\lambda):=\ln\mathbf{E}e^{\lambda\tau},\quad A_\zeta(\mu):=\ln\mathbf{E}e^{\mu\zeta}.$$

Поэтому $A'_{(1)}(\lambda,\mu)=A'_\tau(\lambda)$ не зависит от μ, $A'_{(2)}(\lambda,\mu)=A'_\zeta(\mu)$ не зависит от λ и области $(\mathcal{A})$ и $\mathcal{L}$ прямоугольны.

Наряду с функцией уклонений $\Lambda(\theta,\alpha)$ нам понадобится т.н. *вторая функция уклонений* $D(\theta,\alpha)$, определяемая соотношениями

$$D(\theta,\alpha):=\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{A}^{\le 0}}\{\lambda\theta+\mu\alpha\}=\sup_{(\lambda,\mu)\in\partial\mathcal{A}^{\le 0}}\{\lambda\theta+\mu\alpha\}, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{A}^{\le 0}:=\{(\lambda,\mu):\ A(\lambda,\mu)\le 0\}$, ∂B — граница B (см. § 2.9 в [1]). Свойства функции $D(\theta,\alpha)$ изучены весьма полно в [1], [6]. Она *выпукла, полуаддитивна, линейна вдоль любого луча, исходящего из* 0*, непрерывна снизу*. Кроме того, для всех точек (θ,α) за исключением точек границы множества $\mathcal{D}^{<\infty}$ конечности функции $D(\theta,\alpha)$ справедливо равенство

$$D(\theta,\alpha)=\inf_{r>0} r\Lambda\left(\frac{\theta}{r},\frac{\alpha}{r}\right).$$

Представление (2.3) позволяет найти еще одну полезную характеризацию функции $D(\theta,\alpha)$. Отметим прежде всего, что в силу линейчатости функции D выполняется при $\theta>0$

$$D(\theta,\alpha)=\theta D\left(1,\frac{\alpha}{\theta}\right) \tag{2.4}$$

и, стало быть, функция двух переменных $D(\theta, \alpha)$ полностью определяется значениями функции одной переменной

$$D(\alpha) := D(1, \alpha).$$

Кроме того, именно в терминах этой функции будет сформулированы основные результаты настоящей работы. В силу (2.3)

$$D(\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\partial\mathcal{A}^{\leq 0}} \{\mu\alpha + \lambda\}. \tag{2.5}$$

Для описания границы $\partial\mathcal{A}^{\leq 0}$ рассмотрим сечение $\mathcal{A}_\mu$ множества $\mathcal{A}$ на уровне μ:

$$\mathcal{A}_\mu := \{\lambda : \ (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}\}$$

и положим

$$\mu^+ := \sup\{\mu : \ \mathcal{A}_\mu \neq \emptyset\}, \quad \mu^- := \inf\{\mu : \ \mathcal{A}_\mu \neq \emptyset\}.$$

При любом $\mu \in (\mu^-, \mu^+)$ функция $A(\lambda, \mu)$ строго возрастает по λ от $-\infty$ до ∞ и, стало быть, определены значения

$$A(\mu) := -\sup\{\lambda : \ A(\lambda, \mu) \leq 0\}, \quad A^\infty(\mu) := -\sup\{\lambda : \ A(\lambda, \mu) < \infty\}.$$

Очевидно, что $(-A(\mu), \mu) \in \partial\mathcal{A}^{\leq 0}$, $(-A^\infty(\mu), \mu) \in \partial\mathcal{A}$, так что функции $A(\mu)$, $A^\infty(\mu)$ конечны и выпуклы в интервале (μ^-, μ^+). Доопределим функцию $A(\mu)$ вне интервала (μ^-, μ^+) с сохранением выпуклости и непрерывности снизу, положив $A(\mu) := \infty$ при $\mu \notin [\mu^-, \mu^+]$ и

$$A(\mu^+) := \lim_{\mu\uparrow\mu^+} A(\mu), \quad A(\mu^-) := \lim_{\mu\downarrow\mu^-} A(\mu).$$

Тогда очевидно, что формулу (2.5) можно записать в виде

$$D(\alpha) = \sup_{\mu}\{\mu\alpha - A(\mu)\}, \tag{2.6}$$

так что $D(\alpha)$ есть *преобразование Лежандра* над $A(\mu)$. В [5] показано, что функция $A(\mu)$ обладает многими свойствами логарифма преобразования Лапласа над некоторым распределением. Как уже отмечалось, она всегда выпукла и непрерывна снизу на всей вещественной оси. Кроме того, $A(\mu) \to \infty$ при $|\mu| \to \infty$, если случайная величина ζ разнозначна,

$$A'(0) = a := \frac{a_\zeta}{a_\tau} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\frac{Z(t)}{t},$$

$$A''(0) = \sigma^2 := \frac{1}{a_\tau}\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2 = \lim_{t\to\infty} \mathbf{D}\frac{Z(t)}{t}.$$

Все названные выше свойства функции $A(\mu)$ можно получить из (2.6). Очевидно, что всегда $A^\infty(\mu) \leq A(\mu)$. Так как $(0,0) \in (\mathcal{A})$, $A(0,0) = 0$, то в окрестности точки $\mu = 0$ всегда $A^\infty(\mu) < A(\mu)$. Положим

$$\mu_- := \max\{\mu < 0 : \ A(\mu) = A^\infty(\mu)\}, \quad \mu_+ := \min\{\mu > 0 : \ A(\mu) = A^\infty(\mu)\}.$$

В области $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$ выполняется

$$A^\infty(\mu) < A(\mu), \quad (-A(\mu), \mu) \in (\mathcal{A}),$$

и $\lambda = -A(\mu)$ есть единственное решение уравнения

$$A(\lambda, \mu) = 0. \tag{2.7}$$

Стало быть, по теореме о неявной функции, решение $-A(\mu)$ является аналитической функцией. Пусть $\mu(\alpha)$ — точка, в которой достигается sup в (2.5). Если $A(\mu)$ дифференцируема в точке $\mu(\alpha)$, то значение $\mu(\alpha)$ есть решение уравнения

$$A'(\mu) = \alpha.$$

Так как функция $A'(\mu)$ монотонно возрастает, то существует единственное решение

$$\mu(\alpha) = (A')^{(-1)}(\alpha),$$

являющееся обратной функцией к $A'(\mu)$. Пусть

$$\alpha_\pm := A'(\mu_\pm \mp 0).$$

Тогда в области (α_-, α_+) функция $\mu(\alpha)$ будет, очевидно, аналитической. Далее, в [5] установлено соотношение

$$D(\alpha) = \alpha\mu(\alpha) - A(\mu(\alpha)) = \int_a^\alpha \mu(v)dv, \tag{2.8}$$

из которого следует, что функция $D(\alpha)$ аналитична в (α_-, α_+). Далее, если положить

$$\lambda(\alpha) := -A(\mu(\alpha)), \tag{2.9}$$

то из (2.7) и (2.8) получаем

$$A(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) = 0, \quad D(\alpha) = \lambda(\alpha) + \alpha\mu(\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha \in (\alpha_-, \alpha_+).$$

Из сказанного и (2.4) получаем, что функция $D(\theta, \alpha)$ конечна в конусе

$$\mathcal{D}^{<\infty} := \left\{(\theta, \alpha) : \ \theta > 0, \ \mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) \in (\mu^-, \mu^+)\right\},$$

и аналитична в конусе

$$\mathcal{D} := \left\{(\theta, \alpha) : \ \theta > 0, \ \frac{\alpha}{\theta} \in (\alpha_-, \alpha_+)\right\}.$$

В [6], [7] показано, что при $(\theta, \alpha) \in \mathcal{D}$ справедливо

$$D'(\theta, \alpha) = (D'_{(1)}(\theta, \alpha), D'_{(2)}(\theta, \alpha)) = \left(\lambda\left(\frac{\alpha}{\theta}\right), \mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right).$$

2.2. Локальная теорема для арифметического обобщенного процесса восстановления. Асимптотика вероятности

$$\mathbf{P}(Z(n) = x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{Z}, \tag{2.10}$$

будет изучаться в области нормированных уклонений

$$\alpha := \frac{x}{n} \in (\alpha_-, \alpha_+), \quad x \in \mathbb{Z}. \tag{2.11}$$

Однако, как установлено в [6], не всегда асимптотику (2.10) возможно получить во всей области (2.11). В ряде случаев область (2.11) приходится суживать до области

$$\alpha := \frac{x}{n} \in (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+], \quad x \in \mathbb{Z},$$

где β_- — минимальное решение уравнения

$$\lambda(\beta) = \lambda_+, \quad \text{где} \quad \lambda_+ := \sup\{\lambda : \ \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\},$$

β_+ — максимальное решение этого уравнения. В случае $\lambda_+ < D(0)$ эти решения всегда существуют и определяют отрезок $[\beta_-, \beta_+]$ положительной длины. Если

$\lambda_+ = D(0)$ и при этом $\alpha = 0 \in (\alpha_-, \alpha_+)$, то отрезок $[\beta_-, \beta_+]$ вырождается в точку $\beta_- = \beta_+ = 0$. При $\lambda_+ > D(0)$ отрезок $[\beta_-, \beta_+]$ пуст.

Мы можем сформулировать теперь локальную теорему для процесса $Z(n)$. Наряду с рассмотренными выше моментным и структурным условиями мы будем предполагать, что для $x \in \mathbb{Z}$ нормированные уклонения $\alpha = \frac{x}{n}$ лежат в некотором фиксированном компакте

$$K \subset (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+].$$

Обозначим

$$C(\alpha) := C_H(1, \alpha), \quad I(\alpha) := \sum_{m=1}^{\infty} e^{\lambda(\alpha)m} \mathbf{P}(\tau \geq m),$$

где положительная непрерывная в конусе $\mathcal{D}$ функция $C_H(\theta, \alpha)$ будет определена ниже формулой (2.26).

Теорема 2.1. *Пусть фиксирован компакт*

$$K \subset (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+] \tag{2.12}$$

и выполнено условие допустимой неоднородности

$$\mathcal{A}_K \subset (\mathcal{A}_1), \quad \textit{где} \quad \mathcal{A}_K := \{(\lambda, \mu) = (\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) : \ \alpha \in K\}. \tag{2.13}$$

Пусть, дополнительно к (2.13), выполнено условие

$$\mathbf{P}(\tau_1 \geq n) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-nD(0)}\right) \quad \textit{при} \quad n \to \infty, \quad \textit{если} \quad \alpha = 0 \in K. \tag{2.14}$$

Тогда при $\alpha := \frac{x}{n} \in K$, $x \in \mathbb{Z}$ имеет место представление

$$\mathbf{P}(Z(n) = x) = \psi_1(\lambda(\alpha), \mu(\alpha)) \frac{C(\alpha)}{\sqrt{n}} e^{-nD(\alpha)} I(\alpha)(1 + o(1)), \tag{2.15}$$

в котором остаточный член $o(1) = \varepsilon_n(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}, \ \frac{x}{n} \in K} |\varepsilon_n(x)| = 0.$$

Теорема 2.1 согласуется с теоремой 1.1 в [6] и дополняет ее в арифметическом случае (как уже говорилось ранее, в [6] получены интегро-локальные теоремы для нерешетчатого случая). Как отмечается в [6], вид суммы $I(\alpha)$ поясняет в какой-то мере существенность присутствия запретного множества $[\beta_-, \beta_+]$: при $\alpha \in (\beta_-, \beta_+)$ (или, что то же, $\lambda(\alpha) > \lambda_+$) сумма $I(\alpha)$ расходится и асимптотика $\mathbf{P}(Z(n) = x)$ будет иной. Существенность условия (2.13) поясняет присутствие в правой части (2.15) множителя $\psi_1(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))$.

Приведем теперь другую (эквивалентную) форму теоремы 2.1:

Теорема 2.1A. *Пусть фиксирована точка*

$$\alpha_0 \in (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [\beta_-, \beta_+] \tag{2.16}$$

и выполнено условие допустимой неоднородности

$$(\lambda(\alpha_0), \mu(\alpha_0)) \in (\mathcal{A}_1). \tag{2.17}$$

Пусть, дополнительно к (2.17), выполнено условие

$$\mathbf{P}(\tau_1 \geq n) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-nD(0)}\right) \quad \textit{при} \quad n \to \infty, \quad \textit{если} \quad \alpha_0 = 0. \tag{2.18}$$

Тогда для любой последовательности $x = x_n \in \mathbb{Z}$*, такой, что*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha = \alpha_0, \quad \text{где} \quad \alpha := \frac{x}{n},$$

имеет место представление (2.15), в котором остаточный член $o(1) = \varepsilon_n(x)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n(x)| = 0. \tag{2.19}$$

Эквивалентность теорем 2.1 и 2.1A будет установлена ниже.

Воспользуемся теперь следующим утверждением:

Лемма 2.1. *Справедливы два равенства*

$$C(a)I(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \tag{2.20}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{D''(a)}, \tag{2.21}$$

где (напомним)

$$\sigma^2 := \frac{1}{\mathbf{E}\tau}\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2.$$

Утверждения леммы 2.1 можно извлечь из результатов работ [2]-[8]. Однако для «автономности изложения» в конце § 3 будет предложено доказательство леммы 2.1. Из теоремы 2.1A и леммы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть* $\alpha_0 = a$*. Тогда условия (2.16), (2.17), (2.18) теоремы 2.1A выполняются «автоматически» и при этом справедливы соотношения*

$$D(a) = D'(a) = 0, \quad (\lambda(a), \mu(a)) = (0, 0), \quad \psi_1(\lambda(a), \mu(a)) = 1.$$

Поэтому для любой последовательности $x = x_n \in \mathbb{Z}$*, такой, что*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha = a, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{x}{n},$$

имеет место соотношение

$$\mathbf{P}(Z(n) = x) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-nD(\alpha)}. \tag{2.22}$$

Следствие 2.1 будет доказано в § 3.

Убедимся теперь, что утверждения теорем 2.1 и 2.1A эквивалентны, т.е. из теоремы 2.1 следует теорема 2.1A и, наоборот, из теоремы 2.1A следует теорема 2.1. Иначе говоря, осуществим

Д о к а з а т е л ь с т в о соотношения

$$\text{теорема 2.1} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{теорема 2.1A}. \tag{2.23}$$

(i). Пусть верна теорема 2.1 и пусть для некоторой точки α_0 выполнены условия теоремы 2.1A, т.е. соотношения (2.16), (2.17), (2.18). Выберем $\delta > 0$ достаточно малым, таким, что для отрезка $K := [\alpha_0 - \delta,\ \alpha_0 + \delta]$ выполнены соотношения (2.12), (2.13) и, кроме того, в случае, когда $\alpha_0 \neq 0$, выполнено соотношение $0 \notin K$. Тогда для любой последовательности $x = x_n \in \mathbb{Z}$, такой, что $\alpha = \frac{x}{n} \to \alpha_0$ при $n \to \infty$ в силу теоремы 2.1 имеет место представление

(2.15), в котором остаточный член $o(1) = \varepsilon_n(x)$ удовлетворяет соотношению (2.19). Импликация

$$\text{теорема 2.1} \quad \Longrightarrow \quad \text{теорема 2.1A}$$

установлена.

(ii). Пусть верна теорема 2.1A, и допустим, что утверждение теоремы 2.1 не верно. Последнее означает, что найдутся компакт K, удовлетворяющий соотношениям (2.12), (2.13), (2.14), и точка $\alpha_0 \in K$, такие, что для некоторой последовательности натуральных чисел $n = n_k \to \infty$ и для некоторой последовательности $x_{(k)} := x_{n_k} \in \mathbb{Z}$, таких, что

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_{(k)} = \alpha_0, \quad \text{где} \quad \alpha_{(k)} := \frac{x_{(k)}}{n_k},$$

имеет место представление (2.15), в котором остаточный член $o(1) = \varepsilon_{n_k}(x_{n_k})$ удовлетворяет соотношению

$$\limsup_{k\to\infty} |\varepsilon_{n_k}(x_{n_k})| > 0. \tag{2.24}$$

Но неравенство (2.24) невозможно, поскольку оно противоречит соотношению (2.19), которое верно в силу теоремы 2.1A. Импликация

$$\text{теорема 2.1A} \quad \Longrightarrow \quad \text{теорема 2.1}$$

установлена. Эквивалентность (2.23) теорем 2.1 и 2.1A доказана.

Заметим, что теорему 2.1A доказать несколько проще, чем теорему 2.1. Поэтому в § 3 мы приведем доказательство теоремы 2.1A.

2.3. Локальная теорема для функции восстановления

$$H(B) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_k \in B), \quad B \subset \mathbb{R}^2.$$

В арифметическом случае для последовательности $(t, x) = (t_n, x_n) \in \mathbb{Z}^2$ изучается асимптотика

$$H(\{t\} \times \{x\}), \quad n \to \infty,$$

при $(\theta, \alpha) := \frac{1}{n}(t, x)$ из некоторого фиксированного компакта K, вложенного в область $\mathcal{D}$ аналитичности функции $D(\theta, \alpha)$. При $(\theta, \alpha) \in \mathcal{D}$ положим для краткости (см. (2.10)) $\left(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha}\right) := A'\left(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}\right)$, где

$$\left(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}\right) := \left(\lambda\left(\frac{\alpha}{\theta}\right), \mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right) = D'(\theta, \alpha) = \left(-A\left(\mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right), \mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right), \tag{2.25}$$

так что векторы $\left(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}\right)$, $\left(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha}\right)$ суть функции от переменной $\frac{\alpha}{\theta}$. Действительно,

$$(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) = \left(\lambda\left(\frac{\alpha}{\theta}\right), \mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right),$$

$$(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha}) = \left(A'_{(1)}\left(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}\right), A'_{(2)}\left(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}\right)\right) =$$

$$\left(A'_{(1)}\left(\lambda\left(\frac{\alpha}{\theta}\right), \mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right), A'_{(2)}\left(\lambda\left(\frac{\alpha}{\theta}\right), \mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right)\right).$$

Как установлено в [6], [7](см. лемму 3.1 в § 3 и лемму 3.1 в [6], [7]), для $(\theta, \alpha) \in \mathcal{D}$ минимум по $r \in (0, \infty)$ функции

$$L(r) = L_{\theta,\alpha}(r) := r\Lambda\left(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r}\right)$$

достигается в единственной точке

$$r_{\theta,\alpha} = \frac{\theta}{\widehat{\theta}} = \frac{\alpha}{\widehat{\alpha}}.$$

Обозначим для $(\theta, \alpha) \in \mathcal{D}$

$$C_H(\theta,\alpha) := \sqrt{\frac{r_{\theta,\alpha}}{2\pi} \frac{|\widehat{\Lambda}''|}{(\theta,\alpha)\widehat{\Lambda}''(\theta,\alpha)^\top}}, \tag{2.26}$$

где $\widehat{\Lambda}'' = \|\widehat{\Lambda}''_{i,j}\| := \Lambda''(\theta,\alpha)|_{(\theta,\alpha)=(\widehat{\theta},\widehat{\alpha})}$, так что

$$(\theta,\alpha)\widehat{\Lambda}''(\theta,\alpha)^\top := \theta^2\widehat{\Lambda}''_{1,1} + 2\theta\alpha\widehat{\Lambda}''_{1,2} + \alpha^2\widehat{\Lambda}''_{2,2}.$$

Теорема 2.2. *Пусть для фиксированного компакта*

$$K \subset \mathcal{D}$$

выполнено условие допустимой неоднородности

$$\mathcal{A}_K \subset (\mathcal{A}_1), \quad \text{где} \quad \mathcal{A}_K := \left\{(\lambda,\mu) = \left(\lambda\left(\frac{\alpha}{\theta}\right), \mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right) : \ (\theta,\alpha) \in K\right\}.$$

Тогда для $(t,x) \in \mathbb{Z}^2$, $(\theta,\alpha) := \frac{1}{n}(t,x)$ *имеет место представление*

$$H(\{t\}\times\{x\}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\psi_1\left(\lambda\left(\frac{\alpha}{\theta}\right),\ \mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right) C_H(\theta,\alpha)e^{-nD(\theta,\alpha)}(1+o(1)), \tag{2.27}$$

в котором остаточный член $o(1) = \varepsilon_n(t,x)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(t,x)\in\mathbb{Z}^2,\ \frac{1}{n}(t,x)\in K} |\varepsilon_n(t,x)| = 0.$$

Теорема 2.2 дополняет теорему 3.1 в [6], [7], где установлена интегро-локальная теорема для функции восстановления в нерешетчатом случае. Теорема 2.2 усиливает теорему 5 в [14], где рассматривался только однородный случай.

Приведем теперь формулировку теоремы 2.2A, утверждение которой эквиваленнтно утверждению теоремы 2.2, но которая более удобна для доказательства.

Теорема 2.2A. *Пусть для фиксированной точки*

$$(\theta_0, \alpha_0) \in \mathcal{D}$$

выполнено условие допустимой неоднородности

$$\left(\lambda\left(\frac{\alpha_0}{\theta_0}\right),\ \mu\left(\frac{\alpha_0}{\theta_0}\right)\right) \in (\mathcal{A}_1). \tag{2.28}$$

Тогда для любой последовательности $(t,x) = (t_n,x_n) \in \mathbb{Z}^2$ *такой, что для* $(\theta,\alpha) := \frac{1}{n}(t,x)$ *выполняется*

$$\lim_{n\to\infty}(\theta,\alpha) = (\theta_0,\alpha_0),$$

имеет место представление (2.27), в котором остаточный член $o(1) = \varepsilon_n(t,x)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{n\to\infty}|\varepsilon_n(t,x)| = 0.$$

Доказательство соотношения

$$\text{теорема 2.2} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{теорема 2.2A} \tag{2.29}$$

об эквивалентности теорем 2.2 и 2.2A повторяет доказательство соотношения (2.23) об эквивалентности теорем 2.1 и 2.1A; поэтому мы опускаем доказательство (2.29). Доказательство теоремы 2.2A будет приведено в § 3.

§ 3. Доказательства основных утверждений.

3.1. Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.2A. Исходным утверждением для доказательства теоремы 2.2A является локальная теорема для сумм S_n в *арифметическом однородном случае.* Из теоремы 2.3.2 в [1], с. 72, вытекает следующая версия локальной теоремы для сумм S_n случайных векторов в арифметическом случае:

Теорема 3.1. *Пусть компакт $K \subset \mathcal{L}$ фиксирован, точка $(t,x) \in \mathbb{Z}^2$ такова, что $(\gamma,\beta) := (\frac{t}{n}, \frac{x}{n}) \in K$. Тогда для*

$$C_1(\gamma,\beta) := \frac{\sqrt{|\Lambda''(\gamma,\beta)|}}{2\pi},$$

при $n \to \infty$ выполняется

$$\mathbf{P}(T_n = t,\ Z_n = x) = \frac{1}{n} C_1(\gamma,\beta) e^{-n\Lambda(\gamma,\beta)}(1+o(1)), \tag{3.1}$$

где остаточный член $o(1) = \varepsilon_n(t,x)$ равномерен по $(\gamma,\beta) \in K$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(t,x)\in\mathbb{Z}^2,\ (\frac{t}{n},\frac{x}{n})\in K} |\varepsilon_n(t,x)| = 0.$$

Ниже с помощью представленя (3.1) будет найдена асимптотика меры восстановления $H(B)$ для удаляющихся множеств

$$B = B_{t,x} := \{t\} \times \{x\},$$

т.е. будет установлено утверждение (2.27) теоремы 2.2A.

Для доказательства теоремы 2.2A нам понадобится

Лемма 3.1.([6], [7]) *Пусть $(\theta,\alpha) \in \mathcal{D}$, векторы $(\widehat{\lambda},\widehat{\mu})$, $(\widehat{\theta},\widehat{\alpha})$ определены в (2.25). Тогда:*

I. Минимум функции $L(r) = L_{\theta,\alpha}(r) := r\Lambda(\frac{\theta}{r},\frac{\alpha}{r})$ на множестве $r > 0$ достигается в единственной точке

$$r_{\theta,\alpha} = \frac{\theta}{\widehat{\theta}} = \frac{\alpha}{\widehat{\alpha}}.$$

Для функций $\widehat{\lambda}$, $\widehat{\mu}$ справедливо представление

$$\widehat{\lambda} = \lambda\left(\frac{\theta}{r_{\theta,\alpha}}, \frac{\alpha}{r_{\theta,\alpha}}\right), \quad \widehat{\mu} = \mu\left(\frac{\theta}{r_{\theta,\alpha}}, \frac{\alpha}{r_{\theta,\alpha}}\right),$$

где функции $\lambda(\cdot,\cdot)$, $\mu(\cdot,\cdot)$ являются решением системы (2.2). При этом

$$L'(r_{\theta,\alpha}) = 0, \quad L''(r_{\theta,\alpha}) = \frac{1}{r_{\theta,\alpha}}(\widehat{\theta},\widehat{\alpha})\widehat{\Lambda}''(\widehat{\theta},\widehat{\alpha})^\top > 0, \tag{3.2}$$

где

$$\widehat{\Lambda}'' := \Lambda''(\theta,\alpha)\big|_{(\theta,\alpha)=(\widehat{\theta},\widehat{\alpha})}.$$

II. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$\min_{|r-r_{\theta,\alpha}|\geq\varepsilon} L(r) \geq L(r_{\theta,\alpha}) + \varepsilon_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.2A (на базе теоремы 3.1 и леммы 3.1) осуществим в два этапа. *I.* Меру восстановления для однородного случая, когда векторы $\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1)$, $\xi = (\tau, \zeta)$ (т.е. все слагаемые $\xi_i = (\tau_i, \zeta_i)$ при $i \geq 1$) имеют одинаковое распределение, обозначим $H_0(B)$. На этапе I установим утверждение теоремы 2.2A для однородного случая. Достаточно доказать на первом этапе, что для любого фиксированного $(\theta_0, \alpha_0) \in \mathcal{D}$ и для любой последовательности $(t, x) \in \mathbb{Z}^2$, такой, что $(\theta, \alpha) := \frac{1}{n}(t, x) \to (\theta_0, \alpha_0)$ при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$H_0(\{t\} \times \{x\}) = \frac{1}{\sqrt{n}} C_H(\theta, \alpha) e^{-nD(\theta,\alpha)}(1 + o(1)), \tag{3.3}$$

Докажем (3.3). Имеем

$$H_0(B_{t,x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_k = t,\ Z_k = x). \tag{3.4}$$

Ряд в правой части (3.4) разобьем на три суммы

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_1}, \quad \sum_{k \in \mathcal{K}_2}, \quad \sum_{k \in \mathcal{K}_3},$$

по областям

$$\mathcal{K}_1 := \{1 \leq k < c_1 n\}, \quad \mathcal{K}_2 := \{c_1 n \leq k \leq c_2 n\}, \quad \mathcal{K}_3 := \{k > c_2 n\},$$

где $c_1 < c_2$ выберем так, что

$$r_{\theta_0, \alpha_0} \in (c_1, c_2),$$

а разность $c_2 - c_1$ столь мала, что для некоторого компакта $K \subset \mathcal{L}$ и всех достаточно больших n при $k \in \mathcal{K}_2$ выполняется

$$(\gamma, \beta) := \left(\frac{t}{k}, \frac{x}{k}\right) \in K.$$

Очевидно, что это всегда возможно. Поэтому, в силу теоремы 3.1 для $r := \frac{k}{n} \in [c_1, c_2]$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_2} = \sum_{k \in \mathcal{K}_2} \frac{C_1(\gamma, \beta)}{nr} e^{-k\Lambda(\gamma,\beta)}(1 + o(1)) =$$

$$\sum_{r \in [c_1, c_2]} \frac{1}{n} \frac{C_1(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r})}{r} e^{-nr\Lambda(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r})}(1 + o(1)).$$

Так как изменение функции $r\Lambda(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r}) = L(r)$ в окрестности точки $r = r_{\theta,\alpha} \in [c_1, c_2]$ на интервале длины $\frac{1}{n}$ есть $o(\frac{1}{n})$, то

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_2} = \int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{r} C_1 \left(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r}\right) e^{-nL(r)} dr(1 + o(1)).$$

В силу равенства $L(r_{\theta,\alpha}) = D(\theta, \alpha)$ и известного метода Лапласа подсчета таких интегралов получаем (для $(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha}) = (\frac{\theta}{r_{\theta,\alpha}}, \frac{\alpha}{r_{\theta,\alpha}})$)

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_2} = \frac{C_1(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha})\sqrt{2\pi}}{\sqrt{nL''(r_{\theta,\alpha})} r_{\theta,\alpha}} e^{-nD(\theta,\alpha)}(1 + o(1)).$$

В силу леммы 3.1 (см. правую формулу в (3.2)) правая часть этого равенства совпадает с правой частью (3.3)(т.е. с правой частью (2.27) при $\psi_1 = \psi$).

Оценим теперь $\sum_{k\in\mathcal{K}_1}$ и $\sum_{k\in\mathcal{K}_3}$. В силу многомерного экспоненциального неравенства чебышевского типа (см. [13] или теорему 1.3.2 в [1])

$$\mathbf{P}(T_k=t,\ Z_k=x)\le \exp\left\{-nr\Lambda\left(\frac{\theta}{r},\frac{\alpha}{r}\right)\right\},\quad r=\frac{k}{n}.$$

В силу утверждения II леммы 3.1 найдутся $\gamma>0$ и $n_0<\infty$ такие, что при всех $n\ge n_0$, $k\in\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_3$ выполняется

$$r\Lambda\left(\frac{\theta}{r},\frac{\alpha}{r}\right)\ge D(\theta,\alpha)+\gamma,$$

так что имеем при $n\ge n_0$

$$\mathbf{P}(T_k=t,\ Z_k=x)\le e^{-n(D(\theta,\alpha)+\gamma)}. \tag{3.5}$$

Поэтому в силу (3.5)

$$\sum_{k\in\mathcal{K}_1}\le c_1ne^{-n(D(\theta,\alpha)+\gamma)}=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-nD(\theta,\alpha)}\right).$$

Для оценки суммы $\sum_{k\in\mathcal{K}_3}$ разобьем ее на две части: на сумму $\sum'$ по области $c_2n\le k\le n^2$ и на сумму $\sum''$ по области $k>n^2$. Сумма $\sum'$ оценивается точно так же, как сумма $\sum_{k\in\mathcal{K}_1}$. Для суммы $\sum''$ имеем

$$\sum\nolimits''\le\sum_{k>n^2}\mathbf{P}(T_k\le 2t)\le\sum_{k>n^2}e^{-k\Lambda_\tau(\frac{t}{k})},$$

где при $k>n^2\to\infty$,

$$\Lambda_\tau\left(\frac{t}{k}\right)=\Lambda_\tau\left(\frac{\theta n}{k}\right)\ge\Lambda_\tau\left(\frac{\theta}{n}\right)\to\infty,$$

так как $\Lambda_\tau(0)=\infty$. Поэтому

$$\sum\nolimits''\le\sum_{k\ge n^2}e^{-k\Lambda_\tau(\frac{\theta}{n})}\le 2e^{-n^2\Lambda_\tau(\frac{\theta}{n})}=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-nD(\theta,\alpha)}\right).$$

Это доказывает утверждение теоремы 2.2A в однородном случае (т.е. соотношение (3.3)).

II. На втором шаге доказательства меру восстановления в неоднородном случае представим в виде

$$H(B_{t,x})=H(\{t\}\times\{x\})=\mathbf{E}H_0(\{t-\tau_1\}\times\{x-\zeta_1\}),$$

и воспользуемся следующим утверждением (ср. с леммой 4.2 ([7]), которая установлена при доказательстве теоремы 3.1 в работе [7]):

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2A. Тогда для некоторых $c>0$, $C<\infty$, $n_0<\infty$ при всех $n\ge n_0$ справедливо*

$$|H(\{t\}\times\{x\})-\mathbf{E}(H_0(\{t-\tau_1\}\times\{x-\zeta_1\});\ |\xi_1|\le\ln^2 n)|\le Ce^{-nD(\theta,\alpha)-c\ln^2 n}. \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для $(t,x)\in\mathbb{Z}^2$, $t\ge 1$

$$B_{t,x}=\{t\}\times\{x\}.$$

Так как $(0,0)\notin B_{t,x}$, то

$$\mathbf{P}((T_0,Z_0)\in B_{t,x})=0,$$

поэтому имеем

$$H(B_{t,x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}((T_k,\ Z_k) \in B_{t,x}) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}((\tau_1 + T'_k,\ \zeta_1 + Z'_k) \in B_{t,x}),$$

где (T'_k, Z'_k), $k = 0, 1, \cdots$—последовательность сумм однородных, независимых слагаемых, независимая от (τ_1, ζ_1). Поэтому меру восстановления множества $B_{t,x}$ в неоднородном случае можно представить в виде

$$H(B_{t,x}) = H(\{t\} \times \{x\}) = \mathbf{E}H_0(\{t - \tau_1\} \times \{x - \zeta_1\}). \tag{3.7}$$

В силу представления (3.7) имеем

$$H(\{t\} \times \{x\}) = \mathbf{E}(H_0(\{t - \tau_1\} \times \{x - \zeta_1\});\ |\xi_1| \le \ln^2 n)+$$
$$\mathbf{E}(H_0(\{t - \tau_1\} \times \{x - \zeta_1\});\ |\xi_1| > \ln^2 n).$$

Поэтому

$$\Big| H(\{t\} \times \{x\}) - \mathbf{E}(H_0(\{t - \tau_1\} \times \{x - \zeta_1\});\ \ |\xi_1| \le \ln^2 n) \Big| = \sum_{k=1}^{\infty} P_k,$$

где

$$P_k := \mathbf{P}(T_k = t,\ Z_k = x,\ |\xi_1| > \ln^2 n),$$

и для доказательства леммы 3.2 достаточно установить, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k \le C e^{-n\mathbf{D}(\theta,\alpha) - c\ln^2 n}. \tag{3.8}$$

Для всех достаточно больших n выполняется $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) \in (\mathcal{A})$. Поэтому для таких n при любом $k \ge 1$ имеем

$$P_k = \mathbf{E}(e^{-\widehat{\lambda}T_k - \widehat{\mu}Z_k + \widehat{\lambda}T_k + \widehat{\mu}Z_k};\ T_k = t,\ Z_k = x,\ |\xi_1| > \ln^2 n) \le$$
$$\exp\{-\widehat{\lambda}t - \widehat{\mu}x\}\mathbf{E}(e^{\widehat{\lambda}T_k + \widehat{\mu}Z_k}; |\xi_1| > \ln^2 n) =$$
$$\exp\{-nD(\theta, \alpha)\}\mathbf{E}(e^{\widehat{\lambda}\tau_1 + \widehat{\mu}\zeta_1};\ |\xi_1| > \ln^2 n) \prod_{j=2}^{k} \mathbf{E}e^{\widehat{\lambda}\tau_j + \widehat{\mu}\zeta_j} \le$$
$$\exp\{-nD(\theta, \alpha)\}\mathbf{E}(e^{\widehat{\lambda}\tau_1 + \widehat{\mu}\zeta_1};\ |\xi_1| > \ln^2 n).$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем обстоятельством, что вектор $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu})$ для всех достаточно больших n лежит на границе множества $\mathcal{A}^{\le 0}$ и для него при $j \ge 2$ выполняется

$$\mathbf{E}e^{\widehat{\lambda}\tau_j + \widehat{\mu}\zeta_j} = 1.$$

Применяя далее неравенство Гельдера, получаем для $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$

$$\mathbf{E}(e^{\widehat{\lambda}\tau_1 + \widehat{\mu}\zeta_1};\ |\xi_1| > \ln^2 n) \le \left(\mathbf{E}e^{\frac{1}{p}\widehat{\lambda}\tau_1 + \frac{1}{p}\widehat{\mu}\zeta_1}\right)^p \mathbf{P}^q\left(|\xi_1| > \ln^2 n\right).$$

Так как в силу условия допустимой неоднородности (2.28) для всех достаточно больших n выполняется $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu}) \in (\mathcal{A}_1)$, то выбирая параметр $\frac{1}{p} > 1$ достаточно близким к 1, получаем

$$\mathbf{E}e^{\frac{1}{p}\widehat{\lambda}\tau_1 + \frac{1}{p}\widehat{\mu}\zeta_1} \le C_0 < \infty.$$

Для $q = 1 - p$ и некоторых $C_1 < \infty$, $c_1 > 0$ имеем (в силу условия $[\mathbf{C}_0]$)

$$\mathbf{P}^q(|\xi_1| > \ln^2 n) \le C_1 e^{-c_1 \ln^2 n}.$$

Поэтому для любых $k \ge 1$ справедливо неравенство

$$P_k \le C_0^p C_1 e^{-nD(\theta,\alpha) - c_1 \ln^2 n}. \tag{3.9}$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k \le n^2 \sup_{k \ge 1} P_k + \sum_{k \ge n^2} P_k, \tag{3.10}$$

где первое слагаемое в правой части оценивается с помощью (3.9), а второе — с помощью неравенств

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{k \ge n^2} P_k \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{k \ge n^2} \mathbf{P}(T_k = t) = -\infty. \tag{3.11}$$

Из неравенств (3.9)—(3.11) вытекает, что для некоторых $c > 0$, $C < \infty$ справедливо (3.8). Лемма 3.2 доказана.

В силу (3.6) для доказательства утверждения (2.27) в общем случае достаточно отыскать асимптотику среднего

$$\mathbf{E}(H_0(\{t - \tau_1\} \times \{x - \zeta_1\}); \ \ |\xi_1| \le \ln^2 n).$$

В силу результата первого шага и (3.6) имеем

$$H(\{t\} \times \{x\}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{E}\left(C_1\left(\theta - \frac{\tau_1}{n}, \alpha - \frac{\zeta_1}{n}\right) e^{-nD\left(\theta - \frac{\tau_1}{n}, \alpha - \frac{\zeta_1}{n}\right)} (1 + o(1)); \ \ |\xi_1| \le \ln^2 n \right) + \tag{3.12}$$

$$o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-nD(\theta,\alpha)}\right).$$

Учитывая, что в области $|\xi_1| \le \ln^2 n$ при $n \to \infty$ выполняется

$$-nD\left(\theta - \frac{\tau_1}{n}, \alpha - \frac{\zeta_1}{n}\right) = -nD(\theta,\alpha) + \widehat{\lambda}\tau_1 + \widehat{\mu}\zeta_1 + o(1),$$

получаем, что правая часть (3.12) совпадает справой частью (2.27). Теорема 2.2A доказана.

3.2. Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.1A. Имеем

$$P_n := \mathbf{P}(Z(n) = x) =$$

$$\mathbf{P}(Z_0 = x, \ \nu(n) = 0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(Z_k = x, \ \nu(n) = k) = \mathbf{I}_{\{x=0\}} \mathbf{P}(\tau_1 \ge n) + R_n,$$

где

$$K_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(Z_k = x, \ \nu(n) = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(Z_k = x, \ T_n < n, \ T_{k+1} \ge n).$$

С помощью функции восстановления $H(\{\cdot\} \times \{x\})$ слагаемое R_n представляем в виде

$$K_n = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(Z_k = x, \ T_k = m, \ T_{k+1} \ge n) =$$

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(Z_k = x,\ T_k = m)\mathbf{P}(\tau \geq n-m) =$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} H(\{m\}\times\{x\})\mathbf{P}(\tau \geq n-m).$$

Мы получили, таким образом, представление

$$P_n = \mathbf{I}_{\{x=0\}}\mathbf{P}(\tau_1 \geq n) + \sum_{m=0}^{n-1} Q_n(m), \tag{3.13}$$

где

$$Q_n(m) := H(\{m\}\times\{x\})\mathbf{P}(\tau \geq n-m), \quad m \in \{0, \cdots, n-1\}.$$

Воспользуемся следующим утверждением (ср. с леммой 3.2):

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1A. Тогда для некоторых $c > 0$, $C < \infty$, $n_0 < \infty$, для всех $n \geq n_0$ справедливо неравенство*

$$R_n := \mathbf{P}(Z(n) = x, \tau_{\nu(n)+1} \geq \ln^2 n) \leq Cne^{-nD(\alpha) - c\ln^2 n}.$$

Лемму 3.3 докажем несколько позже в настоящем разделе, а сейчас с ее помощью завершим доказательство теоремы 2.1A. Найдем асимптотику

$$L_n := \sum_{k=1}^{[\ln^2 n]} H(\{n-k\}\times\{x\})\mathbf{P}(\tau \geq k).$$

Применяя теорему 2.2A, получаем

$$L_n = \sum_{k=1}^{[\ln^2 n]} \frac{1}{\sqrt{n}}\psi_1(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))C_H(1,\alpha)e^{-nD\left(1-\frac{k}{n},\alpha\right)}\mathbf{P}(\tau \geq k)(1+o(1)).$$

Поскольку в зоне $1 \leq k \leq [\ln^2 n]$ выполняется

$$-nD\left(1-\frac{k}{n},\alpha\right) = -D(1,\alpha) + (\lambda(\alpha)+o(1))k,$$

из последнего получаем

$$L_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\psi_1(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))C_H(1,\alpha)e^{-nD(1,\alpha)}\sum_{k=1}^{[\ln^2 n]} e^{\lambda(\alpha)k}\mathbf{P}(\tau \geq k)(1+o(1)) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\psi_1(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))C_H(1,\alpha)e^{-nD(1,\alpha)}I(\alpha)(1+o(1)).$$

Таким образом, мы получили асимптотику, совпадающую с правой частью соотношения (2.15). Поскольку из (3.13) и леммы 3.3 следует для всех достаточно больших n, что

$$|P_n - L_n| \leq R_n \leq Cne^{-nD(\alpha) - c\ln^2 n},$$

то получаем требуемое соотношение (2.15).

Нам осталось выполнить

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3.3. Оценим сначала каждое слагаемое в правой части равенства

$$\mathbf{P}(Z(n) = x, \quad \tau_{\nu(n)+1} \geq \ln^2 n) =$$

$$(3.14)\quad \mathbf{I}_{\{x=0\}}\mathbf{P}(\tau_1 \geq n) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(Z_k = x,\ \ T_k < n,\ T_{k+1} \geq n,\ \ B_n) =: \sum_{k=0}^{n} R_k(n),$$

где $B_n := \{\tau_{k+1} \geq \ln^2 n\}$. В силу условий теоремы 2.1A имеем для некоторых $c > 0$, $C < \infty$

$$R_0(n) = \mathbf{I}_{\{x=0\}}\mathbf{P}(\tau_1 \geq n) \leq Ce^{-nD(\alpha)-cn}.$$

Для $k \geq 1$ имеем далее

$$R_k(n) := \mathbf{P}(Z_k = x,\ \ T_k < n,\ T_{k+1} \geq n,\ \ B_n) =$$
$$e^{-n(\lambda(\alpha)+\mu(\alpha)\frac{x}{n})}\mathbf{E}(e^{n\lambda(\alpha)+\mu(\alpha)Z_k};\ Z_k = x,\ \ T_k < n,\ T_{k+1} \geq n,\ \ B_n).$$

Применяя далее абсолютно-непрерывное преобразование, переводящее распределения векторов (τ_1, ζ_1), (τ, ζ) в распределения

$$\mathbf{P}((\widehat{\tau}_1, \widehat{\zeta}_1) \in B) := \frac{1}{\psi_1(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))}\mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)\tau_1+\mu(\alpha)\zeta_1};\ (\tau_1, \zeta_1) \in B),$$

$$\mathbf{P}((\widehat{\tau}, \widehat{\zeta}) \in B) := \mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)\tau+\mu(\alpha)\zeta};\ (\tau, \zeta) \in B),$$

получаем при естественной интерпретации обозначений $\widehat{T}_k$, $\widehat{Z}_k$ равенство

$$R_k = e^{-nD(\alpha)}\psi_1(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))E_k,$$

где

$$E_k := \mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)(n-\widehat{T}_k)};\ \widehat{Z}_k = x,\ \ \widehat{T}_k < n,\ \widehat{T}_k + \tau_{k+1} \geq n,\ \ B_n).$$

Оценим теперь сверху E_k.

Если $\lambda(\alpha) \leq 0$, то на событии $\{\widehat{T}_k < n\}$ имеем $e^{\lambda(\alpha)(n-\widehat{T}_k)} \leq 1$ и

$$E_k \leq \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(\tau \geq \ln^2 n) \leq Ce^{-c\ln^2 n}.$$

Если $\lambda(\alpha) > 0$, то на событии $\{\widehat{T}_k + \tau_{k+1} \geq n\}$ имеем

$$e^{\lambda(\alpha)(n-\widehat{T}_k)} = e^{\lambda(\alpha)(n-\widehat{T}_k-\tau_{k+1})+\lambda(\alpha)\tau_{k+1}} \leq e^{\lambda(\alpha)\tau_{k+1}}$$

и

$$(3.15)\qquad E_k \leq \mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)\tau_{k+1}},\ \ B_n) = \mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)\tau},\ \ \tau \geq \ln^2 n).$$

В силу неравенства Гельдера для $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$, имеем

$$(3.16)\qquad \mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)\tau_{k+1}},\ \ B_n) = \mathbf{E}(e^{\lambda(\alpha)\tau},\ \ \tau \geq \ln^2 n) \leq \mathbf{E}^p e^{\frac{\lambda(\alpha)}{p}\tau}\mathbf{P}^q(\tau \geq \ln^2 n).$$

В силу условий теоремы 2.1A найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $p_0 \in (0, 1)$, $C_0 < \infty$ такие, что для всех достаточно больших n

$$\frac{\lambda(\alpha)}{p_0} \leq \lambda_+ - \varepsilon_0, \quad \mathbf{E}^p e^{\frac{\lambda(\alpha)}{p}\tau} \leq C_0,$$

поэтому из (3.15), (3.16) вытекает для $q_0 = 1 - p_0$

$$E_k \leq C_0\mathbf{P}^{q_0}(\tau \geq \ln^2 n).$$

Мы получили и в этом случае для некоторых $c > 0$, $C < \infty$ неравенство

$$E_k \leq Ce^{-c\ln^2 n}.$$

Таким образом, для некоторых $c > 0$, $C < \infty$, $n_0 < \infty$ и при всех $n \geq n_0$ каждое слагаемое в правой части (3.14) удовлетворяет неравенству

$$(3.17)\qquad R_k(n) \leq Ce^{-nD(\alpha)-c\ln^2 n}.$$

В силу (3.17) имеем

$$\mathbf{P}(Z(n) = x, \quad \tau_{\nu(n)+1} \geq \ln^2 n) \leq (n+1)Ce^{-nD(\alpha)-c\ln^2 n}.$$

Лемма 3.3 доказана. Теорема 2.1A доказана.

3.3. Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 2.1. В силу того, что для случайного вектора $\xi = (\tau, \zeta)$ выполнено условие $[\mathbf{C}_0]$, точка $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ лежит в области $\mathcal{A}$ аналитичности функции $A(\lambda, \mu)$. Поэтому точка $(a_\tau, a_\zeta) = A'(\lambda, \mu)|_{(\lambda,\mu)=(0,0)}$ лежит в области $\mathcal{L}$ аналитичности функции уклонений $\Lambda(\theta, \alpha)$. Следовательно, точка $a := \frac{a_\zeta}{a_\tau}$ лежит в конусе $\mathcal{D}$ (области аналитичности функции $D(\alpha)$). Поэтому, в силу леммы 2.1 имеем

$$(\lambda(a), \mu(a)) = (0, 0), \quad D(a) = \lambda(a) + \mu(a)a = 0, \quad D(a) = \mu(a) = 0.$$

Поскольку для случайного вектора $\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1)$ выполнено условие $[\mathbf{C}_0]$, то видим, что для $\alpha_0 = a$ «автоматически» выполняются условия (2.16), (2.17), (2.18) теоремы 2.1A. Поэтому, применяя для $\alpha_0 = a$ теорему 2.1A, получаем утверждение (2.22) следствия 2.1. Следствие 2.1 доказано.

3.4. Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2.1. I. Установим равенство (2.21). Напомним, что для точек α из некоторой окрестности точки $\alpha_0 = a$ выполняется

$$D(\alpha) = \mu(\alpha)\alpha - A(\mu(\alpha)),$$

где функция $A(\mu)$ является решением уравнения

$$\psi(-A(\mu), \mu) = 1, \quad \psi(\lambda, \mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau+\mu\zeta}, \tag{3.18}$$

а функция $\mu(\alpha)$ является обратной к функции $A'(\mu)$, т.е. удовлетворяет уравнению

$$A'(\mu(\alpha)) = \alpha.$$

Убедимся, что

$$A(0) = 0, \quad A'(0) = a, \quad A''(0) = \sigma^2, \tag{3.19}$$

$$D(a) = 0, \quad D'(a) = 0, \quad D''(a) = \frac{1}{\sigma^2}. \tag{3.20}$$

Равенства (3.19) получаются из уравнения (3.18) с помощью дифференцирования его нужное число раз:

(0) при $\mu = 0$ в силу $\psi(0, 0) = 1$ имеем $A(0) = 0$;

(1) дифференцируем равенство (3.18) один раз при $\mu = 0$, имеем

$$\psi_1'(0, 0)(-A'(0)) + \psi_2'(0, 0) = 0;$$

поэтому

$$A'(0) = \frac{\psi_2'(0, 0)}{\psi_1'(0, 0)} = a;$$

(2) дифференцируем равенство (3.18) два раза при $\mu = 0$, имеем

$$\psi''_{1,1}(0, 0)(-A'(0))^2 - 2\psi''_{1,2}(0, 0)A'(0) + \psi''_{2,2}(0, 0) - \psi'_1(0, 0)A''(0) = 0;$$

поэтому

$$A''(0) = \frac{1}{\psi_1'(0, 0)}[\mathbf{E}\zeta^2 - 2a\mathbf{E}\zeta\tau + a^2\mathbf{E}\tau^2] = \sigma^2.$$

Равенства (3.19) установлены. Поскольку функции $D'(\alpha)$ и $A'(\mu)$ являются взаимно-обратными, то из равенств (3.19) следуют равенства (3.20). Равенство (2.21) доказано.

II. Установим равенство (2.20). Напомним, что

$$C(\alpha) := C_H(1,\alpha), \quad I(\alpha) := \int_0^\infty e^{\lambda(\alpha)y}\mathbf{P}(\tau > y)dy, \quad \lambda(\alpha) = -A(\mu(\alpha)),$$

где

$$C_H(\theta,\alpha) = \sqrt{\frac{\hat\theta|\Lambda''(\hat\theta,\hat\alpha)|}{2\pi\theta Q(\hat\theta,\hat\alpha)}},$$

$$Q(\hat\theta,\hat\alpha) = (\hat\theta,\hat\alpha)\Lambda''(\hat\theta,\hat\alpha)(\hat\theta,\hat\alpha)^T,$$

$$\left(\hat\theta,\hat\alpha\right) = A'\left(\lambda\left(\frac{\alpha}{\theta}\right),\mu\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right). \tag{3.21}$$

Убедимся, что справедливы равенства

$$I(a) = \mathbf{E}\tau, \quad C(a) = \frac{1}{\sigma\mathbf{E}\tau\sqrt{2\pi}}. \tag{3.22}$$

Первое равенство в (3.22) очевидно. Из определения (3.21) вытекает при $(\theta,\alpha) = (1,a)$:

$$(\hat\theta,\hat\alpha) = A'(\lambda(a),\mu(a)) = A'(0,0) = (a_\tau,a_\zeta).$$

Следовательно, (второе равенство см в [1])

$$\Lambda''(\hat\theta,\hat\alpha) = \Lambda''(a_\tau,a_\zeta) = M^{-1},$$

где

$$M = \|M_{i,j}\|_{i,j=1,2}$$

— ковариационная матрица случайного вектора (τ,ζ):

$$M_{1,1} = \mathbf{E}\tau_0^2, \quad M_{1,2} = M_{2,1} = \mathbf{E}\tau_0\zeta_0, \quad M_{2,2} = \mathbf{E}\zeta_0^2,$$

где $\tau_0 := \tau - a_\tau$, $\zeta_0 := \zeta - a_\zeta$. Следовательно,

$$\Lambda''(\hat\theta,\hat\alpha) = \frac{1}{|M|}C, \quad C = \|C_{i,j}\|_{i,j=1,2},$$

где $|M|$ — определитель матрицы M,

$$C_{1,1} = M_{2,2}, \quad C_{2,2} = M_{1,1}, \quad C_{1,2} = C_{2,1} = -M_{1,2}.$$

Далее, имеем

$$|\Lambda''(\hat\theta,\hat\alpha)| = \frac{1}{|M|},$$

$$Q(\hat\theta,\hat\alpha) = \frac{1}{|M|}(a_\tau)^3\mathbf{E}(\zeta_0 - a\tau_0)^2 = \frac{1}{|M|}(a_\tau)^3\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2 = \frac{1}{|M|}(a_\tau)^3\sigma^2.$$

Поэтому

$$C(a) = \sqrt{\frac{a_\tau\frac{1}{|M|}}{\frac{2\pi(a_\tau)^3\sigma^2}{|M|}}} = \frac{1}{a_\tau\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Второе равенство в (3.22) установлено. Лемма 2.1 доказана.

Автор благодарит Е.И.Прокопенко за доказательство леммы 2.1 и А.В.Логачева за ценные замечания.

References

[1] A.A. Borovkov, *Asymptotic analysis of random walks. Rapidly decreasing distributions of increments,* Moscow: Fizmatlit, 2013. Zbl 1351.60003

[2] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Large deviation principles for the finite-dimensional distributions of compound renewal processes*, Sib. Math. J., **56**:1 (2015), 28–53. MR3407938

[3] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Large Deviation Principles for Trajectories of Compound Renewal Processes. I*, Theory Probab. Appl., **60**:2 (2016), 207–224. MR3568773

[4] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Large Deviation Principles for Trajectories of Compound Renewal Processes. II*, Theory Probab. Appl., **60**:3 (2016), 349–366. MR3568786

[5] A.A. Borovkov, *Large deviation principles in boundary problems for compound renewal processes*, Siberian Mathematical Journal, **57**:3 (2016), 562–595. MR3548784

[6] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. I*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 491–514. Zbl 06935967

[7] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. II*, Siberian Mathematical Journal, **59**:4 (2018), 731–750. Zbl 06976637

[8] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. I,* Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 475–502. MR3814167

[9] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. II,* Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 475–502. MR3814168

[10] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. III,* Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 528–553. MR3814169

[11] D.P. Koks, W. L. Smith, *Renewal Theory [Russian translation]*, Moscow: Sov. Radio, 1967. MR0224173

[12] S. Asmussen, H. Albrecher, *Ruin Probabilities*, Second Edition, Hackensack: Word Scientifics Publishing, 2010. MR2766220

[13] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Chebyshev-Type Exponential Inequalities for Sums of Random Vectors and for Trajectories of Random Walks*, Theory Probab. Appl., **56**:1 (2012), 21–43. MR2848414

[14] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *The second rate function and the asymptotic problems of renewal and hitting the boundary for multidimensional random walks*, Sib. Math. J., **37**:4 (1996), 647–682. MR1643358

Anatolii Alfredovich Mogulskii
Sobolev Institute of Mathematics,
4, pr. Koptyuga,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: `mogul@math.nsc.ru`