S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 258–262 (2019) УДК 511.4

DOI 10.33048/semi.2019.16.017 MSC 33C20, 11J91

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЖДЕСТВАХ МЕЖДУ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ УРАВНЕНИЙ БЕССЕЛЯ И КУММЕРА

В.А. ГОРЕЛОВ

Abstract. Examples of algebraic identities between solution matrices of Bessel's and Kummer's equations and their generalizations are found. Errors in some theorems of F. Beukers and other authors are corrected.

Keywords: hypergeometric functions, Siegel's method, algebraic independence.

1. Введение

Пусть $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{A}$ — множество всех алгебраических чисел, $GL(q, K)$ — полная линейная группа матриц размера $q \times q$ с элементами из кольца K. При $\gamma, \beta \in \mathbb{C}$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $\gamma\vec{\mu} + \beta = (\gamma\mu_1 + \beta, \ldots, \gamma\mu_n + \beta)$. Для векторов $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ будем писать $\vec{\mu} \sim \vec{\eta}$, если существует перестановка π чисел $1, \ldots, n$ такая, что $\mu_i - \eta_{\pi(i)} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$.

Один из основных методов теории трансцендентных чисел — метод Зигеля-Шидловского (см. [1], [2]) — позволяет доказывать трансцендентность и алгебраическую независимость значений целых функций некоторого класса, если эти функции алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Ф. Бейкерсом, В. Браунвеллом и Г. Хекманом [3], а фактически ещё ранее Е. Колчиным [4], были введены важные для установления алгебраической независимости функций понятия коградиентности и контрградиентности дифференциальных уравнений и систем уравнений.

Gorelov, V.A., On algebraic identities between solution matrices of Bessel's and Kummer's equations.

Поступила 18 февраля 2018 г., опубликована 26 февраля 2019 г.

Если Φ_1, Φ_2 — произвольные фундаментальные матрицы двух линейных однородных дифференциальных уравнений и выполняется одно из равенств

$$\Phi_1 = gB\Phi_2 C, \qquad \Phi_1(\Phi_2 C)^T = gB,$$

где $C \in GL(q,\mathbb{C})$, $B \in GL(q,\mathbb{C}(z))$, $g = g(z)$ — функция с условием $g'/g \in \mathbb{C}(z)$, то исходные дифференциальные уравнения называются коградиентными (соответственно контрградиентными).

В статье [3] рассматривались гипергеометрические функции вида

$$f_S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_n \ldots (\mu_p)_n}{(\nu_1)_n \ldots (\nu_{q-1})_n\, n!}(-z)^{(q-p)n},$$

где $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$, $S = \{\mu_1,\ldots,\mu_p;\nu_1,\ldots,\nu_q\}$, $\nu_q = 1$, $q > p \geqslant 0$, $q \geqslant 2$. Таким образом, $f_S(z)$ — целая функция 1-го порядка, получаемая из обобщённой гипергеометрической функции типа ${}_pF_{q-1}$ подстановкой $z \to (-z)^{q-p}$. В других работах по методу Зигеля (см. [1], [2], [5]) используют подстановку $z \to (z/(q-p))^{q-p}$ и исключают условие $\nu_q = 1$.

Параметрическое семейство S в статье [3] называется допустимым, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

A) $\nu_j - \mu_i \notin \mathbb{Z}$ и все суммы $\nu_k + \nu_l$, $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant q$ различны по $\mod \mathbb{Z}$.

B) $p = 0$; q — нечётно или $q = 2$; множество $\{\nu_1,\ldots,\nu_q\}$ по $\mod \mathbb{Z}$ не является объединением прогрессий $\{\nu, \nu+1/d, \ldots, \nu+(d-1)/d\}$, где $d|q$, $q > 1$.

Два параметрических семейства $S = \{\mu_1,\ldots,\mu_p;\nu_1,\ldots,\nu_q\}$ и $S' = \{\mu'_1,\ldots,\mu'_{p'};\nu'_1,\ldots,\nu'_{q'}\}$ в [3] называются подобными, если $p = p'$, $q = q'$ и для некоторых $\mu,\nu \in \mathbb{R}$, $r \in \{0;1\}$

$$(\mu_1,\ldots,\mu_p) \sim (-1)^r(\mu'_1,\ldots,\mu'_p) + \mu, \quad (\nu_1,\ldots,\nu_q) \sim (-1)^r(\nu'_1,\ldots,\nu'_q) + \nu.$$

Согласно основному утверждению статьи [3], если $S_1,\ldots,S_r$ — допустимые семейства рациональных параметров, числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_r \in \mathbb{A}\setminus\{0\}$, $b_1,\ldots,b_s \in \mathbb{A}$, причём $b_1,\ldots,b_s$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, а $(\pm\alpha_i/\alpha_j)^{q-p} \neq 1$ в случае подобия S_i и S_j, $1 \leqslant i < j \leqslant r$, то числа

$$f_{S_1}(\alpha_1), f'_{S_1}(\alpha_1), \ldots, f^{(q_1-1)}_{S_1}(\alpha_1), \ldots, f_{S_r}(\alpha_r), f'_{S_r}(\alpha_r), \ldots, f^{(q_r-1)}_{S_r}(\alpha_r)$$

вместе с числами $e^{b_1},\ldots,e^{b_s}$ алгебраически независимы.

В настоящей заметке находится контрпример к этому утверждению, а также указывается путь исправления допущенной в [3] ошибки.

С этой целью рассмотрим функции Куммера

$$A_{\nu,\mu}(z) = {}_1F_1\left(\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\middle|\, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu)_n}{(\nu)_n\, n!} z^n,$$

удовлетворяющие уравнениям

$$y'' + \left(-1 + \frac{\nu}{z}\right) y' - \frac{\mu}{z}\, y = 0, \tag{1}$$

и функции

$$K_\lambda(z) = {}_0F_1\left(\begin{matrix}-\\ \lambda+1\end{matrix}\middle|\, -\frac{z^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda+1)_n\, n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

отличающиеся от функций Бесселя $J_\lambda(z)$ с индексом λ только множителем $(z/2)^\lambda(\Gamma(\lambda+1))^{-1}$ и удовлетворяющие уравнениям

$$y'' + \frac{2\lambda+1}{z}y' + y = 0. \tag{2}$$

Имеет место тождество

$$K_\lambda(z) = e^{\mp iz}A_{2\lambda+1,\lambda+1/2}(\pm 2iz). \tag{3}$$

Оно справедливо в силу того, что обе его части удовлетворяют уравнению (2), а первые два коэффициента их степенных разложений совпадают (см. также [6, п. 7.1, формула (4б)]). В обозначениях статьи [3] тождество (3) запишется как

$$f_{S_1}(iz/2) = e^{\pm iz}f_{S_2}(\pm 2iz), \tag{4}$$

где $S_1 = \{\lambda+1, 1\}$, $S_2 = \{\lambda+1/2; 2\lambda+1, 1\}$. Положив в основном утверждении статьи [3] $\alpha_1 = i/2$, $\alpha_2 = 2i$, $b_1 = i$, $4\lambda \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, получаем противоречие с тождеством (4).

Найденная ошибка в статье [3] (повторённая также в [5] и [7]) происходит из того, что при доказательстве её основного утверждения не рассмотрена возможность коградиентности и контрградиентности уравнений для гипергеометрических функций с равными значениями q, но разными p. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $2\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{N}$, *а* Φ_1, Φ_2, Φ_3 — *фундаментальные матрицы, отвечающие наборам функций, соответственно,*
$\{K_\lambda(\alpha z^s), z^{-2s\lambda}K_{-\lambda}(\alpha z^s)\}$, $\{A_{2\lambda+1,\lambda+1/2}(2i\alpha z^s), z^{-2s\lambda}A_{1-2\lambda,1/2-\lambda}(2i\alpha z^s)\}$,
$\{A_{1-2\lambda,1/2-\lambda}(-2i\alpha z^s), -z^{2s\lambda}A_{2\lambda+1,\lambda+1/2}(-2i\alpha z^s)\}$.
Тогда имеют место тождества

$$\Phi_1 = e^{-i\alpha z^s}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -is\alpha z^{s-1} & 1 \end{pmatrix}\Phi_2, \tag{5}$$

$$\Phi_1\Phi_3^T = 2s\lambda z^{-1}e^{-i\alpha z^s}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -is\alpha z^{s-1} + 2s\lambda z^{-1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Тождества (5), (6) можно обобщить на произвольные фундаментальные матрицы уравнений, соответствующих функциям $f_{S_k}(\alpha_k z^{s_k})$, где $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $s_k \in \mathbb{N}$, $S_k = \{\vec{\mu}_k; \vec{\nu}_k\} = \{\mu_{k,1}, \ldots, \mu_{k,p_k}; \nu_{k,1}, \ldots, \nu_{k,q_k}\}$, $\vec{\mu}_k \in \mathbb{C}^{p_k}$, $\vec{\nu}_k \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $k = 1, 2$, с условием

$$\begin{gathered} q_1 = q_2 = 2,\ p_1 = 0,\ p_2 = 1,\ s_1 = s_2 = s,\ \alpha_2 = \pm 4\alpha_1, \\ \vec{\nu}_2 - \nu_{2,j} \sim \pm 2(\vec{\nu}_1 - \nu_{1,1}),\ 1 \leqslant j \leqslant 2,\ 2\mu_{2,1} - \nu_{2,1} - \nu_{2,2} \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{7}$$

Следует отметить, что если из формулировок и доказательств теорем об алгебраической независимости значений функций в статьях [3], [5], [7] исключить случай (7), то они станут верными.

2. Доказательство теоремы

Лемма 1. *Пусть* Φ, Φ_1, Φ_2 — *фундаментальные матрицы, отвечающие наборам функций* $\{v_1, \ldots, v_q\}$, $\{z^\beta v_1, \ldots, z^\beta v_q\}$ *и* $\{e^{\gamma z}v_1, \ldots\ e^{\gamma z}v_q\}$ *соответственно,* $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$\Phi_1 = z^\beta B_1\Phi, \qquad \Phi_2 = e^{\gamma z}B_2\Phi,$$

где $B_1 \in GL(q, \mathbb{C}[z^{-1}])$, $B_2 \in GL(q, \mathbb{C})$, *причём матрицы* B_1, B_2 *являются нижнетреугольными с единицами на главной диагонали и не зависят от* $v_1, \ldots, v_q$.

Доказательство. Применяя формулу Лейбница, выразим k-ю строку матрицы Φ_1 в виде произведения z^β на линейную комбинацию первых k строк матрицы Φ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z^{-1}]$, причём коэффициент при k-й строке будет равен 1. Эти коэффициенты в совокупности составят матрицу B_1. Аналогично находится матрица B_2. □

Лемма 2. *Пусть* $\Phi = \Phi(z)$, $\Psi = \Psi(z)$ — *фундаментальные матрицы, отвечающие наборам функций* $\{v_1(z), \ldots, v_q(z)\}$ *и* $\{v_1(\alpha z^s), \ldots, v_q(\alpha z^s)\}$ *соответственно,* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $s \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\Psi(z) = B\Phi(\alpha z^s),$$

где $B \in GL(q, \mathbb{C}[z])$ — *нижнетреугольная матрица с определителем* $|B| = (\alpha s z^{s-1})^{q(q-1)/2}$, *не зависящая от* $v_1, \ldots, v_q$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. □

Если разности соответствующих параметров двух гипергеометрических функций являются целыми числами, то такие функции называются смежными или ассоциированными. В лемме 12 статьи [7] для произвольных гипергеометрических функций обобщаются т. н. соотношения смежности, найденные ещё Гауссом. В частности, из этой леммы следует, что однородные линейные дифференциальные уравнения, соответствующие уравнениям, которым удовлетворяют смежные функции, являются коградиентными. Кроме того, в статьях [7] и [8] показано, что нетривиальные примеры контргградиентности гипергеометрических уравнений получаются из тождеств для фундаментальных матриц сопряжённых уравнений.

Для доказательства теоремы, заменив в тождестве (3) λ на $-\lambda$, умножим обе его части на $z^{-2\lambda}$. Тогда тождество (3) распространяется на фундаментальные системы решений уравнений (1) и (2) соответственно и принимает вид

$$(K_\lambda(z), z^{-2\lambda}K_{-\lambda}(z)) = e^{-iz}(A_{2\lambda+1,\lambda+1/2}(2iz), z^{-2\lambda}A_{1-2\lambda,1/2-\lambda}(2iz)),$$

откуда согласно лемме 1 получаем тождество (5) при $\alpha = s = 1$. Тождество (6) при $\alpha = s = 1$ следует из (5) и доказательства теоремы работы [8]. Если вместо Φ_1, Φ_2, Φ_3 взять произвольные фундаментальные матрицы уравнений (1), (2) и уравнения, сопряжённого с (2), то отсюда вытекает

$$\Phi_1 = e^{-iz}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\Phi_2 C,$$

$$\Phi_1\left(\Phi_3 C\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)^T = 2\lambda z^{-1}e^{-iz}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -i + 2\lambda z^{-1} \end{pmatrix},$$

где $C \in GL(q, \mathbb{C})$. Сделав в этих тождествах подстановку $z \longrightarrow \alpha z^s$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{N}$, с помощью леммы 2 получим (5) и (6) при произвольных α и s. Переход от уравнений (2) к уравнениям Бесселя и дальнейшее обобщение тождеств можно получить, изменяя параметры гипергеометрических функций и применяя лемму 1 и лемму 12 статьи [7]. Тогда они будут выражать, соответственно, коградиентность и контргградиентность двух гипергеометрических уравнений, удовлетворяющих условиям (7).

References

[1] C.L. Siegel, *Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen*, Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys. – Math. Kl., (1929–1930), **1**, 1–70. JFM 56.0180.05

[2] A.B. Shidlovskii, *Transcendental numbers*, Moscow: Nauka, 1987; Walter de Berlin–New York: Gruyter, 1989. MR1033015

[3] F. Beukers, W.D. Brownawell, G. Heckman, *Siegel normality*, Annals of Math., **127** (1988), 279–308. Zbl 0652.10027

[4] E.R. Kolchin, *Algebraic groups and algebraic dependence*, Amer. J. Math., **90**:4 (1968), 1151–1164. Zbl 0169.36701

[5] M.A. Cherepnev, *Algebraic independence of values of hypergeometric E-functions*, Mathematical Notes, **57**:6 (1995), 630–642. Zbl 0859.11049

[6] A. Kratzer, W. Franz, *Transzendente Funktionen*, Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1960; Moscow: IL, 1963. Zbl 0108.06501

[7] V.A. Gorelov, *On the algebraic independence of values of generalized hypergeometric functions*, Mathematical Notes, **94**:1 (2013), 82–95. DOI: 10.1134/S0001434613070080. MR3206070

[8] V.A. Gorelov, *On algebraic identities between generalized hypergeometric functions*, Mathematical Notes, **88**:4 (2010), 487–491. DOI: 10.1134/S0001434610090208. MR2882213

Vasily Alexandrovich Gorelov
National Research University "Moscow Power Engineering Institute",
14, Krasnokazarmennaya str.,
Moscow, 111250, Russia
E-mail address: gorelov.va@mail.ru