S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 16, стр. 271–330 (2019)* УДК 514.764.2
DOI 10.33048/semi.2019.16.019 MSC 53C30, 53C50

# ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ЛИ С НУЛЕВЫМ ТЕНЗОРОМ СХОУТЕНА-ВЕЙЛЯ

П.Н. КЛЕПИКОВ

Abstract. In this paper we investigate a left-invariant (pseudo)Riemannian metrics on four-dimensional Lie groups with zero Schouten-Weyl tensor. A complete classification of metric Lie algebras of such Lie groups is obtained.

**Keywords:** left-invariant (pseudo)Riemannian metrics, Lie groups, Ricci operator, Schouten-Weyl tensor, Segre types.

## 1. Введение и предварительные сведения

Фундаментальная монография [1] содержит основную информацию о (псевдо)римановых многообразиях с нулевым тензором Схоутена-Вейля (или, что равносильно с нулевой дивергенцией тензора Вейля). Данный класс многообразий содержит в себе некоторые достаточно известные и изученные многообразия, например, многообразия Эйнштейна ($r = \lambda g$) и их прямые произведения, локально симметричные, Риччи параллельные и конформно плоские многообразия ($\nabla R = 0$, $\nabla r = 0$, $W = 0$ соответственно). Заметим также, что в случае многообразий постоянной скалярной кривизны (например, в случае метрических групп Ли), класс многообразий с нулевым тензором Схоутена-Вейля вкладывается в класс эйнштейново-подобных многообразий в смысле А. Грея [2].

В общем случае проблема классификации (псевдо)римановых многообразий с нулевым тензором Схоутена-Вейля является достаточно сложной задачей. Однако, для однородных многообразий известны некоторые результаты в случае малой размерности. В римановом случае известна классификация четырехмерных групп Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля Д.С. Воронова,

---

Klepikov, P.N., Four-dimensional metric Lie groups with zero Schouten-Weyl tensor.



*Поступила 18 марта 2018 г., опубликована 11 марта 2019 г.*

Е.Д. Родионова, В.В. Славского и О.П. Хромовой [3, 4, 5, 6]. Эйнштейново-подобные однородные (псевдо)римановы 4-многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии были классифицированы А. Заемом и А. Гаджи-Бадали в работе [7]. Классификация конформно плоских однородных (псевдо)римановых пространств (в том числе групп Ли) в четырехмерном случае была получена Дж. Кальварузо и А. Заемом (см. [8]). В случае четырехмерных групп Ли Дж. Кальварузо и А. Заем классифицировали левоинвариантные псевдоримановые метрики Эйнштейна и метрики с параллельным тензором Риччи [9, 10].

В данной работе, мы получим классификацию левоинвариантных псевдоримановых метрик на четырехмерных группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, которые не являются ни конформно плоскими, ни Риччи параллельными, что завершает классификацию четырехмерных однородных (псевдо)римановых многообразий с нулевым тензором Схоутена-Вейля.

Тензор Схоутена-Вейля $SW$ (также известный как тензор Коттона) (псевдо)риманова многообразия $(M,g)$ размерности $n \geqslant 3$ определяется формулой:

$$SW(X,Y,Z) = \nabla_Z A(X,Y) - \nabla_Y A(X,Z),$$

где $A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right)$ — тензор одномерной кривизны (тензор Схоутена), $r$ — тензор Риччи, $s$ — скалярная кривизна. Если $n \geqslant 4$, то тензор Схоутена-Вейля связан с дивергенцией тензора Вейля $W$ через уравнение [1]:

$$SW = -(n-3)\operatorname{div} W.$$

Если скалярная кривизна является константой, то следующие условия эквивалентны

$$SW = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_Z r(X,Y) = \nabla_Y r(X,Z). \tag{1}$$

Следуя стандартной терминологии (см., например, [8, 11]), мы определим *тип Сегре* самосопряженного оператора, относительно знаконеопределенного скаляного произведения, который записывается между скобок $\{\ \}$, и обозначает размеры клеток Жордана в разложении матрицы оператора. Круглые скобки группируют вместе различные блоки, соответствующие одному собственному значению. В таком случае тип Сегре называется *вырожденным*. Запись $\{1\bar{1}\}$ означает, что оператор имеет комплексно-сопряженные собственные значения кратности один, а запись $\{2\bar{2}\}$ — кратности два.

Таблица 1. Возможные типы Сегре оператора Риччи четырехмерной метрической группы Ли

| Невырожденные | $\{1111\}$ | $\{112\}$ | $\{22\}$ | $\{13\}$ | $\{4\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Вырожденные | $\{11(11)\}$<br>$\{(11)(11)\}$<br>$\{1(111)\}$<br>$\{(1111)\}$ | $\{1(12)\}$<br>$\{(11)2\}$<br>$\{(112)\}$ | $\{(22)\}$ | $\{(13)\}$ | — |

| Невырожденные | $\{111\bar{1}\}$ | $\{21\bar{1}\}$ | $\{2\bar{2}\}$ | $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$ |
|---|---|---|---|---|
| Вырожденные | $\{(11)1\bar{1}\}$ | — | — | $\{(1\bar{1}1\bar{1})\}$ |

Ключевым шагом к решению проблемы классификации четырехмерных метрических групп Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля является рассмотрение различных типов Сегре оператора Риччи. Все возможные типы Сегре оператора Риччи четырехмерной метрической группы Ли приведены в таблице 1 (см., например, [8, 11]).

Отметим, что в случае лоренцевой метрики возможны только типы Сегре $\{1111\}$, $\{112\}$, $\{13\}$, $\{11 1\bar{1}\}$ и соответствующие вырожденные типы. В случае римановой метрики возможен только тип Сегре $\{1111\}$ и соответствующие вырожденные типы.

**Определение 1.** *Метрической алгеброй называется пара* $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*, где* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли,* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— некоторое знаконеопределенное скалярное произведение на* $\mathfrak{g}$*.*

Произвольное метрическая группа Ли $(G, g)$ определяет скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$, и наоборот, каждое скалярное произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{g}$ индуцирует левоинвариантную метрику $g$ на группе $G$. Понятно, что исследования свойств кривизны некоторой метрической группы Ли гораздо удобнее проводить в терминах соответствующей метрической алгебры Ли.

**Определение 2.** *Метрические алгебры Ли* $(\mathfrak{g}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ *и* $(\mathfrak{g}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ *называются изоморфными, если существует линейное отображение* $L : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$*, которое является одновременно изометрией (псевдо)евклидовых пространств и изоморфизмом алгебр Ли.*

Если отождествить элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с левоинвариантными векторными полями на группе Ли $G$, то нетрудно получить в терминах $\mathfrak{g}$ (в некотором фиксированном базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$) формулы для вычисления основных характеристик кривизны метрической группы Ли $(G, g)$ аналогично тому, как это делается в случае общих (псевдо)римановых многообразий. Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять компоненты тензора Риччи и записывать уравнение (1) через структурные константы $C_{ij}^k$ и метрический тензор $g_{ij}$ соответствующей метрической алгебры Ли (подробнее см. [3, 4, 5, 6]):

$$
\begin{gathered}
[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k, \quad \nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k, \quad \langle e_i, e_j\rangle = g_{ij}, \\
\Gamma_{ij}^s = \frac{1}{2}\left(C_{ij}^s - C_{jk}^l g_{li} g^{ks} + C_{ki}^l g_{lj} g^{ks}\right), \\
R_{ijkt} = C_{ij}^s \Gamma_{sk}^l g_{lt} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l g_{lt} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l g_{lt}, \quad r_{ik} = R_{ijkt} g^{jt}, \\
r_{ij;k} = \nabla_{e_k} r\left(e_i, e_j\right) = -r_{sj} \Gamma_{ki}^s - r_{is} \Gamma_{kj}^s, \\
SW_{ijk} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ij;k} - r_{ik;j}\right).
\end{gathered} \tag{2}
$$

## 2. Классификация четырехмерных метрических групп Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля

В данном разделе мы рассмотрим левоинвариантные псевдоримановы метрики на группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, которые не являются ни конформно плоскими, ни Риччи параллельными. Ранее Дж. Кальварузо и А. Заем классифицировали левоинвариантные псевдоримановые метрики Эйнштейна, конформно плоские метрики и метрики с параллельным тензором Риччи на четырехмерных группах Ли (см. [8, 9, 10]).

Далее будем использовать удобные базисы в метрической алгебре Ли, в которых оператор Риччи, тензор Риччи и метрический тензор имеют удобный вид. Такие базисы были построены в работе [12].

При описании изоморфизмов метрических алгебр Ли матрицы перехода, сохраняющие вид метрического тензора $g$ (возможно с точностью до переобозначения параметров), мы будем назвать $g$-ортогональными. Например, пусть

$$g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $O$ является $g$-ортогональной, поскольку матрица

$$O^T g O = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

совпадает с $g$ с точностью до переобозначения $\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$. Использование подобных матриц перехода допустимо, поскольку далее нас будет интересовать являются ли некоторые классы метрических алгебр Ли подклассами других; при этом далее мы не будем выделять конкретные пары изоморфных метрических алгебр Ли.

Структура данного раздела такова: в теореме 1 мы покажем, что оператор Риччи четырехмерной метрической группы Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, которая не является ни конформно плоской ни Риччи параллельной, может иметь лишь 5 из 20 возможных типов Сегре. Далее, теоремы 2–6 посвящены получению классификации метрических алгебр Ли таких групп Ли с точностью до изоморфизма. Таблица 2, в которой приведены полученные метрические алгебры Ли, расположена после теоремы 6. В теореме 7 показано, что полученные метрические алгебры Ли попарно неизоморфны.

**Теорема 1.** *Пусть $(G, g)$ — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной. Тогда для оператора Риччи $\rho$ возможны только следующие типы Сегре:* $\{1(12)\}$, $\{(11)2\}$, $\{(112)\}$, $\{11 1\bar{1}\}$, $\{(22)\}$.

*Доказательство.* По очереди разберем типы Сегре из таблицы 1.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{1111\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\rho_4 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ — попарно неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
C_{12}^1\varepsilon_1\,(\rho_1-\rho_2)=0,\quad C_{12}^2\varepsilon_2\,(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C_{13}^1\varepsilon_1\,(\rho_1-\rho_3)=0,\quad C_{23}^2\varepsilon_2\,(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C_{14}^1\varepsilon_1\,(\rho_1-\rho_4)=0,\quad C_{24}^2\varepsilon_2\,(\rho_2-\rho_4)=0,\\
C_{13}^3\varepsilon_3\,(\rho_1-\rho_3)=0,\quad C_{14}^4\varepsilon_4\,(\rho_1-\rho_4)=0,\\
C_{23}^3\varepsilon_3\,(\rho_2-\rho_3)=0,\quad C_{24}^4\varepsilon_4\,(\rho_2-\rho_4)=0,\\
C_{34}^3\varepsilon_3\,(\rho_3-\rho_4)=0,\quad C_{34}^4\varepsilon_4\,(\rho_3-\rho_4)=0,\\
C_{23}^1\,(2\rho_1-\rho_2-\rho_3)\,\varepsilon_1+\left(C_{12}^3\varepsilon_3+C_{13}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C_{24}^1\,(2\rho_1-\rho_2-\rho_4)\,\varepsilon_1+\left(C_{12}^4\varepsilon_4+C_{14}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_4)=0,\\
C_{34}^1\,(2\rho_1-\rho_3-\rho_4)\,\varepsilon_1+\left(C_{13}^4\varepsilon_4+C_{14}^3\varepsilon_3\right)(\rho_3-\rho_4)=0,\\
C_{13}^2\,(\rho_1-2\rho_2+\rho_3)\,\varepsilon_2+\left(C_{12}^3\varepsilon_3-C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,\\
C_{14}^2\,(\rho_1-2\rho_2+\rho_4)\,\varepsilon_2+\left(C_{12}^4\varepsilon_4-C_{24}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_4)=0,\\
C_{34}^2\,(2\rho_2-\rho_3-\rho_4)\,\varepsilon_2+\left(C_{23}^4\varepsilon_4+C_{24}^3\varepsilon_3\right)(\rho_3-\rho_4)=0,\\
C_{12}^3\,(\rho_1+\rho_2-2\rho_3)\,\varepsilon_3+\left(C_{13}^2\varepsilon_2+C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C_{14}^3\,(\rho_1-2\rho_3+\rho_4)\,\varepsilon_3+\left(C_{13}^4\varepsilon_4-C_{34}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_4)=0,\\
C_{24}^3\,(\rho_2-2\rho_3+\rho_4)\,\varepsilon_3+\left(C_{23}^4\varepsilon_4-C_{34}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_4)=0,\\
C_{12}^4\,(\rho_1+\rho_2-2\rho_4)\,\varepsilon_4+\left(C_{14}^2\varepsilon_2+C_{24}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C_{13}^4\,(\rho_1+\rho_3-2\rho_4)\,\varepsilon_4+\left(C_{14}^3\varepsilon_3+C_{34}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,\\
C_{23}^4\,(\rho_2+\rho_3-2\rho_4)\,\varepsilon_4+\left(C_{24}^3\varepsilon_3+C_{34}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0.
\end{gathered}
$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$
r=\begin{pmatrix}
\frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_2-\rho_4)^2(\rho_4-\rho_1)}{\varepsilon_2\varepsilon_4(\rho_1-\rho_2)^3} & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_4-\rho_1)^2(\rho_2-\rho_4)}{\varepsilon_1\varepsilon_4(\rho_1-\rho_2)^3} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_2-\rho_4)(\rho_4-\rho_1)}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)^2}
\end{pmatrix}
$$

Пусть данный тензор Риччи имеет вид (3), тогда должна выполняться система уравнений

$$
\begin{gathered}
\frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_2-\rho_4)^2(\rho_4-\rho_1)}{\varepsilon_2\varepsilon_4(\rho_1-\rho_2)^3}=\varepsilon_1\rho_1,\\
\frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_4-\rho_1)^2(\rho_2-\rho_4)}{\varepsilon_1\varepsilon_4(\rho_1-\rho_2)^3}=\varepsilon_2\rho_2,\\
0=\varepsilon_3\rho_3,\\
\frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_2-\rho_4)(\rho_4-\rho_1)}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)^2}=\varepsilon_4\rho_4,
\end{gathered}
$$

равносильная следующей системе

$$
\begin{gathered}
\rho_3 = 0, \\
\left(C_{12}^4\right)^2 = -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4\rho_4(\rho_1-\rho_2)^2}{2(\rho_2-\rho_4)(\rho_1-\rho_4)}, \\
\rho_4 = -\rho_1-\rho_2, \\
\frac{\rho_1^2+\rho_1\rho_2+\rho_2^2}{\rho_1-\rho_2} = 0,
\end{gathered}
$$

но последнее уравнение неразрешимо в действительных числах. Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{1111\}$.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{(11)(11)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$
r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\rho_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix},
$$

где $\rho_1$, $\rho_2$ — неравные друг другу действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
C_{13}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \quad C_{23}^2\varepsilon_2\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
C_{14}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \quad C_{24}^2\varepsilon_2\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
C_{34}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \quad C_{34}^2\varepsilon_2\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
C_{12}^3\varepsilon_3\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \quad C_{12}^4\varepsilon_4\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
C_{13}^3\varepsilon_3\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \quad C_{14}^4\varepsilon_4\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
C_{23}^3\varepsilon_3\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \quad C_{24}^4\varepsilon_4\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
\left(C_{12}^3\varepsilon_3 + C_{13}^2\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
\left(C_{12}^4\varepsilon_4 + C_{14}^2\varepsilon_2 + C_{24}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
\left(C_{12}^3\varepsilon_3 - C_{13}^2\varepsilon_2 - C_{23}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
\left(C_{12}^4\varepsilon_4 - C_{14}^2\varepsilon_2 - C_{24}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
\left(C_{13}^4\varepsilon_4 + C_{14}^3\varepsilon_3 - C_{34}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
\left(C_{23}^4\varepsilon_4 + C_{24}^3\varepsilon_3 - C_{34}^2\varepsilon_2\right)\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
\left(C_{13}^4\varepsilon_4 + C_{14}^3\varepsilon_3 + C_{34}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0, \\
\left(C_{23}^4\varepsilon_4 + C_{24}^3\varepsilon_3 + C_{34}^2\varepsilon_2\right)\left(\rho_1-\rho_2\right) = 0.
\end{gathered}
$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, получаем, что данная метрическая группа Ли обязана иметь параллельный тензор Риччи.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{11(11)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и

тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$
r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\rho_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}, \tag{4}
$$

где $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ — попарно неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
C^1_{12}\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)=0, \quad C^2_{12}\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C^1_{13}\varepsilon_1(\rho_1-\rho_3)=0, \quad C^2_{23}\varepsilon_2(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C^1_{14}\varepsilon_1(\rho_1-\rho_3)=0, \quad C^2_{24}\varepsilon_2(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C^1_{34}\varepsilon_1(\rho_1-\rho_3)=0, \quad C^2_{34}\varepsilon_2(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C^3_{13}\varepsilon_3(\rho_1-\rho_3)=0, \quad C^4_{14}\varepsilon_4(\rho_1-\rho_3)=0,\\
C^3_{23}\varepsilon_3(\rho_2-\rho_3)=0, \quad C^4_{24}\varepsilon_4(\rho_2-\rho_3)=0,\\
\left(C^4_{13}\varepsilon_4+C^3_{14}\varepsilon_3-C^1_{34}\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,\\
\left(C^4_{23}\varepsilon_4+C^3_{24}\varepsilon_3-C^2_{34}\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0,\\
\left(C^4_{13}\varepsilon_4+C^3_{14}\varepsilon_3+C^1_{34}\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,\\
\left(C^4_{23}\varepsilon_4+C^3_{24}\varepsilon_3+C^2_{34}\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C^1_{23}(2\rho_1-\rho_2-\rho_3)\varepsilon_1+\left(C^3_{12}\varepsilon_3+C^2_{13}\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C^1_{24}(2\rho_1-\rho_2-\rho_3)\varepsilon_1+\left(C^4_{12}\varepsilon_4+C^2_{14}\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C^2_{13}(\rho_1-2\rho_2+\rho_3)\varepsilon_2+\left(C^3_{12}\varepsilon_3-C^1_{23}\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,\\
C^2_{14}(\rho_1-2\rho_2+\rho_3)\varepsilon_2+\left(C^4_{12}\varepsilon_4-C^1_{24}\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,\\
C^3_{12}(\rho_1+\rho_2-2\rho_3)\varepsilon_3+\left(C^2_{13}\varepsilon_2+C^1_{23}\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C^4_{12}(\rho_1+\rho_2-2\rho_3)\varepsilon_4+\left(C^2_{14}\varepsilon_2+C^1_{24}\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0.
\end{gathered}
$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$
r = \begin{pmatrix} -\frac{2\left(C^4_{12}\right)^2(\rho_2-\rho_3)^2(\rho_1-\rho_3)}{\varepsilon_4\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\left(C^4_{12}\right)^2(\rho_1-\rho_3)^2(\rho_2-\rho_3)}{\varepsilon_4\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\left(C^4_{12}\right)^2(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}{\varepsilon_2\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)^2} \end{pmatrix}
$$

что противоречит виду тензора Риччи (4). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{11(11)\}$.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{1(111)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и

тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\rho_2\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\end{pmatrix},$$

где $\rho_1$, $\rho_2$ — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i=\pm1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
C_{12}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\quad C_{13}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
C_{23}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\quad C_{14}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
C_{24}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\quad C_{34}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
C_{12}^2\varepsilon_2\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\quad C_{13}^3\varepsilon_3\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
C_{14}^4\varepsilon_4\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
\left(C_{12}^3\varepsilon_3+C_{13}^2\varepsilon_2-C_{23}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
\left(C_{12}^4\varepsilon_4+C_{14}^2\varepsilon_2-C_{24}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
\left(C_{12}^3\varepsilon_3+C_{13}^2\varepsilon_2+C_{23}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
\left(C_{13}^4\varepsilon_4+C_{14}^3\varepsilon_3-C_{34}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
\left(C_{12}^4\varepsilon_4+C_{14}^2\varepsilon_2+C_{24}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
\left(C_{13}^4\varepsilon_4+C_{14}^3\varepsilon_3+C_{34}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)=0.
\end{gathered}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, получаем, что данная метрическая группа Ли обязана иметь параллельный тензор Риччи.

Если оператор Риччи имеет тип Сегре $\{(1111)\}$, то тензор Риччи пропорционален метрическому тензору, и метрическая группа Ли является многообразием Эйнштейна, а значит имеет параллельный тензор Риччи.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{112\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_3\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_3 & \varepsilon_3\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0\end{pmatrix},\tag{5}$$

где $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ — попарно неравные действительные числа, и $\varepsilon_i=\pm1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
C_{34}^4\varepsilon_3=0,\\
C_{12}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\quad C_{13}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_3\right)=0,\\
C_{12}^2\varepsilon_2\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\quad C_{23}^2\varepsilon_2\left(\rho_2-\rho_3\right)=0,\\
C_{13}^4\varepsilon_3\left(\rho_1-\rho_3\right)=0,\quad C_{23}^4\varepsilon_3\left(\rho_2-\rho_3\right)=0,\\
\left(C_{14}^1\left(\rho_1-\rho_3\right)-C_{13}^1\right)\varepsilon_1=0,\quad C_{34}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_3\right)-C_{13}^4\varepsilon_3=0,\\
\left(C_{24}^2\left(\rho_2-\rho_3\right)-C_{23}^2\right)\varepsilon_2=0,\quad C_{34}^2\varepsilon_2\left(\rho_2-\rho_3\right)-C_{23}^4\varepsilon_3=0,\\
\left(\left(C_{13}^3+C_{14}^4\right)\varepsilon_3-C_{34}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_3\right)=0,
\end{gathered}$$

$$\left(\left(C_{23}^3+C_{24}^4\right)\varepsilon_3-C_{34}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0,$$
$$\left(2(\rho_3-\rho_1)C_{14}^3-C_{13}^3+3C_{14}^4\right)\varepsilon_3+C_{34}^1\varepsilon_1=0,$$
$$\left(2(\rho_3-\rho_2)C_{24}^3-C_{23}^3+3C_{24}^4\right)\varepsilon_3+C_{34}^2\varepsilon_2=0,$$
$$C_{23}^1(2\rho_1-\rho_2-\rho_3)\varepsilon_1+\left(C_{12}^4\varepsilon_3+C_{13}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0,$$
$$C_{13}^2(\rho_1-2\rho_2+\rho_3)\varepsilon_2+\left(C_{12}^4\varepsilon_3-C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,$$
$$C_{12}^4(\rho_1+\rho_2-2\rho_3)\varepsilon_3+\left(C_{13}^2\varepsilon_2+C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,$$
$$\left((2\rho_3-\rho_1-\rho_2)C_{12}^3+2C_{12}^4\right)\varepsilon_3-\left(C_{14}^2\varepsilon_2+C_{24}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,$$
$$\left(\left(C_{13}^3+C_{14}^4\right)\rho_3-\left(C_{13}^3+C_{14}^4\right)\rho_1+2C_{13}^4\right)\varepsilon_3-C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_3)=0,$$
$$\left(\left(C_{23}^3+C_{24}^4\right)\rho_3-\left(C_{23}^3+C_{24}^4\right)\rho_2+2C_{23}^4\right)\varepsilon_3-C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_2-\rho_3)=0,$$
$$\left((2\rho_1-\rho_2-\rho_3)C_{24}^1-C_{23}^1\right)\varepsilon_1+\left(\rho_2C_{14}^2-\rho_3C_{14}^2-C_{13}^2\right)\varepsilon_2+$$
$$+\left(\rho_2C_{12}^3-\rho_3C_{12}^3-C_{12}^4\right)\varepsilon_3=0,$$
$$\left((2\rho_2-\rho_1-\rho_3)C_{14}^2-C_{13}^2\right)\varepsilon_2+\left(\rho_1C_{24}^1-\rho_3C_{24}^1-C_{23}^1\right)\varepsilon_1-$$
$$-\left(\rho_1C_{12}^3-\rho_3C_{12}^3-C_{12}^4\right)\varepsilon_3=0.$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$r=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-\frac{2\varepsilon_2\varepsilon_1\left(C_{12}^3\right)^2(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}{(\rho_1-\rho_2)^2}\end{pmatrix}$$

что противоречит виду тензора Риччи (5). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{112\}$.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{22\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$(6)\qquad r=\begin{pmatrix}0&\varepsilon_1\rho_1&0&0\\\varepsilon_1\rho_1&\varepsilon_1&0&0\\0&0&0&\varepsilon_2\rho_2\\0&0&\varepsilon_2\rho_2&\varepsilon_2\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}0&\varepsilon_1&0&0\\\varepsilon_1&0&0&0\\0&0&0&\varepsilon_2\\0&0&\varepsilon_2&0\end{pmatrix},$$

где $\rho_1,\rho_2$ — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i=\pm1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$C_{12}^2\varepsilon_1=0,\quad C_{34}^4\varepsilon_2=0,$$
$$C_{13}^2\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)=0,\quad C_{13}^4\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)=0,$$
$$\left((\rho_1-\rho_2)C_{14}^2-C_{13}^2\right)\varepsilon_1=0,\quad \left((\rho_1-\rho_2)C_{23}^4+C_{13}^4\right)\varepsilon_2=0,$$
$$C_{34}^2\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)-C_{13}^4\varepsilon_2=0,\quad C_{12}^4\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)-C_{13}^2\varepsilon_1=0,$$
$$\left((\rho_1-\rho_2)C_{34}^1+C_{34}^2\right)\varepsilon_1-C_{23}^4\varepsilon_2=0,$$
$$\left((\rho_2-\rho_1)C_{12}^3+C_{12}^4\right)\varepsilon_2+C_{14}^2\varepsilon_1=0,$$

$$
\begin{gathered}
\left(\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\varepsilon_1+C_{12}^4\varepsilon_2\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(\left(C_{13}^3+C_{14}^4\right)\varepsilon_2-C_{34}^2\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(2(\rho_1-\rho_2)C_{23}^1-C_{13}^1+3C_{23}^2\right)\varepsilon_1-C_{12}^4\varepsilon_2=0,\\
\left(2(\rho_2-\rho_1)C_{14}^3-C_{13}^3+3C_{14}^4\right)\varepsilon_2+C_{34}^2\varepsilon_1=0,\\
\left(2(\rho_1-\rho_2)C_{24}^1-C_{14}^1-2C_{23}^1+3C_{24}^2\right)\varepsilon_1-C_{12}^3\varepsilon_2=0,\\
\left(2(\rho_2-\rho_1)C_{24}^3-2C_{14}^3-C_{23}^3+3C_{24}^4\right)\varepsilon_2+C_{34}^1\varepsilon_1=0,\\
\left(\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\rho_1-\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\rho_2+2C_{13}^2\right)\varepsilon_1-C_{12}^4\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(\left(C_{13}^3+C_{14}^4\right)\rho_2-\left(C_{13}^3+C_{14}^4\right)\rho_1+2C_{13}^4\right)\varepsilon_2-C_{34}^2\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\rho_1-\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\rho_2-C_{13}^1-C_{23}^2\right)\varepsilon_1+\varepsilon_2\left(\rho_1C_{12}^3-\rho_2C_{12}^3-C_{12}^4\right)=0,\\
\left(\left(C_{23}^3+C_{24}^4\right)\rho_2-\left(C_{23}^3+C_{24}^4\right)\rho_1-C_{13}^3-C_{14}^4\right)\varepsilon_2+\varepsilon_1\left(\rho_1C_{34}^1-\rho_2C_{34}^1+C_{34}^2\right)=0,\\
\left(\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\rho_1-\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\rho_2-C_{13}^1+2C_{14}^2-C_{23}^2\right)\varepsilon_1-\\
-\left(\rho_1C_{12}^3-\rho_2C_{12}^3-C_{12}^4\right)\varepsilon_2=0,\\
\left(\left(C_{23}^3+C_{24}^4\right)\rho_2-\left(C_{23}^3+C_{24}^4\right)\rho_1-C_{13}^3-C_{14}^4+2C_{23}^4\right)\varepsilon_2-\\
-\left(\rho_1C_{34}^1-\rho_2C_{34}^1+C_{34}^2\right)\varepsilon_1=0.
\end{gathered}
$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (6). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{22\}$.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{13\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$
r=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\rho_1&0&0&0\\0&0&0&\varepsilon_2\rho_2\\0&0&\varepsilon_2\rho_2&\varepsilon_2\\0&\varepsilon_2\rho_2&\varepsilon_2&0\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0&0\\0&0&0&\varepsilon_2\\0&0&\varepsilon_2&0\\0&\varepsilon_2&0&0\end{pmatrix}, \tag{7}
$$

где $\rho_1,\rho_2$ — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i=\pm1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
C_{23}^4\varepsilon_2=0,\quad C_{23}^3\varepsilon_2=0,\\
C_{23}^4\varepsilon_2=0,\quad C_{24}^4\varepsilon_2=0,\\
\left(C_{23}^3+C_{24}^4\right)\varepsilon_2=0,\quad \left(C_{24}^2-2C_{34}^3\right)\varepsilon_2=0,\\
C_{12}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)=0,\quad C_{12}^4\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(C_{23}^2-C_{34}^4-3C_{24}^3\right)\varepsilon_2=0,\quad \left(C_{24}^3+C_{23}^2-3C_{34}^4\right)\varepsilon_2=0,\\
\left((\rho_1-\rho_2)C_{13}^1-C_{12}^1\right)\varepsilon_1=0,\quad \left((\rho_1-\rho_2)C_{14}^1-C_{13}^1\right)\varepsilon_1=0,\\
C_{23}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)-C_{12}^4\varepsilon_2=0,\\
\left(\left(C_{12}^3+C_{13}^4\right)\varepsilon_2-C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(2(\rho_1-\rho_2)C_{24}^1-C_{23}^1\right)\varepsilon_1-\left(C_{12}^3+C_{13}^4\right)\varepsilon_2=0,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\left(2\left(\rho_2-\rho_1\right)C_{13}^3-C_{12}^3+3C_{13}^4\right)\varepsilon_2+C_{23}^1\varepsilon_1=0,\\
\left(2\left(\rho_2-\rho_1\right)C_{14}^2-C_{13}^2+3C_{14}^3\right)\varepsilon_2+C_{34}^1\varepsilon_1=0,\\
\left(2\left(\rho_1-\rho_2\right)C_{34}^1-C_{24}^1\right)\varepsilon_1+\left(C_{12}^2-2C_{13}^3+C_{14}^4\right)\varepsilon_2=0,\\
\left(\left(C_{12}^3+C_{13}^4\right)\rho_2-\left(C_{12}^3+C_{13}^4\right)\rho_1+2C_{12}^4\right)\varepsilon_2-C_{23}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
\left(\left(C_{13}^2+C_{14}^3\right)\rho_2-\left(C_{13}^2+C_{14}^3\right)\rho_1+2C_{14}^4\right)\varepsilon_2+C_{34}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
\left(\left(C_{12}^2+C_{14}^4\right)\rho_2-\left(C_{12}^2+C_{14}^4\right)\rho_1+2C_{12}^3\right)\varepsilon_2-C_{24}^1\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
\left(\left(C_{12}^2+C_{14}^4\right)\rho_2-\left(C_{12}^2+C_{14}^4\right)\rho_1+C_{12}^3-C_{13}^4\right)\varepsilon_2+\\
+\left(\rho_1C_{24}^1-\rho_2C_{24}^1-C_{23}^1\right)\varepsilon_1=0,\\
\left(\left(C_{13}^2+C_{14}^3\right)\rho_2-\left(C_{13}^2+C_{14}^3\right)\rho_1-C_{12}^2+2C_{13}^3+C_{14}^4\right)\varepsilon_2-\\
-\left(\rho_1C_{34}^1-\rho_2C_{34}^1-C_{24}^1\right)\varepsilon_1=0.
\end{gathered}
$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$
r=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&\left(C_{34}^3\right)^2\end{pmatrix}
$$

что противоречит виду тензора Риччи (7). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{13\}$.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{(13)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$
r=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\rho_1&0&0&0\\0&0&0&\varepsilon_2\rho_1\\0&0&\varepsilon_2\rho_1&\varepsilon_2\\0&\varepsilon_2\rho_1&\varepsilon_2&0\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0&0\\0&0&0&\varepsilon_2\\0&0&\varepsilon_2&0\\0&\varepsilon_2&0&0\end{pmatrix},
$$

где $\rho_1\in\mathbb{R}$, $\varepsilon_i=\pm1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
C_{12}^1\varepsilon_1=0,\quad C_{12}^3\varepsilon_2=0,\\
C_{12}^4\varepsilon_2=0,\quad C_{13}^1\varepsilon_1=0,\\
C_{23}^3\varepsilon_2=0,\quad C_{23}^4\varepsilon_2=0,\\
C_{14}^4\varepsilon_2=0,\quad C_{24}^4\varepsilon_2=0,\\
\left(C_{23}^3+C_{24}^4\right)\varepsilon_2=0,\quad \left(C_{24}^2-2C_{34}^3\right)\varepsilon_2=0,\\
\left(C_{24}^3+C_{23}^2-3C_{34}^4\right)\varepsilon_2=0,\quad \left(C_{23}^2-C_{34}^4-3C_{24}^3\right)\varepsilon_2=0,\\
\left(C_{12}^3+C_{13}^4\right)\varepsilon_2+C_{23}^1\varepsilon_1=0,\quad \left(C_{12}^3-C_{13}^4\right)\varepsilon_2-C_{23}^1\varepsilon_1=0,\\
\left(3C_{13}^4-C_{12}^3\right)\varepsilon_2+C_{23}^1\varepsilon_1=0,\quad \left(3C_{14}^3-C_{13}^2\right)\varepsilon_2+C_{34}^1\varepsilon_1=0,\\
\left(C_{12}^2-2C_{13}^3+C_{14}^4\right)\varepsilon_2-C_{24}^1\varepsilon_1=0,\\
\left(C_{12}^2-2C_{13}^3-C_{14}^4\right)\varepsilon_2+C_{24}^1\varepsilon_1=0.
\end{gathered}
$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, получаем, что данная метрическая группа Ли обязана быть конформно плоской.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{4\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1\rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 \\ 0 & \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered} C_{12}^3\varepsilon_1 = 0, \quad C_{12}^4\varepsilon_1 = 0, \\ C_{13}^4\varepsilon_1 = 0, \quad C_{14}^3\varepsilon_1 = 0, \\ \left(C_{23}^2 - C_{34}^4\right)\varepsilon_1 = 0, \quad \left(C_{12}^3 + C_{13}^4\right)\varepsilon_1 = 0, \\ \left(C_{12}^2 + C_{14}^4\right)\varepsilon_1 = 0, \quad \left(C_{13}^2 - 2C_{23}^3\right)\varepsilon_1 = 0, \\ \left(C_{24}^1 - 2C_{34}^2\right)\varepsilon_1 = 0, \quad \left(C_{12}^2 + C_{13}^3 + C_{23}^4\right)\varepsilon_1 = 0, \\ \left(C_{13}^3 + C_{12}^2 - 3C_{23}^4\right)\varepsilon_1 = 0, \quad \left(C_{12}^2 - C_{23}^4 - 3C_{13}^3\right)\varepsilon_1 = 0, \\ \left(C_{23}^1 + C_{24}^2 - 3C_{34}^3\right)\varepsilon_1 = 0, \quad \left(C_{13}^1 - C_{34}^4 - 3C_{14}^2\right)\varepsilon_1 = 0, \\ \left(C_{14}^3 + C_{12}^1 - C_{24}^4 - 2C_{13}^2\right)\varepsilon_1 = 0, \\ \left(C_{12}^2 - C_{23}^4 - C_{13}^3 + 2C_{14}^4\right)\varepsilon_1 = 0, \\ \left(C_{14}^2 + C_{13}^1 - C_{34}^4 - 2C_{24}^3\right)\varepsilon_1 = 0, \\ \left(C_{14}^3 + C_{24}^4 - C_{12}^1 + 2C_{13}^2\right)\varepsilon_1 = 0, \\ \left(C_{14}^3 + C_{12}^1 - 3C_{24}^4 + 2C_{23}^3\right)\varepsilon_1 = 0, \\ \left(C_{23}^1 - C_{34}^3 - 3C_{24}^2 + 2C_{14}^1\right)\varepsilon_1 = 0, \\ \left(C_{34}^4 + C_{14}^2 + C_{13}^1 - 2C_{24}^3 - 2C_{23}^2\right)\varepsilon_1 = 0. \end{gathered}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(C_{24}^2\right)^2 + 3C_{24}^2C_{34}^3 - 6\left(C_{34}^3\right)^2 \end{pmatrix}$$

что противоречит виду тензора Риччи (8). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{4\}$.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{(11)1\bar{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и

тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\alpha & \varepsilon_3\beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\beta & -\varepsilon_3\alpha \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\rho_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\beta \neq 0$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
C_{34}^4\beta\varepsilon_3 = 0, \quad C_{34}^3\beta\varepsilon_3 = 0, \\
\left((\rho_1-\alpha)\, C_{13}^1 + \beta C_{14}^1\right)\varepsilon_1 = 0, \quad \left((\alpha-\rho_1)\, C_{14}^1 + \beta C_{13}^1\right)\varepsilon_1 = 0, \\
\left((\rho_1-\alpha)\, C_{23}^2 + \beta C_{24}^2\right)\varepsilon_2 = 0, \quad \left((\alpha-\rho_1)\, C_{24}^2 + \beta C_{23}^2\right)\varepsilon_2 = 0, \\
\left((\alpha-\rho_1)\, C_{12}^3 + \beta C_{12}^4\right)\varepsilon_3 = 0, \quad \left((\rho_1-\alpha)\, C_{12}^4 + \beta C_{12}^3\right)\varepsilon_3 = 0, \\
C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1-\alpha) - \beta\varepsilon_3\left(C_{13}^3 - C_{14}^4\right) = 0, \\
C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_1-\alpha) - \beta\varepsilon_3\left(C_{23}^3 - C_{24}^4\right) = 0, \\
\left(\left(3C_{13}^4 + C_{14}^3\right)\beta - 2(\rho_1-\alpha)\, C_{13}^3\right)\varepsilon_3 + \beta C_{34}^1\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(3C_{23}^4 + C_{24}^3\right)\beta - 2(\rho_1-\alpha)\, C_{23}^3\right)\varepsilon_3 + \beta C_{34}^2\varepsilon_2 = 0, \\
\left(\left(C_{13}^4 + 3C_{14}^3\right)\beta + 2C_{14}^4(\rho_1-\alpha)\right)\varepsilon_3 + \beta C_{34}^1\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{23}^4 + 3C_{24}^3\right)\beta + 2C_{24}^4(\rho_1-\alpha)\right)\varepsilon_3 + \beta C_{34}^2\varepsilon_2 = 0, \\
\left(\left(C_{14}^3 - C_{13}^4\right)\alpha + \left(C_{13}^4 - C_{14}^3\right)\rho_1 + 2\beta C_{14}^4\right)\varepsilon_3 + C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1-\alpha) = 0, \\
\left(\left(C_{24}^3 - C_{23}^4\right)\alpha + \left(C_{23}^4 - C_{24}^3\right)\rho_1 + 2\beta C_{24}^4\right)\varepsilon_3 + C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_1-\alpha) = 0, \\
\left(\left(C_{14}^3 - C_{13}^4\right)\alpha + \left(C_{13}^4 - C_{14}^3\right)\rho_1 + 2\beta C_{13}^3\right)\varepsilon_3 - C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1-\alpha) = 0, \\
\left(\left(C_{24}^3 - C_{23}^4\right)\alpha + \left(C_{23}^4 - C_{24}^3\right)\rho_1 + 2\beta C_{23}^3\right)\varepsilon_3 - C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_1-\alpha) = 0, \\
\left(\alpha C_{23}^1 - \beta C_{24}^1 - \rho_1 C_{23}^1\right)\varepsilon_1 + \left(\alpha C_{13}^2 - \beta C_{14}^2 - \rho_1 C_{13}^2\right)\varepsilon_2 + \\
+ \left(\alpha C_{12}^3 + \beta C_{12}^4 - \rho_1 C_{12}^3\right)\varepsilon_3 = 0, \\
\left(\alpha C_{24}^1 + \beta C_{23}^1 - \rho_1 C_{24}^1\right)\varepsilon_1 + \left(\alpha C_{14}^2 + \beta C_{13}^2 - \rho_1 C_{14}^2\right)\varepsilon_2 - \\
- \left(\alpha C_{12}^4 - \beta C_{12}^3 - \rho_1 C_{12}^4\right)\varepsilon_3 = 0, \\
\left(\alpha C_{23}^1 - \beta C_{24}^1 - \rho_1 C_{23}^1\right)\varepsilon_1 + \left(\alpha C_{13}^2 - \beta C_{14}^2 - \rho_1 C_{13}^2\right)\varepsilon_2 - \\
- \left(\alpha C_{12}^3 + \beta C_{12}^4 - \rho_1 C_{12}^3\right)\varepsilon_3 = 0, \\
\left(\alpha C_{24}^1 + \beta C_{23}^1 - \rho_1 C_{24}^1\right)\varepsilon_1 + \left(\alpha C_{14}^2 + \beta C_{13}^2 - \rho_1 C_{14}^2\right)\varepsilon_2 + \\
+ \left(\alpha C_{12}^4 - \beta C_{12}^3 - \rho_1 C_{12}^4\right)\varepsilon_3 = 0.
\end{gathered}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (9). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{(11)1\bar{1}\}$.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{21\bar{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор

Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r=\begin{pmatrix}0&\varepsilon_1\rho_1&0&0\\ \varepsilon_1\rho_1&\varepsilon_1&0&0\\ 0&0&\varepsilon_2\alpha&\varepsilon_2\beta\\ 0&0&\varepsilon_2\beta&-\varepsilon_2\alpha\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}0&\varepsilon_1&0&0\\ \varepsilon_1&0&0&0\\ 0&0&\varepsilon_2&0\\ 0&0&0&-\varepsilon_2\end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $\rho_1,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\varepsilon_i=\pm1$, $\beta\neq0$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
C_{12}^2\varepsilon_1=0,\\
C_{34}^3\beta\varepsilon_2=0,\quad C_{34}^4\beta\varepsilon_2=0,\\
\left(\left(\rho_1-\alpha\right)C_{13}^2+\beta C_{14}^2\right)\varepsilon_1=0,\quad \left(\left(\alpha-\rho_1\right)C_{14}^2+\beta C_{13}^2\right)\varepsilon_1=0,\\
C_{34}^2\left(\rho_1-\alpha\right)\varepsilon_1-\beta\varepsilon_2\left(C_{13}^3-C_{14}^4\right)=0,\\
\left(\left(\alpha-\rho_1\right)C_{12}^3+\beta C_{12}^4\right)\varepsilon_2+C_{13}^2\varepsilon_1=0,\\
\left(\left(\rho_1-\alpha\right)C_{12}^4+\beta C_{12}^3\right)\varepsilon_2+C_{14}^2\varepsilon_1=0,\\
\left(C_{34}^1\left(\rho_1-\alpha\right)+C_{34}^2\right)\varepsilon_1-\beta\varepsilon_2\left(C_{23}^3-C_{24}^4\right)=0,\\
\left(\left(3C_{13}^4+C_{14}^3\right)\beta-2C_{13}^3\left(\rho_1-\alpha\right)\right)\varepsilon_2+\beta C_{34}^2\varepsilon_1=0,\\
\left(\left(C_{13}^4+3C_{14}^3\right)\beta+2C_{14}^4\left(\rho_1-\alpha\right)\right)\varepsilon_2+\beta C_{34}^2\varepsilon_1=0,\\
\left(2\left(\rho_1-\alpha\right)C_{23}^1+2\beta C_{24}^1-C_{13}^1+3C_{23}^2\right)\varepsilon_1-C_{12}^3\varepsilon_2=0,\\
\left(2\left(\rho_1-\alpha\right)C_{24}^1-2\beta C_{23}^1-C_{14}^1+3C_{24}^2\right)\varepsilon_1+C_{12}^4\varepsilon_2=0,\\
\left(\left(3C_{23}^4+C_{24}^3\right)\beta+2\left(\alpha-\rho_1\right)C_{23}^3-2C_{13}^3\right)\varepsilon_2+\beta C_{34}^1\varepsilon_1=0,\\
\left(\left(C_{23}^4+3C_{24}^3\right)\beta+2\left(\rho_1-\alpha\right)C_{24}^4+2C_{14}^4\right)\varepsilon_2+\beta C_{34}^1\varepsilon_1=0,\\
\left(\left(C_{14}^3-C_{13}^4\right)\alpha+\left(C_{13}^4-C_{14}^3\right)\rho_1+2\beta C_{14}^4\right)\varepsilon_2+C_{34}^2\left(\rho_1-\alpha\right)\varepsilon_1=0,\\
\left(\left(C_{14}^3-C_{13}^4\right)\alpha+\left(C_{13}^4-C_{14}^3\right)\rho_1+2\beta C_{13}^3\right)\varepsilon_2-C_{34}^2\left(\rho_1-\alpha\right)\varepsilon_1=0,\\
\left(\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\rho_1-\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\alpha+\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\beta\right)\varepsilon_1-\\
-\left(\alpha C_{12}^3+\beta C_{12}^4-\rho_1C_{12}^3\right)\varepsilon_2=0,\\
\left(\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\rho_1-\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\alpha-\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\beta\right)\varepsilon_1+\\
+\left(\alpha C_{12}^4-\beta C_{12}^3-\rho_1C_{12}^4\right)\varepsilon_2=0,\\
\left(\left(C_{24}^3-C_{23}^4\right)\alpha+\left(C_{23}^4-C_{24}^3\right)\rho_1+2\beta C_{24}^4+C_{13}^4-C_{14}^3\right)\varepsilon_2-\\
-\left(\alpha C_{34}^1-\rho_1C_{34}^1-C_{34}^2\right)\varepsilon_1=0,\\
\left(\left(C_{24}^3-C_{23}^4\right)\alpha+\left(C_{23}^4-C_{24}^3\right)\rho_1+2\beta C_{23}^3+C_{13}^4-C_{14}^3\right)\varepsilon_2+\\
+\left(\alpha C_{34}^1-\rho_1C_{34}^1-C_{34}^2\right)\varepsilon_1=0,\\
\left(\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\rho_1-\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\alpha+\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\beta+2C_{13}^2\right)\varepsilon_1+\\
+\left(\alpha C_{12}^3+\beta C_{12}^4-\rho_1C_{12}^3\right)\varepsilon_2=0,\\
\left(\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\rho_1-\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\alpha-\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\beta+2C_{14}^2\right)\varepsilon_1-\\
-\left(\alpha C_{12}^4-\beta C_{12}^3-\rho_1C_{12}^4\right)\varepsilon_2=0.
\end{gathered}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (10). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{21\overline{1}\}$.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{2\overline{2}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1\alpha & \varepsilon_1\beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_1\beta & -\varepsilon_1\alpha \\ \varepsilon_1\alpha & \varepsilon_1\beta & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\beta & -\varepsilon_1\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\beta \neq 0$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
C_{12}^3\beta\varepsilon_1 = 0, \quad C_{12}^4\beta\varepsilon_1 = 0,\\
\left(C_{13}^4 - C_{23}^3 + C_{12}^1 + 2C_{14}^3\right)\beta\varepsilon_1 = 0,\\
\left(C_{12}^2 + C_{14}^4 - C_{24}^3 - 2C_{23}^4\right)\beta\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{12}^2 + C_{13}^3 - C_{23}^4\right)\beta + C_{12}^3\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{12}^1 + C_{14}^3 - C_{24}^4\right)\beta - C_{12}^4\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(C_{12}^2 + C_{14}^4 + 3C_{24}^3 + 2C_{23}^4\right)\beta\varepsilon_1 = 0,\\
\left(C_{12}^1 - C_{23}^3 - 3C_{13}^4 - 2C_{14}^3\right)\beta\varepsilon_1 = 0,\\
\left(4\beta C_{34}^2 + C_{13}^2 - C_{14}^1 + 2C_{23}^1 + 3C_{34}^3\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(4\beta C_{34}^1 - C_{23}^2 + C_{24}^1 + 2C_{14}^2 - 3C_{34}^4\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{12}^2 - C_{14}^4 + C_{24}^3 + 2C_{13}^3\right)\beta + 2C_{12}^3\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{12}^1 - C_{13}^4 + C_{23}^3 - 2C_{24}^4\right)\beta - 2C_{12}^4\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{12}^2 + C_{24}^3 + 3C_{14}^4 - 2C_{13}^3\right)\beta - 2C_{12}^3\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{12}^1 - C_{13}^4 - 3C_{23}^3 + 2C_{24}^4\right)\beta + 2C_{12}^4\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{23}^2 - C_{34}^4 + 3C_{24}^1 + 2C_{14}^2\right)\beta - 4C_{24}^4\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{14}^1 + C_{34}^3 + 3C_{13}^2 + 2C_{23}^1\right)\beta + 4C_{13}^3\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(2\left(C_{13}^1 - C_{14}^2 - C_{34}^4\right)\beta + C_{12}^1 - C_{13}^4 - C_{23}^3\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(2\left(C_{23}^1 - C_{24}^2 - C_{34}^3\right)\beta - C_{12}^2 - C_{14}^4 - C_{24}^3\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{13}^2 - C_{14}^1 + 2C_{24}^2 + C_{34}^3\right)\beta - 2C_{23}^4 + 2C_{24}^3\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{24}^1 - C_{23}^2 + 2C_{13}^1 - C_{34}^4\right)\beta - 2C_{13}^4 + 2C_{14}^3\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{13}^2 + 3C_{14}^1 - 2C_{24}^2 + C_{34}^3\right)\beta + C_{12}^2 - 3C_{14}^4 + C_{24}^3\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{34}^4 - 3C_{23}^2 + 2C_{13}^1 - C_{24}^1\right)\beta - C_{12}^1 - 3C_{23}^3 + C_{13}^4\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{13}^2 - C_{14}^1 + 2C_{23}^1 - C_{34}^3\right)\beta - C_{12}^2 - C_{14}^4 - 2C_{23}^4 + C_{24}^3\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{34}^4 - C_{23}^2 + 2C_{14}^2 + C_{24}^1\right)\beta - C_{12}^1 - C_{13}^4 + 2C_{14}^3 + C_{23}^3\right)\varepsilon_1 = 0.
\end{gathered}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (11). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{2\overline{2}\}$.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{1\overline{1}1\overline{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\alpha_1 & \varepsilon_1\beta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\beta_1 & -\varepsilon_1\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\alpha_2 & \varepsilon_2\beta_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\beta_2 & -\varepsilon_2\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\beta_i \neq 0$, $(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 \neq 0$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
C_{12}^2\beta_1\varepsilon_1 = 0, \quad C_{12}^1\beta_1\varepsilon_1 = 0, \\
C_{34}^4\beta_2\varepsilon_2 = 0, \quad C_{34}^3\beta_2\varepsilon_2 = 0, \\
\left((\alpha_1 - \alpha_2) C_{34}^1 + \beta_1 C_{34}^2\right)\varepsilon_1 - \varepsilon_2\beta_2\left(C_{13}^3 - C_{14}^4\right) = 0, \\
\left((\alpha_2 - \alpha_1) C_{34}^2 + \beta_1 C_{34}^1\right)\varepsilon_1 - \varepsilon_2\beta_2\left(C_{23}^3 - C_{24}^4\right) = 0, \\
\left((\alpha_2 - \alpha_1) C_{12}^3 + \beta_2 C_{12}^4\right)\varepsilon_2 + \beta_1\varepsilon_1\left(C_{13}^1 - C_{23}^2\right) = 0, \\
\left((\alpha_1 - \alpha_2) C_{12}^4 + \beta_2 C_{12}^3\right)\varepsilon_2 + \beta_1\varepsilon_1\left(C_{14}^1 - C_{24}^2\right) = 0, \\
\left(\left(3C_{13}^2 + C_{23}^1\right)\beta_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) C_{13}^1 + 2\beta_2 C_{14}^1\right)\varepsilon_1 - \beta_1 C_{12}^3\varepsilon_2 = 0, \\
\left(\left(3C_{14}^2 + C_{24}^1\right)\beta_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) C_{14}^1 - 2\beta_2 C_{13}^1\right)\varepsilon_1 + \beta_1 C_{12}^4\varepsilon_2 = 0, \\
\left(\left(C_{13}^2 + 3C_{23}^1\right)\beta_1 + 2(\alpha_2 - \alpha_1) C_{23}^2 - 2\beta_2 C_{24}^2\right)\varepsilon_1 - \beta_1 C_{12}^3\varepsilon_2 = 0, \\
\left(\left(C_{14}^2 + 3C_{24}^1\right)\beta_1 + 2(\alpha_2 - \alpha_1) C_{24}^2 + 2\beta_2 C_{23}^2\right)\varepsilon_1 + \beta_1 C_{12}^4\varepsilon_2 = 0, \\
\left(\left(3C_{13}^4 + C_{14}^3\right)\beta_2 + 2(\alpha_2 - \alpha_1) C_{13}^3 + 2\beta_1 C_{23}^3\right)\varepsilon_2 + \beta_2 C_{34}^1\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(3C_{23}^4 + C_{24}^3\right)\beta_2 + 2(\alpha_2 - \alpha_1) C_{23}^3 - 2\beta_1 C_{13}^3\right)\varepsilon_2 - \beta_2 C_{34}^2\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{13}^4 + 3C_{14}^3\right)\beta_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) C_{14}^4 - 2\beta_1 C_{24}^4\right)\varepsilon_2 + \beta_2 C_{34}^1\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{23}^4 + 3C_{24}^3\right)\beta_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) C_{24}^4 + 2\beta_1 C_{14}^4\right)\varepsilon_2 - \beta_2 C_{34}^2\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{23}^1 - C_{13}^2\right)\alpha_1 + \left(C_{13}^2 - C_{23}^1\right)\alpha_2 + \left(C_{24}^1 - C_{14}^2\right)\beta_2 + 2\beta_1 C_{23}^2\right)\varepsilon_1 + \\
+ \left(\alpha_1 C_{12}^3 - \alpha_2 C_{12}^3 - \beta_2 C_{12}^4\right)\varepsilon_2 = 0, \\
\left(\left(C_{24}^1 - C_{14}^2\right)\alpha_1 + \left(C_{14}^2 - C_{24}^1\right)\alpha_2 + \left(C_{13}^2 - C_{23}^1\right)\beta_2 + 2\beta_1 C_{24}^2\right)\varepsilon_1 - \\
- \left(\alpha_1 C_{12}^4 - \alpha_2 C_{12}^4 + \beta_2 C_{12}^3\right)\varepsilon_2 = 0, \\
\left(\left(C_{23}^1 - C_{13}^2\right)\alpha_1 + \left(C_{13}^2 - C_{23}^1\right)\alpha_2 + \left(C_{24}^1 - C_{14}^2\right)\beta_2 + 2\beta_1 C_{13}^1\right)\varepsilon_1 - \\
- \left(\alpha_1 C_{12}^3 - \alpha_2 C_{12}^3 - \beta_2 C_{12}^4\right)\varepsilon_2 = 0, \\
\left(\left(C_{24}^1 - C_{14}^2\right)\alpha_1 + \left(C_{14}^2 - C_{24}^1\right)\alpha_2 + \left(C_{13}^2 - C_{23}^1\right)\beta_2 + 2\beta_1 C_{14}^1\right)\varepsilon_1 + \\
+ \left(\alpha_1 C_{12}^4 - \alpha_2 C_{12}^4 + \beta_2 C_{12}^3\right)\varepsilon_2 = 0, \\
\left(\left(C_{13}^4 - C_{14}^3\right)\alpha_1 + \left(C_{14}^3 - C_{13}^4\right)\alpha_2 + \left(C_{24}^3 - C_{23}^4\right)\beta_1 + 2\beta_2 C_{14}^4\right)\varepsilon_2 + \\
+ \left(\alpha_1 C_{34}^1 - \alpha_2 C_{34}^1 + \beta_1 C_{34}^2\right)\varepsilon_1 = 0,
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(C_{23}^4-C_{24}^3\right)\alpha_1+\left(C_{24}^3-C_{23}^4\right)\alpha_2+\left(C_{13}^4-C_{14}^3\right)\beta_1+2\beta_2C_{24}^4\right)\varepsilon_2-\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad-\left(\alpha_1C_{34}^2-\alpha_2C_{34}^2-\beta_1C_{34}^1\right)\varepsilon_1=0,\\
&\left(\left(C_{13}^4-C_{14}^3\right)\alpha_1+\left(C_{14}^3-C_{13}^4\right)\alpha_2+\left(C_{24}^3-C_{23}^4\right)\beta_1+2\beta_2C_{13}^3\right)\varepsilon_2-\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad-\left(\alpha_1C_{34}^1-\alpha_2C_{34}^1+\beta_1C_{34}^2\right)\varepsilon_1=0,\\
&\left(\left(C_{23}^4-C_{24}^3\right)\alpha_1+\left(C_{24}^3-C_{23}^4\right)\alpha_2+\left(C_{13}^4-C_{14}^3\right)\beta_1+2\beta_2C_{23}^3\right)\varepsilon_2+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\left(\alpha_1C_{34}^2-\alpha_2C_{34}^2-\beta_1C_{34}^1\right)\varepsilon_1=0.
\end{aligned}
$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (12). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$.

Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{(1\bar{1}1\bar{1})\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$
(13)\qquad r=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\alpha & \varepsilon_1\beta & 0 & 0\\ \varepsilon_1\beta & -\varepsilon_1\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_2\alpha & \varepsilon_2\beta\\ 0 & 0 & \varepsilon_2\beta & -\varepsilon_2\alpha\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2\end{pmatrix},
$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\beta \neq 0$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
C_{12}^2\beta\varepsilon_1=0,\quad C_{12}^1\beta\varepsilon_1=0,\\
C_{34}^4\beta\varepsilon_2=0,\quad C_{34}^3\beta\varepsilon_2=0,\\
\left(\left(C_{13}^3-C_{14}^4\right)\varepsilon_2-C_{34}^2\varepsilon_1\right)\beta=0,\quad \left(\left(C_{23}^3-C_{24}^4\right)\varepsilon_2-C_{34}^1\varepsilon_1\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{13}^1-C_{23}^2\right)\varepsilon_1+C_{12}^4\varepsilon_2\right)\beta=0,\quad \left(\left(C_{14}^1-C_{24}^2\right)\varepsilon_1+C_{12}^3\varepsilon_2\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{14}^2-C_{24}^1-2C_{23}^2\right)\varepsilon_1+C_{12}^4\varepsilon_2\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{23}^1-C_{13}^2-2C_{24}^2\right)\varepsilon_1+C_{12}^3\varepsilon_2\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{24}^1-C_{14}^2+2C_{13}^1\right)\varepsilon_1+C_{12}^4\varepsilon_2\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{13}^2-C_{23}^1+2C_{14}^1\right)\varepsilon_1+C_{12}^3\varepsilon_2\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{13}^4-C_{14}^3+2C_{24}^4\right)\varepsilon_2+C_{34}^1\varepsilon_1\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{13}^4-C_{14}^3+2C_{23}^3\right)\varepsilon_2-C_{34}^1\varepsilon_1\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{24}^3-C_{23}^4+2C_{13}^3\right)\varepsilon_2-C_{34}^2\varepsilon_1\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{23}^1+2C_{14}^1+3C_{13}^2\right)\varepsilon_1-C_{12}^3\varepsilon_2\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{24}^1-2C_{13}^1+3C_{14}^2\right)\varepsilon_1+C_{12}^4\varepsilon_2\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{13}^2-2C_{24}^2+3C_{23}^1\right)\varepsilon_1-C_{12}^3\varepsilon_2\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{14}^2+2C_{23}^2+3C_{24}^1\right)\varepsilon_1+C_{12}^4\varepsilon_2\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{13}^4-2C_{24}^4+3C_{14}^3\right)\varepsilon_2+C_{34}^1\varepsilon_1\right)\beta=0,\\
\left(\left(C_{23}^4+2C_{14}^4+3C_{24}^3\right)\varepsilon_2-C_{34}^2\varepsilon_1\right)\beta=0,
\end{gathered}
$$

$$\left(\left(C_{24}^{3}-2C_{13}^{3}+3C_{23}^{4}\right)\varepsilon_2-C_{34}^{2}\varepsilon_1\right)\beta=0,$$
$$\left(2C_{14}^{4}\varepsilon_2-C_{23}^{4}\varepsilon_2+C_{24}^{3}\varepsilon_2+C_{34}^{2}\varepsilon_1\right)\beta=0,$$
$$\left(3C_{13}^{4}\varepsilon_2+C_{14}^{3}\varepsilon_2+2C_{23}^{3}\varepsilon_2+C_{34}^{1}\varepsilon_1\right)\beta=0.$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, получаем, что данная метрическая группа Ли обязана иметь параллельный тензор Риччи. □

Из теоремы 1 немедленно получаем

**Следствие 1.** *Если четырехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой имеет нулевой тензор Схоутена-Вейля, то метрика является либо конформно плоской, либо Риччи параллельной.*

*Доказательство.* Оператор Риччи четырехмерной группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой может иметь только тип Сегре $\{1111\}$ и соответствующие вырожденные типы, что противоречит теореме 1. □

**Теорема 2.** *Пусть $(G,g)$ — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{1(12)\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы $G$ содержится в таблице 2.*

*Доказательство.* Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{1(12)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\rho_1&0&0&0\\0&\varepsilon_2\rho_2&0&0\\0&0&0&\varepsilon_3\rho_2\\0&0&\varepsilon_3\rho_2&\varepsilon_3\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0&0\\0&\varepsilon_2&0&0\\0&0&0&\varepsilon_3\\0&0&\varepsilon_3&0\end{pmatrix},$$

где $\rho_1,\rho_2$ — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i=\pm1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид:

$$C_{23}^{2}\varepsilon_2=0,\quad C_{23}^{4}\varepsilon_3=0,$$
$$C_{34}^{4}\varepsilon_3=0,\quad C_{12}^{1}\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,$$
$$C_{13}^{1}\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\quad C_{23}^{1}\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,$$
$$C_{12}^{2}\varepsilon_2\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\quad C_{13}^{4}\varepsilon_3\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,$$
$$\left(\left(\rho_1-\rho_2\right)C_{14}^{1}-C_{13}^{1}\right)\varepsilon_1=0,$$
$$\left(3C_{24}^{4}-C_{23}^{3}\right)\varepsilon_3+C_{34}^{2}\varepsilon_2=0,$$
$$\left(\rho_1-\rho_2\right)C_{34}^{1}\varepsilon_1-C_{13}^{4}\varepsilon_3=0,$$
$$\left(\rho_1-\rho_2\right)\left(\left(C_{13}^{3}+C_{14}^{4}\right)\varepsilon_3-C_{34}^{1}\varepsilon_1\right)=0,$$
$$\left(C_{12}^{4}\varepsilon_3+C_{13}^{2}\varepsilon_2-C_{23}^{1}\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,$$
$$\left(C_{12}^{4}\varepsilon_3+C_{13}^{2}\varepsilon_2+C_{23}^{1}\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,$$
$$\left(2\left(\rho_2-\rho_1\right)C_{14}^{3}-C_{13}^{3}+3C_{14}^{4}\right)\varepsilon_3+C_{34}^{1}\varepsilon_1=0,$$
$$\left(2\left(\rho_1-\rho_2\right)C_{24}^{1}-C_{23}^{1}\right)\varepsilon_1-C_{12}^{4}\varepsilon_3-C_{13}^{2}\varepsilon_2=0,$$

$$\left(\rho_2 C_{12}^3 - \rho_1 C_{12}^3 + 2C_{12}^4\right)\varepsilon_3 - \left(C_{14}^2\varepsilon_2 + C_{24}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1 - \rho_2) = 0,$$
$$\left(\left(C_{13}^3 + C_{14}^4\right)\rho_2 - \left(C_{13}^3 + C_{14}^4\right)\rho_1 + 2C_{13}^4\right)\varepsilon_3 - (\rho_1 - \rho_2)\, C_{34}^1\varepsilon_1 = 0,$$
$$\left(\rho_1 C_{24}^1 - \rho_2 C_{24}^1 - C_{23}^1\right)\varepsilon_1 + \left(\rho_2 C_{14}^2 - \rho_1 C_{14}^2 - C_{13}^2\right)\varepsilon_2 -$$
$$- \left(\rho_1 C_{12}^3 - \rho_2 C_{12}^3 - C_{12}^4\right)\varepsilon_3 = 0.$$

Решая данную систему получим, что

$$[e_1, e_2] = C_{12}^3 e_3 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_3 C_{14}^2\varepsilon_2 + C_{12}^3\right)(\rho_1 - \rho_2)\, e_4,$$
$$[e_1, e_3] = -\frac{1}{2}\left(\varepsilon_2 C_{12}^3\varepsilon_3 + C_{14}^2\right)(\rho_1 - \rho_2)\, e_2 - \frac{1}{2}C_{14}^3(\rho_1 - \rho_2)\, e_3,$$
$$[e_2, e_3] = C_{23}^3 e_3,$$
$$[e_1, e_4] = C_{14}^2 e_2 + C_{14}^3 e_3 + \frac{1}{2}C_{14}^3(\rho_1 - \rho_2)\, e_4,$$
$$[e_2, e_4] = C_{24}^2 e_2 + C_{24}^3 e_3 + C_{24}^4 e_4,$$
$$[e_3, e_4] = \varepsilon_2\varepsilon_3\left(C_{23}^3 - 3C_{24}^4\right) e_2 + C_{34}^3 e_3.$$

Далее, накладывая условие выполнения тождества Якоби и отбрасывая конформно плоские и Риччи параллельные решения, получаем однопараметрическую метрическую алгебру Ли:

$$[e_2, e_3] = 3\alpha_1 e_3, \quad [e_2, e_4] = -\frac{\varepsilon_2}{2\alpha_1}e_3 + \alpha_1 e_4, \quad \alpha_1 \neq 0;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Отметим, что заменой базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

параметр $\alpha_1$ можно сделать положительным. □

**Теорема 3.** *Пусть $(G, g)$ — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{(11)2\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы $G$ содержится в таблице 2.*

*Доказательство.* Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{(11)2\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1$, $\rho_2$ — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
C_{34}^4\varepsilon_3 = 0, \quad C_{13}^1(\rho_1-\rho_2) = 0,\\
C_{23}^2(\rho_1-\rho_2) = 0, \quad C_{12}^4(\rho_1-\rho_2) = 0,\\
C_{13}^4(\rho_1-\rho_2) = 0, \quad C_{23}^4(\rho_1-\rho_2) = 0,\\
C_{14}^1(\rho_1-\rho_2) - C_{13}^1 = 0, \quad C_{24}^2(\rho_1-\rho_2) - C_{23}^2 = 0,\\
C_{12}^3(\rho_1-\rho_2) - C_{12}^4 = 0, \quad C_{34}^1(\rho_1-\rho_2)\varepsilon_1 - C_{13}^4\varepsilon_3 = 0,\\
C_{34}^2(\rho_1-\rho_2)\varepsilon_2 - C_{23}^4\varepsilon_3 = 0, \quad C_{12}^4\varepsilon_3 + C_{13}^2\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1 = 0,\\
C_{12}^4\varepsilon_3 - C_{13}^2\varepsilon_2 - C_{23}^1\varepsilon_1 = 0, \quad \left(C_{13}^3 + C_{14}^4\right)\varepsilon_3 - C_{34}^1\varepsilon_1 = 0\\
\left(C_{23}^3 + C_{24}^4\right)\varepsilon_3 - C_{34}^2\varepsilon_2 = 0,\\
\left(2(\rho_1-\rho_2)C_{14}^3 + C_{13}^3 - 3C_{14}^4\right)\varepsilon_3 - C_{34}^1\varepsilon_1 = 0,\\
\left(2(\rho_1-\rho_2)C_{24}^3 + C_{23}^3 - 3C_{24}^4\right)\varepsilon_3 - C_{34}^2\varepsilon_2 = 0,\\
\left(\left(C_{13}^3 + C_{14}^4\right)\rho_1 - \left(C_{13}^3 + C_{14}^4\right)\rho_2 - 2C_{13}^4\right)\varepsilon_3 + C_{34}^1(\rho_1-\rho_2)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{23}^3 + C_{24}^4\right)\rho_1 - \left(C_{23}^3 + C_{24}^4\right)\rho_2 - 2C_{23}^4\right)\varepsilon_3 + C_{34}^2(\rho_1-\rho_2)\varepsilon_2 = 0,\\
\left(\rho_1C_{24}^1 - \rho_2C_{24}^1 - C_{23}^1\right)\varepsilon_1 + \left(\rho_1C_{14}^2 - \rho_2C_{14}^2 - C_{13}^2\right)\varepsilon_2 +\\
+ \left(\rho_1C_{12}^3 - \rho_2C_{12}^3 - C_{12}^4\right)\varepsilon_3 = 0,\\
\left(\rho_1C_{24}^1 - \rho_2C_{24}^1 - C_{23}^1\right)\varepsilon_1 + \left(\rho_1C_{14}^2 - \rho_2C_{14}^2 - C_{13}^2\right)\varepsilon_2 -\\
- \left(\rho_1C_{12}^3 - \rho_2C_{12}^3 - C_{12}^4\right)\varepsilon_3 = 0.
\end{gathered}$$

Решая данную систему получим, что

$$\begin{gathered}
[e_1, e_2] = C_{12}^1e_1 + C_{12}^2e_2, \quad [e_1, e_3] = -\frac{1}{2}\rho_1C_{14}^3e_3,\\
[e_2, e_3] = -\frac{1}{2}\rho_1C_{24}^3e_3, \quad [e_1, e_4] = C_{14}^3e_3 + \frac{1}{2}\rho_1C_{14}^3e_4,\\
[e_2, e_4] = C_{24}^3e_3 + \frac{1}{2}\rho_1C_{24}^3e_4.
\end{gathered}$$

Тождество Якоби и вид тензора Риччи в данной алгебре Ли накладывают следующие ограничения:

$$\begin{gathered}
C_{12}^1C_{14}^3 + C_{12}^2C_{24}^3 = 0, \quad \rho_1 = -\varepsilon_2\left(C_{12}^1\right)^2 - \varepsilon_1\left(C_{12}^2\right)^2,\\
\rho_1\left(\left(C_{14}^3\right)^2\varepsilon_1 + \left(C_{24}^3\right)^2\varepsilon_2\right) - C_{12}^1C_{24}^3\varepsilon_2 + C_{12}^2C_{14}^3\varepsilon_1 + 1 = 0, \quad \left(C_{14}^3\right)^2 + \left(C_{24}^3\right)^2 \neq 0.
\end{gathered}$$

Рассмотрим замены базиса в данной алгебре Ли с матрицами следующего вида

$$M = \left\{\begin{pmatrix} f(\varphi) & -\varepsilon_1\varepsilon_2h(\varphi) & 0 & 0\\ h(\varphi) & f(\varphi) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pm1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix}\right\}, \text{ где}$$

$$f(\varphi) = \begin{cases}\cos(\varphi), & \varepsilon_2 = \varepsilon_1,\\ \operatorname{ch}(\varphi), & \varepsilon_2 = -\varepsilon_1;\end{cases} \quad h(\varphi) = \begin{cases}\sin(\varphi), & \varepsilon_2 = \varepsilon_1,\\ \operatorname{sh}(\varphi), & \varepsilon_2 = -\varepsilon_1.\end{cases}$$

Такие замены базиса не изменяют метрический тензор и тензор Риччи. При преобразовании базиса следующие структурные константы будут иметь вид

$$\left(C^3_{14}\right)' = C^3_{14} f(\varphi) - C^3_{24} h(\varphi), \quad \left(C^3_{24}\right)' = C^3_{24} f(\varphi) - \varepsilon_1\varepsilon_2 C^3_{14} h(\varphi).$$

Т.к. случай $C^3_{14} = \pm C^3_{24}$ ведет к противоречию с видом тензора Риччи, и с учетом того, что $C^3_{14}$ и $C^3_{24}$ одновременно не зануляются, мы всегда можем выбрать угол $\varphi$ так, чтобы либо $\left(C^3_{14}\right)' = 0$, либо $\left(C^3_{24}\right)' = 0$. Таким образом, получим два решения:

$$[e_1, e_2] = \frac{\delta_1\sqrt{5} - \varepsilon_2}{2\alpha_1} e_1, \ [e_2, e_3] = \frac{3\varepsilon_2 - \delta_1\sqrt{5}}{4\alpha_1} e_3, \ [e_2, e_4] = \alpha_1 e_3 + \frac{\delta_1\sqrt{5} - 3\varepsilon_2}{4\alpha_1} e_4,$$
$$\delta_1 = \pm 1, \ \alpha_1 \neq 0;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1;$$

и

$$[e_1, e_2] = \frac{\delta_1\sqrt{5} + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_2, \ [e_1, e_3] = \frac{3\varepsilon_1 + \delta_1\sqrt{5}}{4\alpha_1} e_3, \ [e_1, e_4] = \alpha_1 e_3 - \frac{\delta_1\sqrt{5} + 3\varepsilon_1}{4\alpha_1} e_4,$$
$$\delta_1 = \pm 1, \ \alpha_1 \neq 0;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Однако, замена базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит первое решение во второе. Кроме того, заменой базиса с $g$-ортогональной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

параметр $\alpha_1$ можно сделать положительным. Таким образом, решением является единственное однопараметрическое семейство метрических алгебр Ли. □

**Теорема 4.** *Пусть $(G, g)$ — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{(112)\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы $G$ содержится в таблице 2.*

*Доказательство.* Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{(112)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
C_{13}^1\varepsilon_1 = 0, \quad C_{13}^4\varepsilon_3 = 0,\\
C_{23}^2\varepsilon_2 = 0, \quad C_{23}^4\varepsilon_3 = 0,\\
C_{12}^4\varepsilon_3 = 0, \quad C_{34}^4\varepsilon_3 = 0,\\
(3C_{14}^4 - C_{13}^3)\varepsilon_3 + C_{34}^1\varepsilon_1 = 0, \quad (3C_{24}^4 - C_{23}^3)\varepsilon_3 + C_{34}^2\varepsilon_2 = 0,\\
C_{12}^4\varepsilon_3 + C_{13}^2\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1 = 0, \quad C_{12}^4\varepsilon_3 - C_{13}^2\varepsilon_2 - C_{23}^1\varepsilon_1 = 0.
\end{gathered}$$

Решая данную систему получим, что

$$\begin{gathered}
[e_1, e_2] = C_{12}^1 e_1 + C_{12}^2 e_2 + C_{12}^3 e_3,\\
[e_1, e_3] = C_{13}^3 e_3, \quad [e_2, e_3] = C_{23}^3 e_3,\\
[e_1, e_4] = C_{14}^1 e_1 + C_{14}^2 e_2 + C_{14}^3 e_3,\\
[e_2, e_4] = C_{24}^1 e_1 + C_{24}^2 e_2 + C_{24}^3 e_3,\\
[e_3, e_4] = \varepsilon_1\varepsilon_3 C_{13}^3 e_1 + \varepsilon_2\varepsilon_3 C_{23}^3 e_2 + C_{34}^3 e_3,
\end{gathered}$$

Далее, накладывая условие выполнения тождества Якоби и отбрасывая конформно плоские и Риччи параллельные решения, получаем следующие решения:

(a)

$$\begin{gathered}
[e_1, e_2] = -\alpha_1\delta_1 e_1 + \alpha_1 e_2, \quad [e_1, e_3] = \alpha_1 e_3, \quad [e_2, e_3] = \delta_1\alpha_1 e_3,\\
[e_1, e_4] = -\alpha_2\delta_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad [e_2, e_4] = -\alpha_4\delta_1 e_1 + \alpha_4 e_2 + \alpha_5 e_3,\\
[e_3, e_4] = \alpha_1\varepsilon_3\varepsilon_1 e_1 - \delta_1\alpha_1\varepsilon_3\varepsilon_1 e_2 -\\
- \frac{4\alpha_1\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_3 - 4\alpha_1\alpha_5\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 - 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 + \alpha_2^2 + \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3}{2(\alpha_2\delta_1 - \alpha_4)} e_3,\\
4\alpha_1\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_3 - 4\alpha_1\alpha_5\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 - 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 + \alpha_2^2 + \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0,\\
\alpha_2\delta_1 - \alpha_4 \neq 0,\\
4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\delta_1\varepsilon_3 - 4\alpha_1\alpha_4\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 + \alpha_2^3\delta_1\varepsilon_1 - \alpha_2\alpha_4^2\delta_1\varepsilon_1 - 4\alpha_1\alpha_2\alpha_5\varepsilon_3 + 4\alpha_1\alpha_3\alpha_4\varepsilon_3 -\\
- \alpha_2^2\alpha_4\varepsilon_1 + 2\alpha_2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + \alpha_4^3\varepsilon_1 + 2\alpha_4\varepsilon_1\varepsilon_3 \neq 0,\\
\delta_1 = \pm 1;\\
\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{gathered}$$

(b)

$$\begin{gathered}
[e_1, e_2] = \alpha_1\delta_1 e_2 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3,\\
[e_1, e_4] = -\frac{\delta_1(\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\varepsilon_1)}{2\alpha_1} e_3,\\
[e_2, e_4] = \alpha_3 e_3, \quad [e_3, e_4] = \frac{\varepsilon_1\delta_1(\alpha_2^2\varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_2} e_3,\\
\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0,\\
4\alpha_1\alpha_3\varepsilon_3 + \alpha_2^2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1\varepsilon_3 \neq 0, \quad \alpha_2^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0,\\
\delta_1 = \pm 1;
\end{gathered}$$

$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c)

$$[e_1, e_4] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_3\delta_1 e_3 + \alpha_4 e_1 + \alpha_5 e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \alpha_4^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_5^2 + 2\varepsilon_3}{2(\alpha_1 + \alpha_5)} e_3,$$
$$\alpha_1 + \alpha_5 \neq 0,$$
$$4\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1 + \alpha_1\alpha_2^2\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_4\varepsilon_1 - 3\alpha_1\alpha_4^2\varepsilon_2 - 4\alpha_1\alpha_5^2\varepsilon_1 + 3\alpha_2^2\alpha_5\varepsilon_2 + 2\alpha_2\alpha_4\alpha_5\varepsilon_1 - {}$$
$${} - \alpha_4^2\alpha_5\varepsilon_2 - 2\alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$2\alpha_1^2\alpha_2\varepsilon_2 - 2\alpha_1^2\alpha_4\varepsilon_1 - 4\alpha_1\alpha_2\alpha_5\varepsilon_2 - 4\alpha_1\alpha_4\alpha_5\varepsilon_1 + \alpha_2^3\varepsilon_1 + 3\alpha_2^2\alpha_4\varepsilon_2 + 3\alpha_2\alpha_4^2\varepsilon_1 - {}$$
$${} - 2\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_2 + \alpha_4^3\varepsilon_2 + 2\alpha_4\alpha_5^2\varepsilon_1 + 2\alpha_2\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\alpha_4\varepsilon_1\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \alpha_4^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_5^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d)

$$[e_1, e_4] = -\frac{1}{2}\delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\, e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3,$$
$$[e_2, e_4] = \alpha_3 e_1 + \frac{1}{2}\delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\, e_2 + \delta_1\alpha_2 e_3,$$
$$[e_3, e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$\varepsilon_2\alpha_3^2 - \varepsilon_2\alpha_1^2 - \delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,\varepsilon_1\alpha_4 \neq 0,$$
$$\alpha_4\alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_1\delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,\varepsilon_2 + {}$$
$${} + \delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,\alpha_3\varepsilon_1 + \alpha_4\alpha_3\varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\alpha_4 \neq 0,$$
$$\delta_i = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Уменьшим количество параметров в полученных решениях. Если $\alpha_1 \neq 0$, то замена базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ -A\varepsilon_1\varepsilon_3 & B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3(A^2 - B^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$B = -2\delta_1\varepsilon_1(\alpha_2^4\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 - 2\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4\delta_1\varepsilon_3 - 6\alpha_2\alpha_3\alpha_4^3\delta_1\varepsilon_3 - \alpha_4^4\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 - 2\alpha_2^3\alpha_4\alpha_5\varepsilon_3 + {}$$
$${} + 6\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4^2\varepsilon_3 + 2\alpha_2\alpha_4^3\alpha_5\varepsilon_3 + 2\alpha_3\alpha_4^4\varepsilon_3 - 2\alpha_2^2\alpha_5\delta_1 - 2\alpha_4^2\alpha_5\delta_1 + 4\alpha_2\alpha_4\alpha_5)/$$
$$/((\alpha_2\delta_1 - \alpha_4)(\alpha_2^4 + 6\alpha_2^2\alpha_4^2 + \alpha_4^4 - 4\alpha_2^3\alpha_4\delta_1 - 4\alpha_2\alpha_4^3\delta_1 - 4)),$$
$$A = \frac{(\alpha_2\delta_1 - \alpha_4)(\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_1\alpha_3)}{(\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_3 - 2\alpha_2\alpha_4\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + \alpha_4^2\varepsilon_1\varepsilon_3 - 4\alpha_1\alpha_5\delta_1 + 4\alpha_1\alpha_3 + 2\varepsilon_1)\alpha_1},$$

зануляет параметры $\alpha_2$ и $\alpha_3$ в решении (a). Если же $\alpha_1 = 0$, то замена базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ -A\varepsilon_1\varepsilon_3 & B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3(A^2 - B^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$B = -2\varepsilon_1(6\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4^2\delta_1\varepsilon_3 - 2\alpha_2^3\alpha_4\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 + 2\alpha_2\alpha_4^3\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 + 2\alpha_3\alpha_4^4\delta_1\varepsilon_3 + \alpha_2^4\alpha_5\varepsilon_3 -$$
$$-2\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4\varepsilon_3 - 6\alpha_2\alpha_3\alpha_4^3\varepsilon_3 - \alpha_4^4\alpha_5\varepsilon_3 + 4\alpha_2\alpha_4\alpha_5\delta_1 - 2\alpha_2^2\alpha_5 - 2\alpha_4^2\alpha_5)/$$
$$/((\alpha_2\delta_1 - \alpha_4)(\alpha_2^4 + 6\alpha_2^2\alpha_4^2 + \alpha_4^4 - 4\alpha_2^3\alpha_4\delta_1 - 4\alpha_2\alpha_4^3\delta_1 - 4)),$$
$$A = -2\varepsilon_1(\alpha_2^3\alpha_3\delta_1\varepsilon_3 + 4\alpha_2^2\alpha_4\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 - \alpha_2\alpha_3\alpha_4^2\delta_1\varepsilon_3 - 2\alpha_2^3\alpha_5\varepsilon_3 - \alpha_2^2\alpha_3\alpha_4\varepsilon_3 -$$
$$-2\alpha_2\alpha_4^2\alpha_5\varepsilon_3 + \alpha_3\alpha_4^3\varepsilon_3 + 2\alpha_2\alpha_3\delta_1 - 2\alpha_3\alpha_4)/$$
$$/(\alpha_2^4 + 6\alpha_2^2\alpha_4^2 + \alpha_4^4 - 4\alpha_2^3\alpha_4\delta_1 - 4\alpha_2\alpha_4^3\delta_1 - 4),$$

обнулит параметры $\alpha_3$ и $\alpha_5$. Заметим, что все знаменатели не равны нулю в силу ограничений на структурные константы, которые приведены выше.

Для решения (b) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\varphi) & \mathrm{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}(\varphi) & \mathrm{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha_2^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_1\alpha_3\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\delta_1\varepsilon_1}{\alpha_2^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_1\alpha_3\delta_1 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\delta_1\varepsilon_1}\right)$; либо с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sh}(\varphi) & \mathrm{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ \mathrm{ch}(\varphi) & \mathrm{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\alpha_2^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_1\alpha_3\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\delta_1\varepsilon_1}{\alpha_2^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_1\alpha_3\delta_1 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\delta_1\varepsilon_1}\right)$. Данные замены занулят параметр $\alpha_3$. Заметим, что одна из данных замен всегда возможна из-за ограничений на структурные константы, которые приведены выше.

Для решения (c), если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) & 0 & B \\ -\sin(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \cos(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & -\frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$B = -\frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1(\sin(\varphi)\delta_1 + \cos(\varphi))}{\cos^2(\varphi)\alpha_4 + \cos^2(\varphi)\alpha_2 + \sin(\varphi)\cos(\varphi)\alpha_5 - \sin(\varphi)\cos(\varphi)\alpha_1 - \alpha_4},$$
$$\varphi = -\arctan((2\alpha_1\alpha_2\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_5\delta_1 + 2\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3)/$$
$$/(\alpha_2^2\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_5\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 + \alpha_4^2\delta_1 + 2\alpha_5^2\delta_1 + 2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_4\alpha_5 + 2\delta_1\varepsilon_3));$$

если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, то используем $g$-ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\varphi) & \mathrm{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}(\varphi) & \mathrm{ch}(\varphi) & 0 & B \\ \mathrm{sh}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \mathrm{ch}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & \frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$B = \frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1(\mathrm{ch}(\varphi) - \mathrm{sh}(\varphi)\delta_1)}{\mathrm{ch}^2(\varphi)\alpha_4 - \mathrm{ch}^2(\varphi)\alpha_2 + \mathrm{sh}(\varphi)\,\mathrm{ch}(\varphi)\alpha_5 - \mathrm{sh}(\varphi)\,\mathrm{ch}(\varphi)\alpha_1 - \alpha_4},$$

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{1}{2}\ln((&2\alpha_1\alpha_2\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_5\delta_1 - \alpha_2^2\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_5\delta_1 - \alpha_4^2\delta_1 + 2\alpha_5^2\delta_1 + \\ &+2\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_5 - \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_4 - \alpha_4^2 + 2\alpha_4\alpha_5 + 2\delta_1\varepsilon_3 + 2\varepsilon_3)/ \\ &/(-2\alpha_1\alpha_2\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_5\delta_1 - \alpha_2^2\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 - 2\alpha_2\alpha_5\delta_1 - \alpha_4^2\delta_1 + 2\alpha_5^2\delta_1 - \\ &-2\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_4^2 + 2\alpha_4\alpha_5 + 2\delta_1\varepsilon_3 - 2\varepsilon_3));\end{aligned}$$

или

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sh}(\varphi) & \mathrm{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ \mathrm{ch}(\varphi) & \mathrm{sh}(\varphi) & 0 & B \\ \mathrm{ch}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \mathrm{sh}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & \frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$B = \frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1(\mathrm{sh}(\varphi) - \mathrm{ch}(\varphi)\delta_1)}{\alpha_5\,\mathrm{ch}(\varphi)\,\mathrm{sh}(\varphi) - \alpha_1\,\mathrm{sh}(\varphi)\,\mathrm{ch}(\varphi) - \alpha_2\,\mathrm{ch}^2(\varphi) + \mathrm{ch}^2(\varphi)\alpha_4 + \alpha_2},$$

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{1}{2}\ln(-(&2\alpha_1\alpha_2\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_5\delta_1 - \alpha_2^2\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_5\delta_1 - \alpha_4^2\delta_1 + 2\alpha_5^2\delta_1 + \\ &+2\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_5 - \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_4 - \alpha_4^2 + 2\alpha_4\alpha_5 + 2\delta_1\varepsilon_3 + 2\varepsilon_3)/ \\ &/(-2\alpha_1\alpha_2\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_5\delta_1 - \alpha_2^2\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 - 2\alpha_2\alpha_5\delta_1 - \alpha_4^2\delta_1 + 2\alpha_5^2\delta_1 - \\ &-2\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_4^2 + 2\alpha_4\alpha_5 + 2\delta_1\varepsilon_3 - 2\varepsilon_3)).\end{aligned}$$

Вышеприведенные замены обнулят параметр $\alpha_3$. Но они невозможны в следующих случаях: $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ и $\alpha_9 = -\alpha_7$; либо $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ и $\alpha_8 = -\frac{2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}$, где $\alpha_1 = (\alpha_6 + \alpha_7)\delta_1$, $\alpha_5 = (\alpha_6 - \alpha_7)\delta_1$, $\alpha_2 = \alpha_8 + \alpha_9$, $\alpha_4 = \alpha_8 - \alpha_9$.

Для решения (d) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ -A\varepsilon_1\delta_2\varepsilon_3 & -B\varepsilon_2\delta_2\varepsilon_3 & \delta_2 & -\frac{1}{2}(A^2\varepsilon_1 + B^2\varepsilon_2)\delta_2\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

где

$$B = -\frac{2\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,\delta_1\delta_2 + 2\alpha_4\delta_1 + 2\alpha_3\right)}{\alpha_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3 - 2\alpha_1\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \alpha_3^2\varepsilon_2\varepsilon_3 + 4\alpha_4^2\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\varepsilon_1},$$

$$A = \frac{2\alpha_2(\delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3} - 2\delta_1\alpha_1 - 2\alpha_4)}{\alpha_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3 - 2\alpha_1\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \alpha_3^2\varepsilon_2\varepsilon_3 + 4\alpha_4^2\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\varepsilon_1},$$

что обнулит параметр $\alpha_2$, а параметр $\delta_2$ сделает равным единице.

Таким образом получим следующие метрические алгебры Ли

(a.1)

$$[e_1,e_2]=-\alpha_1\delta_1e_1+\alpha_1e_2,\quad [e_1,e_3]=\alpha_1e_3,\quad [e_2,e_3]=\delta_1\alpha_1e_3,$$
$$[e_2,e_4]=-\alpha_4\delta_1e_1+\alpha_4e_2+\alpha_5e_3,$$
$$[e_3,e_4]=\alpha_1\varepsilon_3\varepsilon_1e_1-\delta_1\alpha_1\varepsilon_3\varepsilon_1e_2-\frac{4\alpha_1\alpha_5\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3-\alpha_4^2-2\varepsilon_3}{2\alpha_4}e_3,$$
$$\alpha_1\neq 0,\quad \alpha_4\neq 0,$$
$$\alpha_4^2\varepsilon_3-4\alpha_1\alpha_5\delta_1\varepsilon_1+2\neq 0,$$
$$\delta_1=\pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=-\varepsilon_1,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm 1.$$

(a.2)

$$[e_1,e_4]=-\alpha_2\delta_1e_1+\alpha_2e_2,$$
$$[e_2,e_4]=-\alpha_4\delta_1e_1+\alpha_4e_2,$$
$$[e_3,e_4]=-\frac{\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_4\delta_1+\alpha_4^2+2\varepsilon_3}{2(\alpha_2\delta_1-\alpha_4)}e_3,$$
$$\alpha_2\delta_1-\alpha_4\neq 0,$$
$$(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2+\alpha_4)(\alpha_2\delta_1-\alpha_4)+2\varepsilon_3(\alpha_2\delta_1+\alpha_4)\neq 0,$$
$$(\alpha_2-\alpha_4\delta_1+)^2+2\varepsilon_3\neq 0,$$
$$\delta_1=\pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=-\varepsilon_1,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm 1.$$

(b)

$$[e_1,e_2]=\alpha_1\delta_1e_2+\alpha_1e_1+\alpha_2e_3,$$
$$[e_1,e_4]=-\frac{\varepsilon_1\delta_1(\alpha_2^2\varepsilon_3+2)}{2\alpha_1}e_3,$$
$$[e_3,e_4]=\frac{\varepsilon_1\delta_1(\alpha_2^2\varepsilon_3+2)}{2\alpha_2}e_3,$$
$$\alpha_1\neq 0,\quad \alpha_2\neq 0,\quad \alpha_2^2+2\varepsilon_3\neq 0,$$
$$\delta_1=\pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=-\varepsilon_1,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm 1.$$

(c.1)

$$[e_1,e_4]=(\alpha_6\delta_1+\alpha_7\delta_1)e_1+(\alpha_8+\alpha_9)e_2,$$
$$[e_2,e_4]=(\alpha_9\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_8\varepsilon_1\varepsilon_2)e_1+(\alpha_6\delta_1-\alpha_7\delta_1)e_2,$$
$$[e_3,e_4]=\frac{\delta_1(2\alpha_9^2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\alpha_6^2+2\alpha_7^2+\varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6\neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\alpha_7\varepsilon_1+4\alpha_6\alpha_8\alpha_9\varepsilon_2-2\alpha_7^3\varepsilon_1-2\alpha_7\alpha_9^2\varepsilon_2-\alpha_7\varepsilon_1\varepsilon_3\neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\alpha_9\varepsilon_2-4\alpha_6\alpha_7\alpha_8\varepsilon_2-2\alpha_7^2\alpha_9\varepsilon_2-2\alpha_9^3\varepsilon_1-\alpha_9\varepsilon_2\varepsilon_3\neq 0,$$
$$2\alpha_9^2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+2\alpha_6^2\varepsilon_3+2\alpha_7^2\varepsilon_3+1\neq 0,$$
$$\delta_1=\pm 1;$$

$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.2)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 + (\alpha_8 - \alpha_7)e_2 + \alpha_3 e_3,$$
$$[e_2, e_4] = (\alpha_8 + \alpha_7)e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2 + \delta_1\alpha_3 e_3,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6} e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2 + 4\alpha_6\alpha_8 - \varepsilon_3 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_9 - 2\alpha_7^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3}{2\alpha_6} e_2 + \alpha_3 e_3,$$
$$[e_2, e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_9 + 2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6} e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2 + \delta_1\alpha_3 e_3,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6} e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\alpha_7 - 2\alpha_7^3 + 4\alpha_7^2\alpha_9 + 2\alpha_7\alpha_9^2 - 4\alpha_9^3 - \alpha_7\varepsilon_3 + 2\alpha_9\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\alpha_9 + 4\alpha_7^3 - 2\alpha_7^2\alpha_9 - 4\alpha_7\alpha_9^2 + 2\alpha_9^3 + 2\alpha_7\varepsilon_3 - \alpha_9\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.1)

$$[e_1, e_4] = -\frac{1}{2}\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\, e_1 + \alpha_1 e_2,$$
$$[e_2, e_4] = \alpha_3 e_1 + \frac{1}{2}\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\, e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3 \geqslant 0,$$
$$\varepsilon_1\alpha_1^2 + \sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,\alpha_4\varepsilon_2 - \varepsilon_1\alpha_3^2 \neq 0,$$
$$\alpha_4\alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_1\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,\varepsilon_2 +$$
$$+ \sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,\alpha_3\varepsilon_1 + \alpha_4\alpha_3\varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\alpha_4 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.2)

$$[e_1, e_4] = -\frac{1}{2}\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}\, e_1 + (\alpha_5\varepsilon_2 + \alpha_6\varepsilon_2)e_2 + \alpha_2 e_3,$$

$$[e_2, e_4] = (\alpha_5\varepsilon_1 - \alpha_6\varepsilon_1)e_1 + \frac{1}{2}\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}e_2 + \delta_1\alpha_2 e_3,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{1}{2}\delta_3\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}e_3,$$
$$-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 \geqslant 0, \quad -4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 > 0,$$
$$\delta_2\delta_3\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_2 + 8\alpha_5\alpha_6\varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\delta_3\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}\alpha_5 - 2\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}\alpha_6 \neq 0,$$
$$\delta_i = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Для решения (a.1) сделаем замену базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_4) \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\delta_1$ равным единице, а параметры $\alpha_1$ и $\alpha_4$ положительными.

Для решения (a.2) сделаем замену базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varphi) & \delta_1 \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}(\varphi) & \delta_1 \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \operatorname{sign}\left(\frac{\alpha_4^2-\alpha_2^2}{\alpha_4\delta_1+\alpha_2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \operatorname{sign}\left(\frac{\alpha_4^2-\alpha_2^2}{\alpha_4\delta_1+\alpha_2}\right) \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha_4\delta_1+\alpha_2}{\alpha_4\delta_1-\alpha_2}\right)$; либо с матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh}(\varphi) & \delta_1 \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ \operatorname{ch}(\varphi) & \delta_1 \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \operatorname{sign}\left(\frac{\alpha_4^2-\alpha_2^2}{\alpha_4\delta_1+\alpha_2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \operatorname{sign}\left(\frac{\alpha_4^2-\alpha_2^2}{\alpha_4\delta_1+\alpha_2}\right) \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\alpha_4\delta_1+\alpha_2}{\alpha_4\delta_1-\alpha_2}\right)$. После одной из этих замен параметр $\delta_1$ будет равным единице, параметр $\alpha_2$ занулится, а параметр $\alpha_4$ станет положительным. Заметим, что одна из данных замен всегда возможна из-за ограничений на структурные константы, которые приведены выше.

Для решения (b) сделаем замену базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \operatorname{sign}(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\delta_1$ равным единице, а параметры $\alpha_1$ и $\alpha_2$ положительными.

Для решения (c.1), если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\alpha_9}{\delta_1\alpha_7}\right)$, что обратит параметр $\alpha_9$ в ноль; если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, то используем $g$-ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\varphi) & \mathrm{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}(\varphi) & \mathrm{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где либо $\varphi = \frac{1}{4}\ln\left(-\frac{\alpha_7\delta_1-\alpha_9}{\alpha_7\delta_1+\alpha_9}\right)$, и тогда параметр $\alpha_7$ будет равен нулю; либо $\varphi = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\alpha_7\delta_1-\alpha_9}{\alpha_7\delta_1+\alpha_9}\right)$, и тогда параметр $\alpha_9$ будет равен нулю. Если же $\alpha_7 \pm \alpha_9 = 0$, то после замены базиса с $\varphi = \pm\frac{1}{2}\ln(|\alpha_7|)$, параметр $\alpha_7$ становится равным $\pm 1$.

Для решения (c.2), выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\varphi) & \delta_1\,\mathrm{sh}(\varphi) & 0 & -\frac{2\delta_1\alpha_3(\mathrm{sh}(\varphi)-\mathrm{ch}(\varphi))\alpha_6\varepsilon_1}{2\alpha_6\alpha_8\varepsilon_3-1} \\ \mathrm{sh}(\varphi) & \delta_1\,\mathrm{ch}(\varphi) & 0 & \frac{2\delta_1\alpha_3(\mathrm{sh}(\varphi)-\mathrm{ch}(\varphi))\alpha_6\varepsilon_1}{2\alpha_6\alpha_8\varepsilon_3-1} \\ \frac{2\varepsilon_3\delta_1\alpha_3\alpha_6}{1-2\alpha_6\alpha_8\varepsilon_3} & \frac{2\varepsilon_3\alpha_3\alpha_6}{1-2\alpha_6\alpha_8\varepsilon_3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\ln(|\alpha_7|)$, что сделает параметр $\alpha_3$ равным нулю, параметр $\alpha_7$ равным $\pm 1$, а параметр $\delta_1$ равным единице.

Для решения (c.3), выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_1}{\alpha_7-\alpha_9} \\ 0 & \delta_1 & 0 & \frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_1}{\alpha_7-\alpha_9} \\ -\frac{\delta_1\alpha_3}{\alpha_7-\alpha_9} & \frac{\alpha_3}{\alpha_7-\alpha_9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_3$ равным нулю, а параметр $\delta_1$ равным единице.

Для решения (d.1), если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\alpha_5}{\sqrt{-4\alpha_5^2-2\varepsilon_3}}\right)$, что обратит параметр $\alpha_5$ в ноль; если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, то используем $g$-ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sh}(\varphi) & \mathrm{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ \mathrm{ch}(\varphi) & \mathrm{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\pm 2+\sqrt{2}}{\sqrt{4\alpha_5^2-2-2\alpha_5}}\right)$, если $\varepsilon_3 = 1$; либо $\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pm 2+\sqrt{6}}{\sqrt{4\alpha_5^2+2-2\alpha_5}}\right)$, если $\varepsilon_3 = -1$. После данной замены параметр $\alpha_5$ становится равным $\pm 1$.

Для решения (d.2), если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\delta_3\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \delta_3\cos(\varphi) & 0 & B \\ -\sin(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3\delta_3 & -\cos(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \delta_3 & -\frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3\delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} B = {} & 2\alpha_2\varepsilon_3(\sin(\varphi)\delta_3\delta_1 + \cos(\varphi)\delta_3\delta_1 - \cos(\varphi) + \sin(\varphi))/ \\ & /(2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_2 + 4\sin(\varphi)\cos(\varphi)\delta_3\alpha_5 - 4\cos^2(\varphi)\delta_3\alpha_5 + \\ & +2\cos^2(\varphi)\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_2 - 2\delta_3\alpha_6 + 2\delta_3\alpha_5 - \sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_2 - \\ & - \sqrt{-4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_3), \end{aligned}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_2 - \sqrt{-4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_3 - 2\alpha_5\delta_1 - 2\alpha_6\delta_1}{\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\delta_1\delta_2\delta_3\varepsilon_1 + \sqrt{-4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\delta_1\varepsilon_1 + 2\alpha_5\delta_3 - 2\alpha_6\delta_3}\right);$$

если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, то используем $g$-ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\varphi) & \delta_1\,\mathrm{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \delta_1\delta_3\,\mathrm{sh}(\varphi) & \delta_3\,\mathrm{ch}(\varphi) & 0 & B \\ \delta_1\,\mathrm{sh}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \mathrm{ch}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \delta_3 & \frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3\delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} B = {} & 2\alpha_2\varepsilon_3(\mathrm{sh}(\varphi)\delta_1 - \mathrm{sh}(\varphi)\delta_3 - \mathrm{ch}(\varphi)\delta_1 + \delta_3\,\mathrm{ch}(\varphi))/ \\ & /(2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\,\mathrm{ch}(\varphi)\,\mathrm{sh}(\varphi)\varepsilon_1\delta_1\delta_2 + 2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\,\mathrm{ch}^2(\varphi)\varepsilon_1\delta_2\delta_3 + \\ & +4\,\mathrm{ch}(\varphi)\,\mathrm{sh}(\varphi)\delta_1\alpha_5\delta_3 - \varepsilon_1\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\delta_3 + 4\,\mathrm{ch}^2(\varphi)\alpha_5 - \\ & - \sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1 - 2\alpha_5 + 2\alpha_6), \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_3 - 2\alpha_6\delta_1}{\varepsilon_1\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3} + 2\alpha_5\delta_1}\right);$$

либо

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sh}(\varphi) & \delta_1\,\mathrm{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ -\delta_3\delta_1\,\mathrm{ch}(\varphi) & -\delta_3\,\mathrm{sh}(\varphi) & 0 & B \\ -\mathrm{ch}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3/\delta_1 & -\mathrm{sh}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \delta_3 & \frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3\delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} B = {} & -2\alpha_2\varepsilon_3(\delta_1\,\mathrm{ch}(\varphi) + \delta_3\,\mathrm{ch}(\varphi) - \mathrm{sh}(\varphi)\delta_1 - \mathrm{sh}(\varphi)\delta_3)/ \\ & /(2\,\mathrm{ch}(\varphi)^2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_2\delta_1 - 2\,\mathrm{sh}(\varphi)\,\mathrm{ch}(\varphi)\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_3\delta_2 - \\ & -4\,\mathrm{ch}^2(\varphi)\delta_3\alpha_5\delta_1 - \sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_2\delta_1 + \sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_3\delta_1 + \\ & + 4\,\mathrm{sh}(\varphi)\,\mathrm{ch}(\varphi)\alpha_5 + 2\delta_3\alpha_5\delta_1 + 2\delta_3\alpha_6\delta_1), \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{4\alpha_6^2-2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_3 - 2\alpha_6\delta_1}{\varepsilon_1\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2-2\varepsilon_3}+2\alpha_5\delta_1}\right).$$

Вышеприведенные замены обратят параметр $\alpha_2$ в ноль, а параметр $\delta_3$ сделают равным единице.

Таким образом получим следующие метрические алгебры Ли

(a.1)

$$[e_1,e_2] = -\alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2, \quad [e_1,e_3] = \alpha_1 e_3, \quad [e_2,e_3] = \alpha_1 e_3,$$
$$[e_2,e_4] = -\alpha_4 e_1 + \alpha_4 e_2 + \alpha_5 e_3,$$
$$[e_3,e_4] = \alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_3 e_1 - \alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_3 e_2 - \frac{4\alpha_1\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - \alpha_4^2 - 2\varepsilon_3}{2\alpha_4} e_3,$$
$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_4 > 0,$$
$$\alpha_4^2\varepsilon_1 - 4\alpha_1\alpha_5\varepsilon_3 + 2\varepsilon_1\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(a.2)

$$[e_2,e_4] = -\alpha_4 e_1 + \alpha_4 e_2, \quad [e_3,e_4] = \frac{\alpha_4^2 + 2\varepsilon_3}{2\alpha_4} e_3,$$
$$\alpha_4 > 0, \quad \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(b)

$$[e_1,e_2] = \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3,$$
$$[e_1,e_4] = -\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2\varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_1} e_3, \quad [e_3,e_4] = \frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2\varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_2} e_3,$$
$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_2^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.1.1)

$$[e_1,e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1) e_1 + \alpha_8 e_2,$$
$$[e_2,e_4] = -\alpha_8\varepsilon_1\varepsilon_2 e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1) e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6} e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad \alpha_8 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 - 2\alpha_7^2 - \varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.1.2)

$$[e_1,e_4] = \alpha_6\delta_1 e_1 + (\alpha_8 + \alpha_9) e_2,$$
$$[e_2,e_4] = (\alpha_8 - \alpha_9) e_1 + \alpha_6\delta_1 e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6} e_3,$$

$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_8 \neq 0, \quad \alpha_9 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.1.3)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \delta_1\delta_2)e_1 + (\alpha_8 + \delta_3)e_2,$$
$$[e_2, e_4] = (-\alpha_8 + \delta_3)e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \delta_1\delta_2)e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3 + 4)}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 4\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\delta_2 + 4\alpha_6\alpha_8\delta_3 - \delta_2\varepsilon_3 - 4\delta_2 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\delta_3 - 4\alpha_6\alpha_8\delta_2 - \delta_3\varepsilon_3 - 4\delta_3 \neq 0,$$
$$\delta_i = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.2.1)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6 + \delta_2)e_1 + (\alpha_8 - \delta_2)e_2,$$
$$[e_2, e_4] = (\alpha_8 + \delta_2)e_1 + (\alpha_6 - \delta_2)e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 4\alpha_6\alpha_8 - \varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_2 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.2.2)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 - \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2 + \alpha_3 e_3,$$
$$[e_2, e_4] = \frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{\alpha_6}e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2 + \delta_1\alpha_3 e_3,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3.1)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6 + \alpha_7)e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_9 - 2\alpha_7^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2,$$
$$[e_2, e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_9 + 2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$

$$\alpha_6 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\alpha_7 - 2\alpha_7^3 + 4\alpha_7^2\alpha_9 + 2\alpha_7\alpha_9^2 - 4\alpha_9^3 - \alpha_7\varepsilon_3 + 2\alpha_9\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\alpha_9 + 4\alpha_7^3 - 2\alpha_7^2\alpha_9 - 4\alpha_7\alpha_9^2 + 2\alpha_9^3 + 2\alpha_7\varepsilon_3 - \alpha_9\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3.2)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2 + \alpha_3 e_3,$$
$$[e_2, e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2 + \delta_1\alpha_3 e_3,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.1.1)

$$[e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \alpha_6 e_2,$$
$$[e_2, e_4] = -\alpha_6 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$\alpha_4 \neq 0, \quad \alpha_6 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = -1, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.1.2)

$$[e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{4 - 2\varepsilon_3}}{2}e_1 + (\delta_3 + \alpha_6)e_2,$$
$$[e_2, e_4] = (\alpha_6 - \delta_3)e_1 + \frac{\sqrt{4 - 2\varepsilon_3}}{2}e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$\alpha_4 \neq 0, \quad \sqrt{4 - 2\varepsilon_3}\alpha_4 - 4\delta_3\alpha_6 \neq 0, \quad \sqrt{4 - 2\varepsilon_3}\alpha_6 - \alpha_4\delta_3 \neq 0,$$
$$\delta_3 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.2)

$$[e_1, e_4] = -\frac{\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}}{2}e_1 + (\alpha_5\varepsilon_2 + \alpha_6\varepsilon_2)e_2,$$
$$[e_2, e_4] = (\alpha_5\varepsilon_1 - \alpha_6\varepsilon_1)e_1 + \frac{\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}}{2}e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}}{2}e_3,$$
$$-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 > 0, \quad -4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 \geqslant 0,$$

$$8\varepsilon_2\alpha_5\alpha_6+\delta_2\varepsilon_1\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}\neq 0,$$
$$2\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}\alpha_6-\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}\alpha_5\neq 0,$$
$$\delta_2=\pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=\varepsilon_2,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm 1.$$

Для решения (a.1), выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1^2+1}{2\alpha_1} & \frac{\alpha_1^2-1}{2\alpha_1} & 0 & A \\ \frac{\alpha_1^2-1}{2\alpha_1} & \frac{\alpha_1^2+1}{2\alpha_1} & 0 & B \\ -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3(A\alpha_1^2-B\alpha_1^2+A+B)}{2\alpha_1} & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3(A\alpha_1^2-B\alpha_1^2-A-B)}{2\alpha_1} & 1 & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3(A^2-B^2)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$A=-\frac{\alpha_4(4\alpha_1^5\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3-\alpha_1^4\alpha_4^2-4\alpha_1^3\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3+2\alpha_1^2\alpha_4^2-\alpha_4^2)}{4\alpha_1^4(4\alpha_1\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3-\alpha_4^2-2\varepsilon_3)},$$
$$B=-\frac{\alpha_4(4\alpha_1^5\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3-\alpha_1^4\alpha_4^2-4\alpha_1^3\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3-4\alpha_1^4\varepsilon_3+4\alpha_1^2\varepsilon_3+\alpha_4^2)}{4\alpha_1^4(4\alpha_1\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3-\alpha_4^2-2\varepsilon_3)},$$

что сделает параметр $\alpha_1$ равным единице.

Замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha_4\right)\right) & \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha_4\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha_4\right)\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha_4\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит решение (a.2) в решение (c.2.1).

Для решения (c.1.2), если $\varepsilon_1=-1$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\varepsilon_1$ равным единице.

Замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \delta_2\delta_1\delta_3\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\delta_2\delta_1\delta_3\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит решение (c.1.3) в решение (c.1.1).

Для решения (c.1.1) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1\operatorname{sign}(\alpha_8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_8$ положительным, а параметр $\delta_1$ равным единице.

Для решения (c.2.1), если $\varepsilon_1 = -1$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\varepsilon_1$ равным единице.

Для решения (c.2.2) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_3^2+1}{2\alpha_3} & \frac{\delta_1(\alpha_3^2-1)}{2\alpha_3} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_3^2 01}{2\alpha_3} & \frac{\delta_1(\alpha_3^2+1)}{2\alpha_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \operatorname{sign}(\alpha_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \operatorname{sign}(\alpha_6) \end{pmatrix}$$

если $\alpha_3 \neq 0$, что сделает параметры $\alpha_3$ и $\delta_1$ равными единице.

Для решения (c.3.1) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varphi) & \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}(\varphi) & \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\alpha_9-\alpha_7}{\alpha_9+\alpha_7}\right)$, если $\alpha_9^2 > \alpha_7^2$, что сделает параметр $\alpha_7$ равным нулю; либо $\varphi = \frac{1}{4}\ln\left(-\frac{\alpha_9-\alpha_7}{\alpha_9+\alpha_7}\right)$, если $\alpha_9^2 < \alpha_7^2$, что сделает параметр $\alpha_9$ равным нулю.

Замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\alpha_6\alpha_3\varepsilon_1\delta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha_6\alpha_3\delta_1\varepsilon_3 & 0 & 1 & -2\varepsilon_1\alpha_6^2\alpha_3^2\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит решение (c.3.2) в решение (c.2.2).

Замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\alpha_5\varepsilon_1\delta_2}{\sqrt{-4\alpha_5^2+2}}\right)$, переводит решение (d.2) (если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ и $\varepsilon_3 = -1$) в решение (d.1.1).

Для решения (d.1.1), если $\alpha_4 < 0$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_4$ положительным.

Для решения (d.1.2) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \delta_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\delta_3$ равным единице.

Таким образом получим следующие метрические алгебры Ли

(a.1)

$$[e_1,e_2]=-e_1+e_2,\quad [e_1,e_3]=e_3,\quad [e_2,e_3]=e_3,$$
$$[e_2,e_4]=-\alpha_4e_1+\alpha_4e_2+\alpha_5e_3,$$
$$[e_3,e_4]=\varepsilon_1\varepsilon_3e_1-\varepsilon_1\varepsilon_3e_2+\frac{-4\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3+\alpha_4^2+2\varepsilon_3}{2\alpha_4}e_3,$$
$$4\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3-\alpha_4^2-2\varepsilon_3\neq 0,\quad \alpha_4>0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=-\varepsilon_1,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm1.$$

(b)

$$[e_1,e_2]=\alpha_1e_1+\alpha_1e_2+\alpha_2e_3,$$
$$[e_1,e_4]=-\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2\varepsilon_3+2)}{2\alpha_1}e_3,\quad [e_3,e_4]=\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2\varepsilon_3+2)}{2\alpha_2}e_3,$$
$$\alpha_1>0,\quad \alpha_2>0,\quad \alpha_2^2+2\varepsilon_3\neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=-\varepsilon_1,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm1.$$

(c.1.1)

$$[e_1,e_4]=(\alpha_6+\alpha_7)e_1+\alpha_8e_2,\quad [e_2,e_4]=-\alpha_8\varepsilon_1\varepsilon_2e_1+(\alpha_6-\alpha_7)e_2,$$
$$[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_6^2+2\alpha_7^2+\varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6\neq 0,\quad \alpha_8>0,\quad \alpha_7\neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\varepsilon_3+2\alpha_7^2\varepsilon_3+1\neq 0,\quad 2\alpha_6^2-2\alpha_7^2-\varepsilon_3\neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=\varepsilon_2,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm1.$$

(c.1.2)

$$[e_1,e_4]=\alpha_6\delta_1e_1+(\alpha_8+\alpha_9)e_2,\quad [e_2,e_4]=(\alpha_8-\alpha_9)e_1+\alpha_6\delta_1e_2,$$
$$[e_3,e_4]=\frac{\delta_1(2\alpha_6^2-2\alpha_9^2+\varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6\neq 0,\quad \alpha_8\neq 0,\quad \alpha_9\neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\varepsilon_3-2\alpha_9^2\varepsilon_3+1\neq 0,\quad 2\alpha_6^2+2\alpha_9^2-\varepsilon_3\neq 0,$$
$$\delta_1=\pm1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle=1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=-1,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_3=\pm1.$$

(c.2.1)

$$[e_1,e_4]=(\alpha_6+\delta_2)e_1+(\alpha_8-\delta_2)e_2,\quad [e_2,e_4]=(\alpha_8+\delta_2)e_1+(\alpha_6-\delta_2)e_2,$$
$$[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_6^2+\varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$

$$\alpha_6 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 4\alpha_6\alpha_8 - \varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_2 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = 1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3 = \pm 1.$$

(c.2.2.1)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6 + \alpha_7)e_1 - \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2 + e_3,$$
$$[e_2, e_4] = \frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)e_2 + e_3,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.2.2.2)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 - \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6},$$
$$[e_2, e_4] = \frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3.1.1)

$$[e_1, e_4] = \alpha_6 e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_9 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2,$$
$$[e_2, e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_9 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + \alpha_6 e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{2\alpha_6^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_9 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$2\alpha_9^2 - \varepsilon_3 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3.1.2)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6 + \alpha_7)e_1 - \frac{2\alpha_7^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2,$$
$$[e_2, e_4] = -\frac{2\alpha_7^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$

$$2\alpha_6^2 - 2\alpha_7^2 - \varepsilon_3 \neq 0, \quad 2\alpha_7^2 + \varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3.1.3)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6 + \alpha_7)e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_7\delta_2 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2,$$
$$[e_2, e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_7\delta_2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2 + 2\delta_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\delta_2 - \delta_2\varepsilon_3 + 2\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_2 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.1.1)

$$[e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \alpha_6 e_2, \quad [e_2, e_4] = -\alpha_6 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$\alpha_4 > 0,$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = -1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1.$$

(d.1.2)

$$[e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{4 - 2\varepsilon_3}}{2}e_1 + (1 + \alpha_6)e_2,$$
$$[e_2, e_4] = (\alpha_6 - 1)e_1 + \frac{\sqrt{4 - 2\varepsilon_3}}{2}e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$\alpha_4 \neq 0, \quad \sqrt{4 - 2\varepsilon_3}\alpha_4 - 4\alpha_6 \neq 0, \quad \sqrt{4 - 2\varepsilon_3}\alpha_6 - \alpha_4 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.2)

$$[e_1, e_4] = -\frac{\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}}{2}e_1 + (-\alpha_5\varepsilon_1 - \alpha_6\varepsilon_1)e_2,$$
$$[e_2, e_4] = (\alpha_5\varepsilon_1 - \alpha_6\varepsilon_1)e_1 + \frac{\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}}{2}e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{\sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}}{2}e_3,$$
$$4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3 > 0, \quad 4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3 \geqslant 0,$$
$$2\alpha_6\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3} - \sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\alpha_5 \neq 0,$$
$$\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3} - 8\alpha_5\alpha_6 \neq 0,$$
$$\delta_2 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Для решения (c.2.2.2) замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & \delta_1 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & \delta_1 \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_1 = 1$, либо с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & \delta_1 \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & \delta_1 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_1 = -1$ переводит данную метрическую алгебру Ли в решение (c.2.1).

При $\varepsilon_1 = 1$ решение (c.3.1.1) совпадает с решением (c.1.2) с точностью до переобозначения параметра $\alpha_8$; при $\varepsilon_1 = -1$ замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит решение (c.3.1.1) в решение (c.1.2).

Отметим, что решение (c.3.1.2) совпадает с решением (c.1.1) при $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ с точностью до переобозначения параметра $\alpha_7$.

Для решения (c.3.1.3) замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & -\delta_2 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & -\delta_2 \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_1 = 1$, либо с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & -\delta_2 \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & -\delta_2 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_1 = -1$ переводит данную метрическую алгебру Ли в решение (c.2.1).

Для решения (d.2) замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sign}(A)\,\delta_2 \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|A|\right)\right) & \operatorname{sign}(A) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|A|\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sign}(A)\,\delta_2 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|A|\right)\right) & \operatorname{sign}(A) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|A|\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sign}(A)\,\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sign}(A)\,\delta_2 \end{pmatrix}$$

где $A = \frac{\sqrt{4-2\varepsilon_3}-2}{2\alpha_5\varepsilon_1+\sqrt{4\alpha_5^2-2\varepsilon_3}}$, переводит данную метрическую алгебру Ли в решение (d.1.2).

Для решения (c.1.1), если $\alpha_7 < 0$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_2 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_7$ положительным. Далее, если $\alpha_6 < 0$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_6$ положительным.

Для решения (c.1.2) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sign}(\alpha_6)\,\mathrm{sign}(\alpha_9)\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{sign}(\alpha_6)\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{sign}(\alpha_6)\delta_1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметры $\alpha_6$ и $\alpha_9$ положительными, а параметр $\delta_1$ равным единице.

Для решения (c.2.1) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\delta_2$ равным единице.

Для решения (c.2.2.1), если $\varepsilon_1 = -1$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\varepsilon_1$ равным единице. После этого выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{sign}(\alpha_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{sign}(\alpha_6) \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_6$ положительным.

Для решения (d.1.1) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sign}(\alpha_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_6$ неотрицательным.

Для решения (d.1.2), если $\varepsilon_1 = -1$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\varepsilon_1$ равным единице. После этого, если $\varepsilon_3 = -1$, то выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right) & -\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right) & -\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_6$ неотрицательным; если $\varepsilon_3 = 1$, то используем $g$-ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(5-2\sqrt{6}\right)\right) & -\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(5-2\sqrt{6}\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(5-2\sqrt{6}\right)\right) & -\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(5-2\sqrt{6}\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_4$ положительным. □

**Теорема 5.** *Пусть $(G, g)$ — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{111\bar{1}\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы $G$ содержится в таблице 2.*

$$[e_1, e_3] = -\sqrt{3}\alpha_1 e_3 + \alpha_1 e_4, \quad [e_1, e_4] = \alpha_1 e_3 + \sqrt{3}\alpha_1 e_4, \quad [e_3, e_4] = 2\varepsilon_1\varepsilon_3\alpha_1 e_1,$$
$$\alpha_1 > 0,$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_3\rangle = -\langle e_4, e_4\rangle = 1, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

*Доказательство.* Пусть оператор Риччи имеет тип Сегре $\{111\bar{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\alpha & \varepsilon_3\beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\beta & -\varepsilon_3\alpha \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1, \rho_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $\rho_1 \neq \rho_2$ и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет вид

$$2C_{34}^3\beta\varepsilon_3 = 0, \quad 2C_{34}^4\beta\varepsilon_3 = 0,$$
$$C_{12}^1\varepsilon_1(\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad C_{12}^2\varepsilon_2(\rho_1 - \rho_2) = 0,$$
$$((\rho_1 - \alpha)C_{13}^1 + \beta C_{14}^1)\varepsilon_1 = 0, \quad ((\alpha - \rho_1)C_{14}^1 + \beta C_{13}^1)\varepsilon_1 = 0,$$
$$((\rho_2 - \alpha)C_{23}^2 + \beta C_{24}^2)\varepsilon_2 = 0, \quad ((\alpha - \rho_2)C_{24}^2 + \beta C_{23}^2)\varepsilon_2 = 0,$$
$$C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1 - \alpha) - \beta\varepsilon_3(C_{13}^3 - C_{14}^4) = 0, \quad C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_2 - \alpha) - \beta\varepsilon_3(C_{23}^3 - C_{24}^4) = 0,$$
$$((3C_{13}^4 + C_{14}^3)\beta - 2(\rho_1 - \alpha)C_{13}^3)\varepsilon_3 + \beta C_{34}^1\varepsilon_1 = 0,$$

$$
\begin{gathered}
((3C_{23}^4 + C_{24}^3)\beta - 2(\rho_2 - \alpha)C_{23}^3)\varepsilon_3 + \beta C_{34}^2\varepsilon_2 = 0,\\
((C_{13}^4 + 3C_{14}^3)\beta + 2C_{14}^4(\rho_1 - \alpha))\varepsilon_3 + \beta C_{34}^1\varepsilon_1 = 0,\\
((C_{23}^4 + 3C_{24}^3)\beta + 2C_{24}^4(\rho_2 - \alpha))\varepsilon_3 + \beta C_{34}^2\varepsilon_2 = 0,\\
((2\alpha - \rho_1 - \rho_2)C_{12}^3 + 2\beta C_{12}^4)\varepsilon_3 - (\rho_1 - \rho_2)(C_{13}^2\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1) = 0,\\
((\rho_1 + \rho_2 - 2\alpha)C_{12}^4 + 2\beta C_{12}^3)\varepsilon_3 - (\rho_1 - \rho_2)(C_{14}^2\varepsilon_2 + C_{24}^1\varepsilon_1) = 0,\\
((C_{14}^3 - C_{13}^4)\alpha + (C_{13}^4 - C_{14}^3)\rho_1 + 2\beta C_{14}^4)\varepsilon_3 + C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1 - \alpha) = 0,\\
((C_{24}^3 - C_{23}^4)\alpha + (C_{23}^4 - C_{24}^3)\rho_2 + 2\beta C_{24}^4)\varepsilon_3 + C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_2 - \alpha) = 0,\\
((C_{14}^3 - C_{13}^4)\alpha + (C_{13}^4 - C_{14}^3)\rho_1 + 2\beta C_{13}^3)\varepsilon_3 - C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1 - \alpha) = 0,\\
((C_{24}^3 - C_{23}^4)\alpha + (C_{23}^4 - C_{24}^3)\rho_2 + 2\beta C_{23}^3)\varepsilon_3 - C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_2 - \alpha) = 0,\\
((2\rho_1 - \rho_2 - \alpha)C_{23}^1 + \beta C_{24}^1)\varepsilon_1 + (\rho_2 C_{13}^2 - \alpha C_{13}^2 + \beta C_{14}^2)\varepsilon_2 -\\
- (\alpha C_{12}^3 + \beta C_{12}^4 - \rho_2 C_{12}^3)\varepsilon_3 = 0,\\
((2\rho_1 - \rho_2 - \alpha)C_{24}^1 - \beta C_{23}^1)\varepsilon_1 + (\rho_2 C_{14}^2 - \alpha C_{14}^2 - \beta C_{13}^2)\varepsilon_2 +\\
+ (\alpha C_{12}^4 - \beta C_{12}^3 - \rho_2 C_{12}^4)\varepsilon_3 = 0,\\
((2\rho_2 - \rho_1 - \alpha)C_{13}^2 + \beta C_{14}^2)\varepsilon_2 + (\rho_1 C_{23}^1 - \alpha C_{23}^1 + \beta C_{24}^1)\varepsilon_1 +\\
+ (\alpha C_{12}^3 + \beta C_{12}^4 - \rho_1 C_{12}^3)\varepsilon_3 = 0,\\
((2\rho_2 - \rho_1 - \alpha)C_{14}^2 - \beta C_{13}^2)\varepsilon_2 + (\rho_1 C_{24}^1 - \alpha C_{24}^1 - \beta C_{23}^1)\varepsilon_1 -\\
- (\alpha C_{12}^4 - \beta C_{12}^3 - \rho_1 C_{12}^4)\varepsilon_3 = 0.
\end{gathered}
$$

Решая данную систему уравнений, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получим две метрические алгебры Ли:

$$
\begin{gathered}
[e_2, e_3] = -\sqrt{3}\delta_1\alpha_1 e_3 + \alpha_1 e_4, \quad [e_2, e_4] = \alpha_1 e_3 + \sqrt{3}\delta_1\alpha_1 e_4,\\
[e_3, e_4] = 2\varepsilon_2\varepsilon_3\alpha_1 e_2,\\
\alpha_1 \neq 0, \quad \delta_1 = \pm 1;\\
\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_3\rangle = -\langle e_4, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{gathered}
$$

и

$$
\begin{gathered}
[e_1, e_3] = -\sqrt{3}\delta_1\alpha_1 e_3 + \alpha_1 e_4, \quad [e_1, e_4] = \alpha_1 e_3 + \sqrt{3}\delta_1\alpha_1 e_4,\\
[e_3, e_4] = 2\varepsilon_1\varepsilon_3\alpha_1 e_1,\\
\alpha_1 \neq 0, \quad \delta_1 = \pm 1;\\
\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_3\rangle = -\langle e_4, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{gathered}
$$

Отметим, что замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

переводит первое решение во второе.

Для второго решения, если $\varepsilon_3 = -1$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\varepsilon_3$ равным единице. Далее, замена базиса с $g$-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sign}(\alpha_1)\delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

делает параметр $\alpha_1$ положительным, а параметр $\delta_1$ равным единице. □

**Теорема 6.** *Пусть $(G, g)$ — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{(22)\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы $G$ содержится в таблице 2.*

*Доказательство.* Пусть оператор Риччи $\rho$ имеет тип Сегре $\{(22)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор $g$ и тензор Риччи $r$ имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет вид

$$\begin{gathered} C_{12}^2\varepsilon_1 = 0, \quad C_{13}^2\varepsilon_1 = 0, \\ C_{13}^4\varepsilon_2 = 0, \quad C_{34}^4\varepsilon_2 = 0, \\ C_{23}^4\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1 = 0, \quad C_{12}^4\varepsilon_2 + C_{14}^2\varepsilon_1 = 0, \\ (C_{13}^1 + C_{23}^2)\varepsilon_1 + C_{12}^4\varepsilon_2 = 0, \quad (C_{13}^3 + C_{14}^4)\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1 = 0, \\ (3C_{23}^2 - C_{13}^1)\varepsilon_1 - C_{12}^4\varepsilon_2 = 0, \quad (3C_{14}^4 - C_{13}^3)\varepsilon_2 + C_{34}^2\varepsilon_1 = 0, \\ (2C_{14}^2 - C_{13}^1 - C_{23}^2)\varepsilon_1 + C_{12}^4\varepsilon_2 = 0, \\ (2C_{23}^4 - C_{13}^3 - C_{14}^4)\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1 = 0, \\ (3C_{24}^2 - 2C_{23}^1 - C_{14}^1)\varepsilon_1 - C_{12}^3\varepsilon_2 = 0, \\ (3C_{24}^4 - 2C_{14}^3 - C_{23}^3)\varepsilon_2 + C_{34}^1\varepsilon_1 = 0. \end{gathered}$$

Решая данную систему уравнений, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получим следующие метрические алгебры Ли:

(a)

$$[e_1, e_2] = \frac{2\alpha_1^2\alpha_2 - 2\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - 4\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\alpha_2^2\alpha_5 + 2\alpha_5^3 + \alpha_5\varepsilon_1}{2\alpha_5(\alpha_2 - \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}e_1 - \frac{\alpha_2\alpha_1}{\alpha_5}e_3,$$

$$[e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + (\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_2)e_3,$$

$$[e_1,e_4]=\frac{\alpha_1(\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_5)}{\alpha_5}e_1+\alpha_2e_3,$$
$$[e_2,e_4]=\alpha_3e_1+\alpha_4e_3,$$
$$[e_3,e_4]=\alpha_5e_1+$$
$$+\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\alpha_1^2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\alpha_2\alpha_5^3\varepsilon_1\varepsilon_2-4\alpha_1^2\alpha_2\alpha_5-2\alpha_2^2\alpha_5^2+\alpha_5^2\varepsilon_1}{2\alpha_5\alpha_1(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}e_3,$$
$$\alpha_1\neq 0,\quad \alpha_5\neq 0,$$
$$\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2\neq 0,$$
$$2\alpha_1^3\alpha_2\alpha_4\varepsilon_2-2\alpha_1^3\alpha_4\alpha_5\varepsilon_1+2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_5\varepsilon_1-2\alpha_1^2\alpha_3\alpha_5^2\varepsilon_2+2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_4\alpha_5\varepsilon_2-$$
$$-2\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5^2\varepsilon_1+2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_5^2\varepsilon_1-2\alpha_2\alpha_3\alpha_5^3\varepsilon_2+\alpha_1\alpha_4\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_3\alpha_5^2\neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle=\varepsilon_1,\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_2,\quad \varepsilon_i=\pm 1.$$

(b)

$$[e_1,e_2]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_1,\quad [e_2,e_3]=-\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_3,$$
$$[e_1,e_4]=\alpha_1e_3,\quad [e_2,e_4]=\alpha_2e_1+\alpha_3e_3,$$
$$[e_3,e_4]=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_1^2-\varepsilon_1)}{2\alpha_1}e_1+\alpha_4e_3,$$
$$\alpha_1\neq 0,\quad \alpha_2\alpha_4\varepsilon_1-2\alpha_1\alpha_3\varepsilon_2\neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle=\varepsilon_1,\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_2,\quad \varepsilon_i=\pm 1.$$

(c)

$$[e_1,e_2]=\frac{(2\alpha_2^2+\varepsilon_1)}{2\alpha_2}e_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_1e_3,$$
$$[e_2,e_3]=-2\alpha_2e_3,\quad [e_1,e_4]=\alpha_1e_1+\alpha_2e_3,$$
$$[e_2,e_4]=\alpha_3e_1+\alpha_4e_3,\quad [e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2-2\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2}{2\alpha_1}e_3,$$
$$\alpha_1\neq 0,\quad \alpha_2\neq 0,$$
$$2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_4+2\alpha_2^3\alpha_3+\alpha_1\alpha_4\varepsilon_1-\alpha_2\alpha_3\varepsilon_1\neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle=\varepsilon_1,\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_2,\quad \varepsilon_i=\pm 1.$$

(d)

$$[e_1,e_2]=\delta_1\sqrt{2}e_1,\quad [e_2,e_3]=-\delta_1\sqrt{2}e_3,\quad [e_1,e_4]=\frac{\delta_1\sqrt{2}}{2}e_3,$$
$$[e_2,e_4]=\alpha_1e_1+\alpha_2e_3,\quad [e_3,e_4]=\alpha_3e_3,$$
$$\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\delta_1\varepsilon_2\sqrt{2}\neq 0,$$
$$\delta_1=\pm 1,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle=1,\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_2,\quad \varepsilon_2=\pm 1.$$

(e)

$$[e_1,e_2]=\alpha_1e_1-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_2^2-\varepsilon_2)}{2\alpha_2}e_3,\quad [e_2,e_3]=\alpha_2e_1,$$

$$[e_1, e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_1, \quad [e_2, e_4] = \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_3,$$
$$[e_3, e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_3,$$
$$\alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_1\alpha_4\varepsilon_2 + 2\alpha_2\alpha_3\varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(f)

$$[e_1, e_2] = \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_1, \quad [e_2, e_3] = -\frac{2\alpha_1^2 + 3\varepsilon_1}{4\alpha_1} e_3,$$
$$[e_1, e_4] = \alpha_1 e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_3 + \frac{2\alpha_1^2 - \varepsilon_1}{4\alpha_1} e_4,$$
$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \quad 2\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Далее, замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

переводит решение (b) в решение (e).

Кроме того, замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

переводит решение (d) в решение (e).

Для решения (a), если $\alpha_1^2 \neq \frac{\alpha_5(2\alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{2(\alpha_2 - \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -A\varepsilon_1\varepsilon_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$A = \frac{2\alpha_3\alpha_5(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_2)}{(2\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_2^2\alpha_5 - 2\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \alpha_5\varepsilon_1)},$$

что сделает параметр $\alpha_3$ равным нулю; если $\alpha_1^2 = \frac{\alpha_5(2\alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{2(\alpha_2 - \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -A\varepsilon_1\varepsilon_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$A = \frac{\alpha_4\varepsilon_2\delta_1\sqrt{2\alpha_5(4\alpha_2^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_2^3 - 2\alpha_2\alpha_5^2 - \alpha_2\varepsilon_1 + \alpha_5\varepsilon_2)}}{2\alpha_5},$$

что сделает параметр $\alpha_4$ равным нулю.

Для решения (c), если $2\alpha_2^2-\varepsilon_1\neq 0$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2\alpha_1\alpha_4}{2\alpha_2^2-\varepsilon_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\alpha_4\alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\alpha_2^2-\varepsilon_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_4$ равным нулю; если $2\alpha_2^2-\varepsilon_1=0$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_3\varepsilon_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_3$ равным нулю.

Для решения (e) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha_4\varepsilon_2\varepsilon_1}{2\alpha_2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_4}{2\alpha_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_4$ равным нулю.

Для решения (f), если $6\alpha_1^2+\varepsilon_1\neq 0$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4\alpha_2\alpha_1}{6\alpha_1^2+\varepsilon_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\alpha_2\alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_2}{6\alpha_1^2+\varepsilon_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_2$ равным нулю.

Таким образом, получим следующие метрические алгебры Ли:

(a.1)

$$[e_1,e_2]=\frac{2\alpha_1^2\alpha_2+2\alpha_2^2\alpha_5+2\alpha_5^3-2\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-4\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2+\alpha_5\varepsilon_1}{2\alpha_5(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}e_1-\frac{\alpha_2\alpha_1}{\alpha_5}e_3,$$
$$[e_2,e_3]=\alpha_1e_1+(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_2)e_3,$$
$$[e_1,e_4]=\frac{\alpha_1(\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_5)}{\alpha_5}e_1+\alpha_2e_3,\quad [e_2,e_4]=\alpha_4e_3,$$
$$[e_3,e_4]=\alpha_5e_1+$$
$$+\frac{(2\alpha_1^2\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\alpha_1^2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\alpha_2\alpha_5^3\varepsilon_1\varepsilon_2-4\alpha_1^2\alpha_2\alpha_5-2\alpha_2^2\alpha_5^2+\alpha_5^2\varepsilon_1)}{2\alpha_5(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)\alpha_1}e_3,$$
$$\alpha_1\neq 0,\quad \alpha_4\neq 0,\quad \alpha_5\neq 0,$$
$$\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2\neq 0,$$
$$2\alpha_1^2\alpha_2\varepsilon_2-2\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1+2\alpha_2^2\alpha_5\varepsilon_2-2\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_1+\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2\neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle=\varepsilon_1,\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_2,\quad \varepsilon_i=\pm 1.$$

(a.2)

$$[e_1,e_2]=-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2e_1+\alpha_2\delta_1\sqrt{\frac{2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1}{2\alpha_5(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_2)}}e_3,$$
$$[e_2,e_3]=-\delta_1\sqrt{\frac{\alpha_5(2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1)}{2(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_2)}}e_1+(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_2)e_3,$$
$$[e_1,e_4]=\delta_1(2\alpha_5-\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2)\sqrt{\frac{2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1}{2\alpha_5(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_2)}}e_1+\alpha_2e_3,$$
$$[e_2,e_4]=\alpha_3e_1,$$
$$[e_3,e_4]=\alpha_5e_1+\frac{\delta_1(2\alpha_2^3\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_2^2\alpha_5+\alpha_2\varepsilon_2-2\alpha_5\varepsilon_1)}{\sqrt{2\alpha_5(2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1)(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_2)}}e_3,$$
$$\alpha_3\neq0,\quad \alpha_5\neq0,\quad \alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2\neq0,$$
$$\alpha_5(4\alpha_2^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_2^3-2\alpha_2\alpha_5^2-\alpha_2\varepsilon_1+\alpha_5\varepsilon_2)>0,$$
$$\delta_1=\pm1,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle=\varepsilon_1,\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_2,\quad \varepsilon_i=\pm1.$$

(c.1)

$$[e_1,e_2]=\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_1}{2\alpha_2}e_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_1e_3,\quad [e_2,e_3]=-2\alpha_2e_3,$$
$$[e_1,e_4]=\alpha_1e_1+\alpha_2e_3,\quad [e_2,e_4]=\alpha_3e_1,$$
$$[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2-2\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2}{2\alpha_1}e_3,$$
$$\alpha_1\neq0,\quad \alpha_2\neq0,\quad \alpha_3\neq0,$$
$$2\alpha_2^2-\varepsilon_1\neq0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle=\varepsilon_1,\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_2,\quad \varepsilon_i=\pm1.$$

(c.2)

$$[e_1,e_2]=\sqrt{2}\delta_1e_1-\varepsilon_2\alpha_1e_3,\quad [e_2,e_3]=-\sqrt{2}\delta_1e_3,$$
$$[e_1,e_4]=\alpha_1e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\delta_1e_3,\quad [e_2,e_4]=\alpha_4e_3,$$
$$[e_3,e_4]=\alpha_1e_3,$$
$$\alpha_4\neq0,$$
$$\delta_1=\pm1,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle=1,\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_2,\quad \varepsilon_2=\pm1.$$

(e)

$$[e_1,e_2]=\alpha_1e_1-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_2^2-\varepsilon_2)}{2\alpha_2}e_3,$$
$$[e_2,e_3]=\alpha_2e_1,\quad [e_1,e_4]=-\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_1,$$
$$[e_2,e_4]=\alpha_3e_1,\quad [e_3,e_4]=-\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_3,$$

$$\alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_2 \rangle = \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(f.1)

$$[e_1, e_2] = \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_1, \quad [e_2, e_3] = -\frac{(2\alpha_1^2 + 3\varepsilon_1}{4\alpha_1} e_3,$$
$$[e_1, e_4] = \alpha_1 e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_3 e_3 + \frac{(2\alpha_1^2 - \varepsilon_1)}{4\alpha_1} e_4,$$
$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0,$$
$$6\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0, \quad 2\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_2 \rangle = \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(f.2)

$$[e_1, e_2] = -\frac{\sqrt{6}}{3} \delta_1 e_1, \quad [e_2, e_3] = \frac{2\sqrt{6}}{3} \delta_1 e_3,$$
$$[e_1, e_4] = \frac{\sqrt{6}}{6} \delta_1 e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_3 + \frac{\sqrt{6}}{3} \delta_1 e_4,$$
$$\alpha_3 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1,$$
$$\langle e_1, e_2 \rangle = -1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \pm 1.$$

Для решения (a.1), если $\alpha_1^2\varepsilon_1 + \alpha_5^2\varepsilon_2 \neq 0$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & \frac{\alpha_4\varepsilon_1\alpha_1(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_2)\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\alpha_5\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\alpha_4\varepsilon_2\alpha_1^2(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)\delta_8}{\alpha_5\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} \\ 0 & \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & 0 & -\frac{\alpha_5\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} \\ \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_5\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & \frac{\alpha_4\varepsilon_1\alpha_1^2(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)\delta_8}{\alpha_5\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\alpha_4\varepsilon_1\alpha_1(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} \\ 0 & \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_5\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & 0 & \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} \end{pmatrix}$$

где $\delta_8 = \pm 1$, что переводит решение (a.1) в решение (e).

Для решения (a.2), если $2\alpha_2^2\varepsilon_2 - 4\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1 + 2\alpha_5^2\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \neq 0$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta_8}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} & A\varepsilon_1\varepsilon_2 F\delta_1\sqrt{2} & -\frac{\delta_8\delta_1 F\sqrt{2}}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} & A \\ 0 & \frac{\delta_8}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} & 0 & -\frac{\delta_8\delta_1 F\sqrt{2}}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} \\ \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_8\delta_1 F\sqrt{2}}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} & -A\varepsilon_1\varepsilon_2 & \frac{\delta_8}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} & A\varepsilon_1\varepsilon_2 F\delta_1\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_8\delta_1 F\sqrt{2}}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} & 0 & \frac{\delta_8}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} \end{pmatrix}$$

где $A = \frac{\varepsilon_1\delta_8 F^2(2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1)\alpha_3}{\alpha_5\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}}$, $F = \frac{\sqrt{\alpha_5(4\alpha_2^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_2^3-2\alpha_2\alpha_5^2-\alpha_2\varepsilon_1+\alpha_5\varepsilon_2)}}{2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1}$ и $\delta_8 = \pm 1$, что переводит решение (a.2) в решение (e).

Для решения (c.1), если $\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2\neq 0$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\alpha_2^2\alpha_3\delta_8\varepsilon_1}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_2\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\varepsilon_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} \\ 0 & \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & 0 & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_2\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} \\ \frac{\alpha_2\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\delta_8\varepsilon_2}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\alpha_2^2\alpha_3\delta_8\varepsilon_1}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} \\ 0 & \frac{\alpha_2\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & 0 & \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} \end{pmatrix}$$

где $\delta_8=\pm1$, что переводит решение (c.1) в решение (e).

Для решения (c.2), если $2\alpha_1^2+\varepsilon_2\neq 0$, замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon_2\alpha_1\delta_6\sqrt{2}\delta_1}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & \frac{\alpha_1\alpha_4\delta_6\varepsilon_2}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & \frac{\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & \frac{\alpha_1^2\alpha_4\delta_6\sqrt{2}\delta_1\varepsilon_2}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} \\ 0 & -\frac{\varepsilon_2\alpha_1\delta_6\sqrt{2}\delta_1}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & 0 & \frac{\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} \\ \frac{\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & \frac{\alpha_1^2\alpha_4\delta_6\sqrt{2}\delta_1\varepsilon_2}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & \frac{\alpha_1\sqrt{2}\delta_1\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & -\frac{\alpha_1\alpha_4\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} \\ 0 & \frac{\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & 0 & \frac{\alpha_1\sqrt{2}\delta_1\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} \end{pmatrix}$$

где $\delta_6=\pm1$, переводит решение (c.2) в решение (e).

Для решения (f.1), если $2\alpha_1^2-\varepsilon_1=0$, выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

что переводит решение (f.1) в решение (e).

Для решения (e) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_1$ неотрицательным, а параметр $\alpha_2$ положительным.

Для решения (f.2) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_2$ неотрицательным, а параметр $\delta_1$ равным единице.

Таким образом, получим следующие метрические алгебры Ли:

(a.1)

$$\begin{gathered} [e_1,e_2]=\frac{12\alpha_6^2+4\alpha_6\alpha_7+\varepsilon_1}{4\alpha_6}e_1+(\alpha_7\delta_1-\alpha_6\delta_1)e_3, \\ [e_2,e_3]=(\alpha_6\delta_1+\alpha_7\delta_1)e_1+(\alpha_7-3\alpha_6)e_3, \\ [e_1,e_4]=-(3\alpha_6\delta_1+\alpha_7\delta_1)e_1+(\alpha_6-\alpha_7)e_3, \end{gathered}$$

$$[e_2, e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$[e_3, e_4] = (\alpha_6 + \alpha_7)e_1 - \frac{(12\alpha_6^2 - 4\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_1)\delta_1}{4\alpha_6} e_3,$$
$$\alpha_4 \neq 0, \quad \alpha_6 \neq 0, \quad 8\alpha_6^2 + \varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1,$$
$$\langle e_1, e_2 \rangle = \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1.$$

(a.2)

$$[e_1, e_2] = \alpha_5 e_1 + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha_5 \delta_2 \right) \delta_1 e_3,$$
$$[e_2, e_3] = -\delta_1 \alpha_5 \delta_2 e_1 + (\alpha_5 - \delta_2 \sqrt{2}) e_3,$$
$$[e_1, e_4] = \left( \alpha_5 \delta_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \delta_1 e_1 + \left( \frac{\delta_2 \sqrt{2}}{2} - \alpha_5 \right) e_3,$$
$$[e_2, e_4] = \alpha_3 e_1, \quad [e_3, e_4] = \alpha_5 e_1 + \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} - \alpha_5 \delta_2 \right) \delta_1 e_3,$$
$$\alpha_3 \neq 0,$$
$$\delta_i = \pm 1,$$
$$\langle e_1, e_2 \rangle = -1, \langle e_3, e_4 \rangle = 1.$$

(c.1)

$$[e_1, e_2] = \frac{\delta_1(2\alpha_1^2 + \varepsilon_1)}{2\alpha_1} e_1 + \alpha_1 e_3,$$
$$[e_2, e_3] = -2\alpha_1 \delta_1 e_3, \quad [e_1, e_4] = \alpha_1 \delta_1 e_3 + \alpha_1 e_1,$$
$$[e_2, e_4] = \alpha_3 e_1, \quad [e_3, e_4] = \frac{(4\alpha_1^2 - \varepsilon_1)}{2\alpha_1} e_3,$$
$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \quad 2\alpha_2^2 - \varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1,$$
$$\langle e_1, e_2 \rangle = \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1.$$

(c.2)

$$[e_1, e_2] = \sqrt{2}\delta_1 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_2 e_3, \quad [e_2, e_3] = -\sqrt{2}\delta_1 e_3,$$
$$[e_1, e_4] = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_2 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_1 e_3,$$
$$[e_2, e_4] = \alpha_4 e_3, \quad [e_3, e_4] = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_2 e_3,$$
$$\alpha_4 \neq 0,$$
$$\delta_i = \pm 1,$$
$$\langle e_1, e_2 \rangle = 1, \langle e_3, e_4 \rangle = -1.$$

(e)

$$\begin{gathered}
[e_1, e_2] = \alpha_1 e_1 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_2^2 - \varepsilon_2)}{2\alpha_2} e_3, \\
[e_2, e_3] = \alpha_2 e_1, \quad [e_1, e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_1, \\
[e_2, e_4] = \alpha_3 e_1, \quad [e_3, e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_3, \\
\alpha_1 \geqslant 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \\
\langle e_1, e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{gathered}$$

(f.1)

$$\begin{gathered}
[e_1, e_2] = \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_1, \quad [e_2, e_3] = -\frac{2\alpha_1^2 + 3\varepsilon_1}{4\alpha_1} e_3, \\
[e_1, e_4] = \alpha_1 e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_3 e_3 + \frac{2\alpha_1^2 - \varepsilon_1}{4\alpha_1} e_4, \\
\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \\
6\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0, \quad 2\alpha_1^2 - \varepsilon_1 \neq 0, \quad 2\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0, \\
\langle e_1, e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{gathered}$$

(f.2)

$$\begin{gathered}
[e_1, e_2] = -\frac{\sqrt{6}}{3} e_1, \quad [e_2, e_3] = \frac{2\sqrt{6}}{3} e_3, \\
[e_1, e_4] = \frac{\sqrt{6}}{6} e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_3 + \frac{\sqrt{6}}{3} e_4, \\
\alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \\
\langle e_1, e_2\rangle = -1, \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \pm 1.
\end{gathered}$$

Далее, замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}
-\frac{\delta_1\sqrt{2}(8\alpha_6^2-\varepsilon_1)}{8\alpha_6} & \frac{\delta_1\varepsilon_1\sqrt{2}\alpha_4(64\alpha_6^4-1)}{64\alpha_6^2} & \frac{\sqrt{2}(8\alpha_6^2+\varepsilon_1)}{8\alpha_6} & -\frac{\varepsilon_1\sqrt{2}\alpha_4(8\alpha_6^2-\varepsilon_1)^2}{64\alpha_6^2} \\
0 & -\frac{\delta_1\sqrt{2}(8\alpha_6^2-\varepsilon_1)}{8\alpha_6} & 0 & \frac{\sqrt{2}(8\alpha_6^2+\varepsilon_1)}{8\alpha_6} \\
\frac{\sqrt{2}(8\alpha_6^2+\varepsilon_1)}{8\alpha_6} & -\frac{\varepsilon_1\sqrt{2}\alpha_4(8\alpha_6^2-\varepsilon_1)^2}{64\alpha_6^2} & -\frac{\delta_1\sqrt{2}(8\alpha_6^2-\varepsilon_1)}{8\alpha_6} & \frac{\delta_1\varepsilon_1\sqrt{2}\alpha_4(64\alpha_6^4-1)}{64\alpha_6^2} \\
0 & \frac{\sqrt{2}(8\alpha_6^2+\varepsilon_1)}{8\alpha_6} & 0 & -\frac{\delta_1\sqrt{2}(8\alpha_6^2-\varepsilon_1)}{8\alpha_6}
\end{pmatrix}$$

переводит решение (a.1) в решение (a.2).

Замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}
\frac{(2\alpha_1^2-\varepsilon_1)\sqrt{2}}{4\alpha_1} & -\frac{\varepsilon_1\sqrt{2}\alpha_3(2\alpha_1^2+\varepsilon_1)^2}{16\alpha_1^2} & \frac{\sqrt{2}\delta_1(2\alpha_1^2+\varepsilon_1)}{4\alpha_1} & -\frac{(4\alpha_1^4-1)\alpha_3\sqrt{2}\varepsilon_1\delta_1}{16\alpha_1^2} \\
0 & \frac{(2\alpha_1^2-\varepsilon_1)\sqrt{2}}{4\alpha_1} & 0 & \frac{\sqrt{2}\delta_1(2\alpha_1^2+\varepsilon_1)}{4\alpha_1} \\
\frac{\sqrt{2}\delta_1(2\alpha_1^2+\varepsilon_1)}{4\alpha_1} & -\frac{(4\alpha_1^4-1)\alpha_3\sqrt{2}\varepsilon_1\delta_1}{16\alpha_1^2} & \frac{(2\alpha_1^2-\varepsilon_1)\sqrt{2}}{4\alpha_1} & -\frac{\varepsilon_1\sqrt{2}\alpha_3(2\alpha_1^2+\varepsilon_1)^2}{16\alpha_1^2} \\
0 & \frac{\sqrt{2}\delta_1(2\alpha_1^2+\varepsilon_1)}{4\alpha_1} & 0 & \frac{(2\alpha_1^2-\varepsilon_1)\sqrt{2}}{4\alpha_1}
\end{pmatrix}$$

переводит решение (c.1) в решение (a.2).

Замена базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

переводит решение (c.2) в решение (a.2).

Для решения (a.2) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметры $\delta_1$ и $\delta_2$ равными единице.

Для решения (f.1) выполним замену базиса с $g$-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр $\alpha_1$ положительным. □

Все метрические алгебры Ли, полученные в теоремах 2–6 приведены в таблице 2. В ней используются обозначения $\varepsilon_i = \pm 1$, $\delta_1 = \pm 1$. Отдельным списком приведем метрических тензор для каждой алгебры Ли. Для метрических алгебр Ли (A), (B), (E) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрических алгебр Ли (C), (D) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрических алгебр Ли (F), (G), (H) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (I) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Таблица 2. Метрические алгебры Ли четырехмерных групп Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которых не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной

| № | Таблица умножения |
|---|---|
| | Тип Сегре $\{1(12)\}$ |
| (A) | $[e_2,e_3]=3\alpha_1e_3$, $[e_2,e_4]=-\frac{\varepsilon_2}{2\alpha_1}e_3+\alpha_1e_4$, $\alpha_1>0$ |
| | Тип Сегре $\{(11)2\}$ |
| (B) | $[e_1,e_2]=\frac{\delta_1\sqrt{5}+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_2$, $[e_1,e_3]=\frac{3\varepsilon_1+\delta_1\sqrt{5}}{4\alpha_1}e_3$, $[e_1,e_4]=\alpha_1e_3-\frac{\delta_1\sqrt{5}+3\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_4$, $\alpha_1>0$ |
| | Тип Сегре $\{(112)\}$ |
| (C) | $[e_1,e_2]=-e_1+e_2$, $[e_1,e_3]=e_3$, $[e_2,e_3]=e_3$, $[e_2,e_4]=-\alpha_1e_1+\alpha_1e_2+\alpha_2e_3$, $[e_3,e_4]=\varepsilon_1\varepsilon_3e_1-\varepsilon_1\varepsilon_3e_2+\frac{\alpha_1^2-4\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_1^2-4\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_3\neq0$, |
| (D) | $[e_1,e_2]=\alpha_1e_1+\alpha_1e_2+\alpha_2e_3$, $[e_1,e_4]=-\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2\varepsilon_3+2)}{2\alpha_1}e_3$, $[e_3,e_4]=\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2\varepsilon_3+2)}{2\alpha_2}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_2^2+2\varepsilon_3\neq0$ |
| (E) | $[e_1,e_4]=(\alpha_1+\alpha_2)e_1+\alpha_3e_2$, $[e_2,e_4]=-\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_2e_1+(\alpha_1-\alpha_2)e_2$, $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_3\geqslant0$, $2\alpha_1^2\varepsilon_3+2\alpha_2^2\varepsilon_3+1\neq0$, $\alpha_3^2+\left(2\alpha_1^2-2\alpha_2^2-\varepsilon_3\right)^2\neq0$ |
| (F) | $[e_1,e_4]=\alpha_1e_1+(\alpha_2+\alpha_3)e_2$, $[e_2,e_4]=(\alpha_2-\alpha_3)e_1+\alpha_1e_2$, $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2-2\alpha_3^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_3>0$, $2\alpha_1^2\varepsilon_3-2\alpha_3^2\varepsilon_3+1\neq0$, $\alpha_2^2+\left(2\alpha_1^2+2\alpha_3^2-\varepsilon_3\right)^2\neq0$ |
| (G) | $[e_1,e_4]=(\alpha_1+1)e_1+(\alpha_2-1)e_2$, $[e_2,e_4]=(\alpha_2+1)e_1+(\alpha_1-1)e_2$, $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1\neq0$, $2\alpha_1^2\varepsilon_3+1\neq0$, $2\alpha_1^2+4\alpha_1\alpha_2-\varepsilon_3\neq0$, |
| (H) | $[e_1,e_4]=(\alpha_1+\alpha_2)e_1-\frac{2\alpha_1\alpha_2-\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_2+e_3$, $[e_2,e_4]=\frac{2\alpha_1\alpha_2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_1+(\alpha_1-\alpha_2)e_2+e_3$, $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2\neq0$, $2\alpha_1^2+\varepsilon_3\neq0$ |
| (I) | $[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+\alpha_1e_2$, $[e_2,e_4]=-\alpha_1e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2$, $[e_3,e_4]=\alpha_2e_3$, $\alpha_1\geqslant0$, $\alpha_2>0$ |
| (J) | $[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{6}}{2}e_1+(\alpha_1+1)e_2$, $[e_2,e_4]=(\alpha_1-1)e_1+\frac{\sqrt{6}}{2}e_2$, $[e_3,e_4]=\alpha_2e_3$, $\alpha_1\geqslant0$, $\alpha_2\neq0$ |
| (K) | $[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+(\alpha_1+1)e_2$, $[e_2,e_4]=(\alpha_1-1)e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2$, $[e_3,e_4]=\alpha_2e_3$, $\alpha_2>0$ |
| | Тип Сегре $\{111\bar{1}\}$ |
| (L) | $[e_1,e_3]=-\sqrt{3}\alpha_1e_3+\alpha_1e_4$, $[e_1,e_4]=\alpha_1e_3+\sqrt{3}\alpha_1e_4$, $[e_3,e_4]=2\varepsilon_1\varepsilon_3\alpha_1e_1$, $\alpha_1>0$ |
| | Тип Сегре $\{(22)\}$ |
| (M) | $[e_1,e_2]=\alpha_1e_1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3$, $[e_2,e_3]=-\alpha_1e_1+\left(\alpha_1-\sqrt{2}\right)e_3$, $[e_1,e_4]=\left(\alpha_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e_1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3$, $[e_2,e_4]=\alpha_2e_1$, $[e_3,e_4]=\alpha_1e_1+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3$, $\alpha_2\neq0$ |
| (N) | $[e_1,e_2]=\alpha_1e_1-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_2^2-\varepsilon_2)}{2\alpha_2}e_3$, $[e_2,e_3]=\alpha_2e_1$, $[e_1,e_4]=-\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_1$, $[e_2,e_4]=\alpha_3e_1$, $[e_3,e_4]=-\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_3$, $\alpha_1\geqslant0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_3\neq0$ |
| (O) | $[e_1,e_2]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_1$, $[e_2,e_3]=-\frac{2\alpha_1^2+3\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_3$, $[e_1,e_4]=\alpha_1e_3$, $[e_2,e_4]=\alpha_2e_3+\frac{2\alpha_1^2-\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_4$, $\alpha_1\neq0$, $\alpha_1\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_2\neq0$, $6\alpha_1^2+\varepsilon_1\neq0$ |
| (P) | $[e_1,e_2]=-\frac{\sqrt{6}}{3}e_1$, $[e_2,e_3]=\frac{2\sqrt{6}}{3}e_3$, $[e_1,e_4]=\frac{\sqrt{6}}{6}e_3$, $[e_2,e_4]=\alpha_1e_1+\alpha_2e_3+\frac{\sqrt{6}}{3}e_4$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2\neq0$ |

Для метрической алгебры Ли (J) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (K) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (L) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (M) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Для метрических алгебр Ли (N), (O) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_1 & 0 & 0\\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0\end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (P) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0\end{pmatrix}$$

**Теорема 7.** *Все метрические алгебры Ли, приведенные в таблице 2, попарно не изоморфны.*

*Доказательство.* Метрические алгебры Ли с различными типами Сегре оператора Риччи не изоморфны, поскольку тип Сегре оператора Риччи инвариантен относительно изоморфизма. Таким образом, достачно проверить изоморфность метрических алгебр Ли с одинаковым типом Сегре.

Рассмотрим метрические алгебры Ли, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{(112)\}$. Все девять метрических алгебр Ли имеют одинаковый оператор Риччи

$$\rho = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Рассмотрим образ $\mathrm{Im}(\rho) = \mathrm{span}\{e_3\}$ оператора Риччи. Для метрической алгебры Ли (C) $\mathrm{Im}(\rho)$ не является идеалом, а для (D)–(K) — является. Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Далее, для каждой метрической алгебры Ли рассмотрим коммутатор $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Для метрической алгебры Ли (D):

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathrm{span}\{e_1 + e_2, e_3\} \;\Rightarrow\; \dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 2.$$

Для метрических алгебр Ли (E)–(K):

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\operatorname{span}\{e_1,e_2,e_3\}\ \Rightarrow\ \dim\left([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\right)=3.$$

Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Затем, для метрических алгебр Ли (E)–(K) рассмотрим факторизацию $\mathfrak{g}$ по идеалу $\operatorname{Im}(\rho)$. Для метрической алгебры Ли (E):

$$[x_1,x_3]=(\alpha_6+\alpha_7)x_1+\alpha_8x_2,\quad [x_2,x_3]=-\alpha_8\varepsilon_1\varepsilon_2x_1+(\alpha_6-\alpha_7)x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (F):

$$[x_1,x_3]=\alpha_6x_1+(\alpha_8+\alpha_9)x_2,\quad [x_2,x_3]=(\alpha_8-\alpha_9)x_1+\alpha_6x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (G):

$$[x_1,x_3]=(\alpha_6+1)x_1+(\alpha_8-1)x_2,\quad [x_2,x_3]=(\alpha_8+1)x_1+(\alpha_6-1)x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (H):

$$[x_1,x_3]=(\alpha_6+\alpha_7)x_1-\frac{2\alpha_6\alpha_7-\varepsilon_3}{2\alpha_6},\quad [x_2,x_3]=\frac{2\alpha_6\alpha_7+\varepsilon_3}{2\alpha_6}x_1+(\alpha_6-\alpha_7)x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (I):

$$[x_1,x_3]=-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\alpha_6x_2,\quad [x_2,x_3]=-\alpha_6x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (J):

$$[x_1,x_3]=-\frac{\sqrt{6}}{2}x_1+(1+\alpha_6)x_2,\quad [x_2,x_3]=(\alpha_6-1)x_1+\frac{\sqrt{6}}{2}x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (K):

$$[x_1,x_3]=-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+(1+\alpha_6)x_2,\quad [x_2,x_3]=(\alpha_6-1)x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

Для метрических алгебр Ли (E)–(H) факторалгебра $\mathfrak{g}/\operatorname{Im}(\rho)$ неунимодулярна, а для (I)–(K) — унимодулярна (т.е. след всех внутренних дифференцирований равен нулю). Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Далее заметим, что метрическая алгебра Ли (I) имеет скалярное произведение с сигнатурой $(1,1,1,-1)$ или $(1,-1,-1,-1)$, а метрические алгебры Ли (J), (K) — с сигнатурой $(1,1,-1,-1)$. Кроме того, метрическая алгебра Ли (J) имеет отрицательно полуопределенный тензор Риччи, а (K) — положительно полуопределенный. Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Предположим, что метрические алгебры Ли (E)–(H) изоморфны. Тогда изоморфизм должен сохранять оператор Риччи и переводить скалярное произведение одной метрической алгебры Ли в скалярное произведение другой, а значит, задаваться матрицей

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{14}\\ -\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_5A_{12} & \delta_5A_{11} & 0 & A_{24}\\ \frac{A_{12}A_{24}\delta_5-A_{11}A_{14}}{\delta_4\varepsilon_1\varepsilon_3} & -\frac{A_{11}A_{24}\delta_5\varepsilon_2+A_{12}A_{14}\varepsilon_1}{\delta_4\varepsilon_3} & \delta_4 & -\frac{\delta_4\varepsilon_3(A_{14}^2\varepsilon_1+A_{24}^2\varepsilon_2)}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{pmatrix}$$

где $\delta_i=\pm1$, $\varepsilon_i=\pm1$ и $A_{11}^2-A_{12}^2\neq0$.

Далее параметры первой метрической алгебры Ли будем обозначать $\alpha_i$, $\varepsilon_i$, а второй — $\beta_i$, $\omega_i$. Структурные константы первой алгебры Ли после изоморфизма будем обозначать $\left(C_{ij}^k\right)'$, второй — $Z_{ij}^k$.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (E) в (H). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\left(C_{14}^1\right)' = Z_{14}^1, \quad \left(C_{24}^2\right)' = Z_{24}^2, \quad \left(C_{34}^3\right)' = Z_{34}^3,$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned}
\alpha_1\delta_4 - \alpha_2\delta_4 + 2A_{11}^2\alpha_2\delta_4\varepsilon_1 &= \beta_1 + \beta_2,\\
\alpha_1\delta_4 + \alpha_2\delta_4 - 2A_{11}^2\alpha_2\delta_4\varepsilon_1 &= \beta_1 - \beta_2,\\
\frac{\delta_4\left(2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + \varepsilon_3\right)}{\alpha_1} &= \frac{2\beta_1^2 + \varepsilon_3}{\beta_1}.
\end{aligned}$$

Но данная система не имеет решения, поскольку $\alpha_2 > 0$.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (F) в (H). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\left(C_{14}^1\right)' = Z_{14}^1, \quad \left(C_{24}^2\right)' = Z_{24}^2, \quad \left(C_{34}^3\right)' = Z_{34}^3,$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned}
\alpha_1\delta_4 + 2A_{11}A_{12}\alpha_3\delta_4 &= \beta_1 + \beta_2,\\
\alpha_1\delta_4 - 2A_{11}A_{12}\alpha_3\delta_4 &= \beta_1 - \beta_2,\\
\frac{\delta_4\left(2\alpha_1^2 - 2\alpha_3^2 + \varepsilon_3\right)}{\alpha_1} &= \frac{2\beta_1^2 + \varepsilon_3}{\beta_1}.
\end{aligned}$$

Но данная система не имеет решения, так как $\alpha_3 > 0$.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (G) в (H). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\begin{aligned}
&\left(C_{14}^1\right)' = Z_{14}^1, \quad \left(C_{14}^2\right)' = Z_{14}^2, \quad \left(C_{14}^3\right)' = Z_{14}^3,\\
&\left(C_{24}^1\right)' = Z_{24}^1, \quad \left(C_{24}^2\right)' = Z_{24}^2, \quad \left(C_{24}^3\right)' = Z_{24}^3,
\end{aligned}$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_4\left(\left(\alpha_1+1\right)A_{11} + \left(\alpha_1-1\right)A_{12}\right)}{A_{11}+A_{12}} &= \beta_1 + \beta_2,\\
\frac{\delta_5\delta_4\left(\left(\alpha_2-1\right)A_{11} + \left(\alpha_2+1\right)A_{12}\right)}{A_{11}+A_{12}} &= \frac{\varepsilon_3 - 2\beta_1\beta_2}{2\beta_1},\\
\frac{2\left(A_{12}\left(A_{24}\left(\alpha_2+1\right)\delta_5 + A_{14}\right) - \left(A_{14} - A_{24}\left(\alpha_2-1\right)\delta_5\right)A_{11}\right)\varepsilon_3}{A_{11}+A_{12}} + \frac{A_{14}}{\alpha_1} &= 2,\\
\frac{\delta_5\delta_4\left(\left(\alpha_2+1\right)A_{11} + \left(\alpha_2-1\right)A_{12}\right)}{A_{11}+A_{12}} &= \frac{2\beta_1\beta_2 + \varepsilon_3}{2\beta_1},\\
\frac{\delta_4\left(\left(\alpha_1-1\right)A_{11} + \left(\alpha_1+1\right)A_{12}\right)}{\left(A_{11}+A_{12}\right)} &= \beta_1 - \beta_2,\\
\frac{2\varepsilon_3\left(A_{12}\left(A_{24} - A_{14}\left(\alpha_2-1\right)\delta_5\right) - \left(A_{14}\left(\alpha_2+1\right)\delta_5 + A_{24}\right)A_{11}\right)}{A_{11}+A_{12}} - \frac{A_{24}}{\alpha_1} &= 2.
\end{aligned}$$

Но данная система не имеет решения, поскольку изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (E) в (G). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\left(C_{14}^1\right)' = Z_{14}^1, \quad \left(C_{14}^2\right)' = Z_{14}^2, \quad \left(C_{14}^3\right)' = Z_{14}^3,$$
$$\left(C_{24}^1\right)' = Z_{24}^1, \quad \left(C_{24}^2\right)' = Z_{24}^2, \quad \left(C_{24}^3\right)' = Z_{24}^3, \quad \left(C_{34}^3\right)' = Z_{34}^3,$$

которое имеет вид

$$\delta_4\left(2A_{11}^2\alpha_2\varepsilon_1 + \alpha_1 - \alpha_2\right) = \beta_1 + 1,$$
$$\delta_5\left(\alpha_3 - 2A_{11}A_{12}\alpha_2\varepsilon_2 +\right)\delta_4 = \beta_2 - 1,$$
$$\left(\left(\left(\left(2\varepsilon_1 - 4A_{11}^2\right)A_{14} + 4A_{11}A_{12}A_{24}\delta_5\right)\alpha_2 - 2\varepsilon_2A_{24}\alpha_3\delta_5\right)\alpha_1 + 2A_{14}\alpha_2^2\varepsilon_1\right)\varepsilon_3 +$$
$$+A_{14}\varepsilon_1 = 0,$$
$$-\delta_5\left(2A_{11}A_{12}\alpha_2 + \alpha_3\varepsilon_2\right)\varepsilon_1\delta_4 = \beta_2 + 1,$$
$$-\delta_4\left(2A_{11}^2\alpha_2\varepsilon_1 - \alpha_1 - \alpha_2\right) = \beta_1 - 1,$$
$$\left(\left(\left(\left(4A_{11}^2\varepsilon_1 - 2\right)A_{24}\alpha_2 + 2A_{14}\alpha_3\delta_5\right)\alpha_1 + 2A_{24}\alpha_2^2\right)\varepsilon_3 + A_{24}\right)\varepsilon_2 +$$
$$+4\varepsilon_3A_{11}A_{12}A_{14}\alpha_2\delta_5\alpha_1 = 0,$$
$$\frac{\delta_4\left(2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + \varepsilon_3\right)}{\alpha_1} = \frac{2\beta_1^2 + \varepsilon_3}{\beta_1}.$$

Но данная система не имеет решения, так как изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (F) в (G). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\left(C_{14}^1\right)' = Z_{14}^1, \quad \left(C_{14}^2\right)' = Z_{14}^2, \quad \left(C_{14}^3\right)' = Z_{14}^3,$$
$$\left(C_{24}^1\right)' = Z_{24}^1, \quad \left(C_{24}^2\right)' = Z_{24}^2, \quad \left(C_{24}^3\right)' = Z_{24}^3, \quad \left(C_{34}^3\right)' = Z_{34}^3,$$

которое имеет вид

$$\delta_4\left(2A_{11}A_{12}\alpha_3 + \alpha_1\right) = \beta_1 + 1,$$
$$\delta_5\delta_4\left(2A_{11}^2\alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_3\right) = \beta_2 - 1,$$
$$\left(\left(\left(\left(4A_{11}^2 - 2\right)A_{24}\delta_5 - 4A_{11}A_{12}A_{14}\right)\alpha_3 + 2A_{24}\alpha_2\delta_5\right)\alpha_1 - 2A_{14}\alpha_3^2\right)\varepsilon_3 + A_{14} = 0,$$
$$-\delta_5\delta_4\left(2A_{11}^2\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_3\right) = \beta_2 + 1,$$
$$-\left(2A_{11}A_{12}\alpha_3 - \alpha_1\right)\delta_4 = \beta_1 - 1,$$
$$\left(\left(\left(\left(4A_{11}^2 - 2\right)A_{14}\delta_5 - 4A_{11}A_{12}A_{24}\right)\alpha_3 - 2A_{14}\alpha_2\delta_5\right)\alpha_1 + 2A_{24}\alpha_3^2\right)\varepsilon_3 - A_{24} = 0,$$
$$\frac{\delta_4\left(2\alpha_1^2 - 2\alpha_3^2 + \varepsilon_3\right)}{\alpha_1} = \frac{2\beta_1^2 + \varepsilon_3}{\beta_1}.$$

Но данная система не имеет решения, поскольку изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (E) в (F). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\left(C_{14}^1\right)' = Z_{14}^1, \quad \left(C_{14}^2\right)' = Z_{14}^2, \quad \left(C_{14}^3\right)' = Z_{14}^3,$$
$$\left(C_{24}^1\right)' = Z_{24}^1, \quad \left(C_{24}^2\right)' = Z_{24}^2, \quad \left(C_{24}^3\right)' = Z_{24}^3, \quad \left(C_{34}^3\right)' = Z_{34}^3,$$

которое имеет вид

$$\delta_4\left(2A_{11}^2\alpha_2\varepsilon_1 + \alpha_1 - \alpha_2\right) = \beta_1,$$

$$-\delta_4\delta_5\left(2A_{11}A_{12}\alpha_2\varepsilon_2-\alpha_3\right)=\beta_2+\beta_3,$$
$$\left(\left(\left(\left(2\varepsilon_1-4A_{11}^2\right)A_{14}+4A_{11}A_{12}A_{24}\delta_5\right)\alpha_2-2\varepsilon_2A_{24}\alpha_3\delta_5\right)\alpha_1+2A_{14}\alpha_2^2\varepsilon_1\right)\varepsilon_3+ \\ +A_{14}\varepsilon_1=0,$$
$$-\delta_4\varepsilon_1\left(2A_{11}A_{12}\alpha_2+\alpha_3\varepsilon_2\right)\delta_5=\beta_8-\beta_9,$$
$$-\delta_4\left(2A_{11}^2\alpha_2\varepsilon_1-\alpha_1-\alpha_2\right)=\beta_1,$$
$$\left(\left(\left(\left(4A_{11}^2\varepsilon_1-2\right)A_{24}\alpha_2+2A_{14}\alpha_3\delta_5\right)\alpha_1+2A_{24}\alpha_2^2\right)\varepsilon_3+A_{24}\right)\varepsilon_2+ \\ +4A_{11}A_{12}A_{14}\alpha_1\alpha_2\delta_5\varepsilon_3=0,$$
$$\frac{\delta_4\left(2\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\varepsilon_3\right)}{\alpha_1}=\frac{2\beta_1^2-2\beta_3^2+\varepsilon_3}{\beta_1}.$$

Но данная система не имеет решения, так как изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Далее, рассмотрим метрические алгебры Ли, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{22\}$. Все четыре метрические алгебры Ли имеют одинаковый оператор Риччи

$$\rho=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Для каждой метрической алгебры Ли рассмотрим коммутатор $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Для метрических алгебр Ли (M)–(N):

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\operatorname{span}\{e_1,e_3\}\ \Rightarrow\ \dim\left([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\right)=2.$$

Для метрических алгебр Ли (O)–(P):

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\operatorname{span}\{e_1,e_3,e_4\}\ \Rightarrow\ \dim\left([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\right)=3.$$

Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Предположим, что метрические алгебры Ли (M), (N) и (O), (P) изоморфны. Тогда изоморфизм должен сохранять оператор Риччи и переводить скалярное произведение одной метрической алгебры Ли в скалярное произведение другой, а значит, задаваться матрицей

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&A_{14}\\0&A_{11}&0&A_{13}\\-\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_4A_{13}&A_{32}&\delta_4A_{11}&A_{34}\\0&-\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_4A_{13}&0&\delta_4A_{11}\end{pmatrix}$$

где $\delta_i=\pm1$, $\varepsilon_i=\pm1$ и $A_{11}^2-A_{13}^2\neq0$.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (M) в (N). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\left(C_{14}^3\right)'=Z_{14}^3,\quad\left(C_{34}^1\right)'=Z_{34}^1,$$

которое имеет вид

$$2\left(2A_{11}^2\omega_1-2A_{11}A_{13}\omega_1+1\right)\alpha_1-A_{11}\omega_1\left(A_{11}-2A_{13}\right)\sqrt{2}=0,$$
$$\left(A_{11}^2\omega_1-2A_{11}A_{13}\omega_1+1\right)\sqrt{2}-2\left(2A_{11}^2\omega_1-2A_{11}A_{13}\omega_1+1\right)\alpha_1=0.$$

Но данная система не имеет решения, так как изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (O) в (P). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\left(C_{24}^1\right)' = Z_{24}^1, \quad \left(C_{24}^2\right)' = Z_{24}^2,$$

которое имеет вид

$$(2A_{14}\delta_4\varepsilon_2 + A_{32})\sqrt{6}A_{13}^2 - \left(A_{11}\left(A_{12}\delta_4 + 2A_{34}\right)\sqrt{6} + 6\omega_1\delta_4\alpha_2\right)A_{13} - \\ -6\omega_1 A_{11}\alpha_2\delta_4 = 0,$$
$$A_{13}\delta_4\omega_1 = 0.$$

Но данная система не имеет решения, поскольку изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу. □

В заключении отметим, что полученная классификация содержит 16 метрических алгебр Ли: 1 из них имеет скалярное произведение лоренцевой сигнатуры, 11 — нейтральной сигнатуры, а 4 допускают скалярное произведение как лоренцевой, так и нейтральной сигнатуры.

Краткий анонс результатов данной работы был ранее опубликован в работе [13].

## References


[1] A. Besse, *Einstein manifolds*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. MR0867684

[2] A. Gray, *Einstein-like manifolds which are not Einstein*, Geom. Dedicata, **7** (1978), 259–280. MR0505561

[3] O.P. Gladunova, E.D. Rodionov, V.V. Slavskii, *Harmonic Tensors on Three-Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Lorentz Metric*, Journal of mathematical sciences, **198**:5 (2014), 505–545. MR3205930

[4] O.P. Gladunova, V.V. Slavskii, *Left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional unimodular Lie groups with zero-divergence Weyl tensor*, Doklady Mathematics, **81**:2 (2010), 298–300. MR2723566

[5] D.S. Voronov, E.D. Rodionov, *Left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional nonunimodular Lie groups with zero-divergence Weyl tensor*, Doklady Mathematics, **81**:3 (2010), 392–394. MR2723594

[6] O.P. Gladunova, V.V. Slavskii, *Harmonicity of the Weyl tensor of left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional unimodular Lie groups*, Siberian Advances in math., **23**:1 (2013), 32–46. MR2858657

[7] A. Zaeim, A. Haji-Badali, *Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four*, Mediterranean Journal of Mathematics, **13**:5 (2016), 3455–3468. MR3554319

[8] G. Calvaruso, A. Zaeim, *Conformally flat homogeneous pseudo-riemannian four-manifolds*, Tohoku Math. J., **66** (2014), 31–54. MR3189478

[9] G. Calvaruso, A. Zaeim, *Four-dimensional Lorentzian Lie groups*, Differential Geometry and its Applications, **31** (2013), 496–509. MR3066029

[10] G. Calvaruso, A. Zaeim, *Neutral Metrics on Four-Dimensional Lie Groups*, Journal of Lie Theory, **25** (2015), 1023–1044. MR3345046

[11] P.R. Law, *Algebraic classification of the Ricci curvature tensor and spinor for neutral signature in four dimensions*, arXiv:1008.0444, (2010).

[12] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, 1983. MR0719023

[13] O.P. Khromova, P.N. Klepikov, E.D. Rodionov *Left-invariant pseudo-Riemannian metrics on four-dimensional Lie groups with zero Schouten-Weyl tensor*, arXiv:1611.00916, (2016).

Pavel Nikolaevich Klepikov
Altai State University,
61, Lenina ave.,
Barnaul, 656049, Russia
*E-mail address*: klepikov.math@gmail.com