S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 263–270 (2019) УДК 517.518.28
DOI 10.33048/semi.2019.16.018 MSC 42A82

ОБОБЩЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ М. Г. КРЕЙНА, Е. А. ГОРИНА И Ю. В. ЛИННИКА ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА МНОГОТОЧЕЧНЫЙ СЛУЧАЙ

А. Б. ПЕВНЫЙ, С. М. СИТНИК

Abstract. In the paper some generalizations are proved for well–known inequalities of M.G.Krein, E.A.Gorin and Yu.V.Linnik for positive definite functions for multipoint case. It is proved that multipoint inequality of E.A.Gorin is derived from two–point inequality of M.G.Krein for positive definite functions. Also generalizations are considered of Yu.V.Linnik inequality for characteristic functions in probability theory.

Keywords: M.G.Krein, E.A.Gorin and Yu.V.Linnik inequalities, positive definite functions, characteristic functions, Bochner's theorem.

1. Введение и основные определения

Теория положительно определённых функций (п.о.ф.) возникла в начале 20 века на стыке нескольких разделов математики. Из литературы по п.о.ф. отметим одну из первых оригинальных работ Матиаса [1], содержащую по существу все основные современные определения, обзор Стюарта [2] и монографию Бхатиа [3].

В данной работе доказываются варианты известных неравенств М.Г. Крейна, Ю.В. Линника и Е.А. Горина. Доказаны некоторые обобщения этих неравенств, установлена их взаимосвязь. Отметим, что для авторов инициирующей послужили статьи Е.А. Горина [4]–[5].

Дадим основное определение.

Pevnyi, A.B., Sitnik, S.M., On generalizations of M.G.Krein, E.A.Gorin and Yu.V.Linnik inequalities for positive definite functions for multipoint case.

Поступила 6 марта 2018 г., опубликована 5 марта 2019 г.

Определение 1. *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой функцией (п.о.ф.), если для любого N, любых $x_1, \dots x_N \in \mathbb{R}$ и любой последовательности комплексных чисел $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство*

$$\sum_{k,j=1}^{N} f\left(x_k - x_j\right) z_k \overline{z_j} \geq 0. \tag{1}$$

Из (1) следует, что $|f(x)| \leq f(0)$ и $f(-x) = \overline{f(x)}$. для всех $x \in \mathbb{R}$. Вещественная часть п.о.ф. снова является п.о.ф. По поводу этих фактов см. [2] или [3]. Важными примерами п.о.ф. являются $\exp(ix), \cos(x), \exp(-x^2)$.

2. Неравенство М.Г. Крейна и его обобщение

Справедливо классическое неравенство М.Г. Крейна [3]–[8]:

$$|f\left(x\right) - f(y)|^2 \leq 2f\left(0\right)\left[f\left(0\right) - \Re f\left(x-y\right)\right];\ x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Нам понадобится следующее утверждение, вытекающее из теоремы 1.4.12(iv) из книги Сасвари [8] .

Теорема 1. [8] *Пусть функция $f(x)$ есть п.о.ф. на $\mathbb{R}$. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}$ и любого $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$ справедливо неравенство*

$$|\alpha f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(0)\left[f(0) - \Re\alpha f(x-y)\right]. \tag{3}$$

Доказательство проведем по той же схеме, что и в [8]. Не умаляя общности, можно считать, что $f(0) = 1$. Выберем в (1) три точки $0, x, y$ и рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \overline{f(x)} & \overline{f(y)} \\ f(x) & 1 & f(x-y) \\ f(y) & \overline{f(x-y)} & 1 \end{pmatrix}.$$

По условию (1) $(Az, z) \geq 0$ для любого $z \in \mathbb{C}^3$. Выберем теперь $z = (\beta, \alpha, -1)$, где $\beta \in \mathbb{C}$ — любое комплексное число. Поскольку $|\alpha| = 1$, отсюда следует, что

$$2 - 2\Re\alpha f(x-y) \geq -|\beta|^2 - 2\Re[(\alpha f(x) - f(y))\bar{\beta}].$$

Положим теперь $\beta = -[\alpha f(x) - f(y)]$. Тогда

$$2(1 - \Re\alpha f(x-y)) \geq |\alpha f(x) - f(y)|^2.$$

При $\alpha = -1$ из (3) получаем неравенство для п.о.ф.

$$|f(x) + f(y)|^2 \leq 2f(0)[f(0) + \Re f(x-y)]. \tag{4}$$

Отсюда следует, что если в некоторой точке $T \neq 0$ справедливо равенство $f(T) = -f(0)$, то

$$f(x+T) = -f(x), f(x+2T) = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Аналогичное комплексное следствие вытекает из теоремы 1.

Следствие 1. *Если в некоторой точке $T \neq 0$ выполнено равенство $f(T) = \alpha f(0)$, где $|\alpha| = 1$, то справедливо тождество*

$$f(x+T) = \alpha f(x), x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Доказательство. Возьмём в (3) $y = x + T$. Имеем

$$|\alpha f(x) - f(x+T)|^2 \le 2f(0)[f(0) - \Re\alpha f(-T)]. \tag{6}$$

Но $\alpha f(-T) = \alpha\overline{f(T)} = \alpha\overline{\alpha} f(0) = f(0)$, значит, правая часть (6) равна нулю, и, следовательно, выполнено (5).

Следствие 1 можно найти в [[4], лемма 1], где используется теорема Бохнера. У нас это следствие получается прямо из неравенства (3).

Классическое неравенство (2) получено в статье М.Г. Крейна [6] 1943 года, см. также [7]. В этой статье рассматривается проблема продолжения функции, положительно определённой на $(-R, R)$, на всю вещественную ось. Отметим, что прообраз этого неравенства был получен А.П.Артёменко (родился в 1909 г., некоторое время был сотрудником М.Г. Крейна в Одесском университете. Во время Второй мировой войны он пропал без вести). Из рассматриваемого неравенства немедленно выводится известная теорема А.П.Артёменко, выражающая важный факт теории положительно определённых функций: из непрерывности всего лишь $\Re f$ в единственной точке 0 вытекает равномерная непрерывность этой функции на всей действительной оси. Отметим, что, к сожалению, в работах [6]–[7] имеются неточности в определении п.о.ф. на интервале $(-R, R)$, а также в формулировках неравенства (2).

Возникает вопрос: если две п.о.ф. совпадают на некотором интервале $(-R, R)$, то будут ли они совпадать на всей вещественной оси? Ответ отрицательный, как показывает следующий

Пример. Рассмотрим функцию — "домик"(tent function)

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{при } |x| \le 2, \\ 0 & \text{при } |x| > 2. \end{cases}$$

Известно, что она положительно определена (см. [3], p. 149). Рассмотрим также "маленький домик"

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{при } |x| \le 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

и постоянную функцию $g_2(x) = 1$. Тогда $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ будет п.о.ф., и $f(x) = g(x)$ при $x \in [-1; 1]$. Но на всей оси f и g не совпадают.

3. Неравенство Ю.В. Линника и его усиления

Это неравенство справедливо для вещественных п.о.ф., которые в этом параграфе будем обозначать $u(x)$. Такие функции совпадают с известными в теории вероятностей характеристическими функциями симметричных распределений [8]–[11]. В книге [11] установлена

Теорема 2. [11] *Справедливо неравенство*

$$u(0) - u(2x) \le 4(u(0) - u(x)), x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Доказательство. Известно [3], что $|u(x)| \le u(0)$. Если $u(0) = 0$, то (7) тривиально. Если же $u(0) > 0$, то можно считать, что $u(0) = 1$. Положим в (4)

$y = -x$ и учтём, что $u(-x) = u(x)$. Получим $4u^2(x) \le 2(1 + u(2x))$, или после очевидных преобразований

$$1 + 2u^2(x) \le 2 + u(2x),$$

$$1 - u(2x) \le 2(1 - u^2(x)) \le 4(1 - u(x)).$$

Последнее неравенство равносильно $(u - 1)^2 \ge 0$.

Неравенство (7) приведено также в книге В. Феллера ([12], с. 560) без упоминания Ю.В. Линника. В отличие от [3], [8]–[11] в нашем доказательстве не используется теорема С. Бохнера об интегральном представлении п.о.ф. Попутно получено неравенство

$$1 - u(2x) \le 2(1 - u^2(x)), \tag{8}$$

которое обращается в равенство для п.о.ф. $u(x) = \cos(x)$.

Константа 4 в неравенстве (7) является наилучшей. Действительно, возьмём функцию $u(x) = \exp(-x^2)$, запишем для неё неравенство (7), поделим на x^2 и перейдём к пределу при $x \to 0$. Получим неравенство $4 \le 4$.

Теперь рассмотрим следствия неравенства Ю.В.Линника в случае $u(0) = 1$.

В этом случае $|u(x)| \le 1$ для всех x и неравенство (7) принимает вид

$$1 - u(2x) \le 4(1 - u(x)). \tag{9}$$

Элементарно проверяется, что неравенство (9) равносильно неравенству

$$1 + u(x) \le \frac{7 + u(2x)}{4}. \tag{10}$$

Многократно повторяя неравенство (9), получим неравенство

$$1 - u(2^m x) \le 4(1 - u(2^{m-1}x)) \le 4^m(1 - u(x)), m \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Наконец, если использовать неравенства (8) и (10), то выражение $1 - u(2^m x)$ можно оценить более точно. Покажем это, например, для $m = 3$:

$$1 - u(8x) \le 2(1 - u^2(4x)) = 2(1 - u(4x))(1 + u(4x))$$

$$\le 4(1 - u^2(2x))\frac{7 + u(8x)}{4} = 4(1 - u(2x))(1 + u(2x)) \cdot \frac{7 + u(8x)}{4}$$

$$\le 8(1 - u^2(2x)) \cdot \frac{7 + u(4x)}{4} \cdot \frac{7 + u(8x)}{4}$$

$$\le 8(1 - u(x)) \cdot \frac{7 + u(2x)}{4} \cdot \frac{7 + u(4x)}{4} \cdot \frac{7 + u(8x)}{4}.$$

Теорема 3. *При $u(0) = 1$ справедливо уточнение неравенства Ю.В.Линника*

$$1 - u(2^m x) \le 2^m(1 - u(x)) \prod_{k=1}^{m} \frac{7 + u(2^k x)}{4}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Это неравенство лучше, чем (11), так как каждый сомножитель в произведении не превосходит числа 2.

4. Основные многоточечные неравенства

Для вещественных п.о.ф. $u(x)$ можно установить неравенства, в которых участвуют суммы произвольных значений $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. *Для вещественных непрерывных п.о.ф. $u(x)$ справедливо неравенство*

$$u(0) - u(x_1 + \cdots + x_n) \leq n \sum_{k=1}^{n} (u(0) - u(x_k)) \tag{13}$$

для всех n и любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Можно считать, что $u(0) = 1$. По теореме Бохнера неравенство (13) переписывается в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \cos(t(x_1 + \cdots + x_n))] \, \mu(dt) \leq n \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos(tx_k)) \, \mu(dt), \tag{14}$$

где μ — некоторая вероятностная мера. Выполнение (14) для всех допустимых мер μ равносильно выполнению неравенства

$$1 - \cos(t(x_1 + \cdots + x_n)) \leq n \sum_{k=1}^{n} (1 - \cos(tx_k)) \tag{15}$$

для всех $t, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Положим $s_k = tx_k/2$ и преобразуем (15) к виду

$$\sin^2(s_1 + \cdots + s_n) \leq n \sum_{k=1}^{n} \sin^2(s_k). \tag{16}$$

Последнее неравенство следует из другого тригонометрического неравенства

$$|\sin(s_1 + \cdots + s_n)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\sin(s_k)|, \tag{17}$$

которое легко доказывается индукцией по n, после чего для доказательства неравенства (16) остаётся возвести (17) в квадрат и применить неравенство Коши–Буняковского. Теорема доказана.

Отметим, что при всей элементарности неравенства (17), оно не является прямым следствием выпуклости или неравенств типа Йенсена. В известной монографии по теории аналитических неравенств ([13], с. 236) это неравенство приведено в ослабленной форме и, как следствие, с ненужными ограничениями на величины s_k. С другой стороны, правильная форма неравенства (17) приведена в пособии для школьников ([14], с. 88).

Следствие 2. *Пусть n — натуральное число, f — непрерывная комплексная п.о.ф. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$|f(x_1 + \cdots + x_n) - f(y_1 + \cdots + y_n)|^2 \leq 2nf(0) \sum_{k=1}^{n} [f(0) - \Re f(x_k - y_k)]. \tag{18}$$

Замечание 1. *Это неравенство получено в статье Е.А.Горина ([4], теорема 1).*

Доказательство следствия 2. Считаем, что $f(0)=1$. По неравенству Крейна (2) левая часть L неравенства (18) оценивается так:

$$L \leq 2(1-\Re f(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)).$$

применим неравенство (13) к п.о.ф. $u(x)=\Re f(x)$. Получим

$$L \leq 2n\sum_{k=1}^{n}(1-u(x_k-y_k)),$$

что и требовалось доказать.

Как и в неравенстве Крейна в основном неравенстве (13) знак "минус" можно поменять на знак "плюс". Тогда получим два новых неравенства.

Теорема 5. *Для непрерывной вещественной п.о.ф. $u(x)$ справедливо неравенство*

$$u(0)-u(x_1+\cdots+x_n) \leq n\sum_{k=1}^{n}(u(0)+u(x_k)) \tag{19}$$

для любого чётного n и $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Совершенно так же, как в теореме 3 неравенство (19) сводится к тригонометрическому неравенству

$$\sin^2(s_1+\cdots+s_n) \leq n\sum_{k=1}^{n}\cos^2 s_k.$$

Для этого надо положить $s_k=\pi/2-t_k$ и учесть чётность n. Тогда требуемое неравенство сведётся к уже доказанному неравенству (16).

Отметим, что при нечётном n неравенство (19) не выполняется, например, для функции $u(x)=\cos(x)$ и при выборе точек $x_k=\pi$.

Для комплексной п.о.ф. $f(x)$ из (19) получаем неравенство

$$|f(x_1+\cdots+x_n)-f(y_1+\cdots+y_n)|^2 \leq 2nf(0)\sum_{k=1}^{n}[f(0)+\Re f(x_k-y_k)], \tag{20}$$

верное при любом чётном n.

Отметим, что неравенство с разными знаками "плюс"/"минус"могут нарушаться при всех n. А вот неравенство с двумя плюсами выполняется при нечётном n

$$u(0)+u(x_1+\cdots+x_n) \leq n\sum_{k=1}^{n}[u(0)+u(x_k)] \tag{21}$$

при всех $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$. Действительно, оно сводится ещё к одному тригонометрическому неравенству

$$\cos^2(s_1+\cdots+s_n) \leq n\sum_{k=1}^{n}\cos^2(s_k),$$

которое заменой $s_k=\frac{\pi}{2}-r_k$ при нечётных n переходит в (16).

Для комплексной п.о.ф. f(x) справедливо неравенство

$$|f(x_1+\cdots+x_n)+f(y_1+\cdots+y_n)|^2 \leq 2nf(0)\sum_{k=1}^{n}[f(0)+\Re f(x_k-y_k)], \tag{22}$$

для любого нечётного n. Для доказательства надо применить сначала неравенство (4), а затем (21). При чётном n неравенства (21)–(22) не выполняются, что видно из примера $u(x)=f(x)=\cos(x), x_k=\pi, y_k=0$.

В заключение перечислим возможные обобщения и приложения результатов, полученных в данной статье. После очень полезного для авторов обсуждения полученных ими неравенств с Е.А.Гориным, им были найдены подобные обобщения для более абстрактного случая положительно определённых функций на абелевых группах, см. [16].

References

[1] M. Mathias, *Über positive Fourier–Integrale*, Math. Zeit., **16**:1 (1923), 103–125. MR1544583.

[2] J. Stewart, *Positive definite functions and generalizations, an historical survey*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, **6**:3 (1976), 409–434. Zbl 0337.42017

[3] R. Bhatia, *Positive definite matrices*, Princeton: Princeton University Press, 2007. MR3443454.

[4] E.A. Gorin, *Positive definite functions as an instrument of mathematical analysis*, J. Math. Sci., **197**:4 (2014), 492–511. Zbl 1316.46002

[5] E.A. Gorin, S. Norvidas, *Universal symbols on locally compact abelian groups*, Functional Analysis and Its Applications, **47**:1 (2013), 1–13. Zbl 1280.43002

[6] M.G. Krein, O predstavlenii funktsij integralami Fur'e-Stil't'esa, Uchenye zapiski Kujbyshevskogo pedinstituta, **7** (1943). Цитируется по изданию: М.Г. Крейн, Избранные труды, кн. 1. Киев, 1993. Zbl 0882.01023

[7] M.G. Krein, *Measurable Hermitian–positive functions*, Mathematical Notes, **23**:1 (1978), 79–91. MR0493150

[8] Z. Sasvari, *Multivariate characteristic and correlation functions*, Berlin: Walter De Gruyter& Co, 2013. MR3059796

[9] E. Lukacs, *Characteristic functions*, London: Griffin, 1970. MR0346874

[10] B. Ramachandran, *Advanced theory of characteristic functions*, (Series in probability and statistics), Calcutta: Statistical Pub. Society, 1967. MR0225356

[11] Yu.V. Linnik, *Decompositions of probability laws*, Leningrad: Izdat. Leningrad. Univ., 1960. Zbl 0093.15002

[12] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications, Vol. 2*, Wiley, 1957. Zbl 0077.12201

[13] D.S. Mitrinović, in cooperation with P.M. Vasić, *Analytic inequalities*, Springer, 1970. Zbl 0199.38101

[14] N.M. Sedrakyan, A.M. Avoyan, *Inequalities*, M.: Fizmatlit, 2002.

[15] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities (2nd ed.)*, Cambridge: Cambridge University Press, 1952. MR0046395.

[16] E.A. Gorin, *Inequalities for positivedefinite functions*, Funct. Anal. Appl., **49**:4 (2015), 301–303. MR3436324.

Alexandr Borisovich Pevnyi
Syktyvkar State University,
55, October ave.,
Syktyvkar, 167001, Russia
E-mail address: pevnyi@syktsu.ru

Sergei Mihailovich Sitnik
Belgorod State National Research University,
85, Pobeda str.,
Belgorod, 308015, Russia
E-mail address: sitnik@bsu.edu.ru